



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	分岐タイプと還元公理 : 『プリンキピア・マテマティカ』新旧両版の内的連関をめぐって
Author(s)	野村, 恭史
Citation	北海道大学文学研究科紀要, 116, 1-24
Issue Date	2005-07-15
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/34090
Type	departmental bulletin paper
File Information	116_PL1-24.pdf



分岐タイプと還元公理

——『プリンキピア・マテマティカ』新旧両版の内的連関をめぐる——

Ramified Types and the Axiom of Reducibility:

Between the 1st and the 2nd Editions of *Principia Mathematica*

野村 恭史

Yasushi NOMURA

はじめに

初期ラッセルの論理学の哲学にかんする研究が近年あらたな展開を見せている。そこで中心的な役割を果たしている研究者の一人がグレゴリー・ランディニ (Gregory Landini) である。ラッセルの未公刊の手稿を利用した彼の研究によって、『プリンキピア・マテマティカ』(以下『プリンキピア』と略記する)の第一版(第一巻, 1910年)のタイプ理論の誕生の過程が、(とりわけ「置き換え理論」との関連で)これまでになく明らかになってきた。『プリンキピア』第一版へ至るラッセルの論理思想の展開の跡づけとして、ランディニの解釈はたしかに非常に魅力的である。とはいえ、第一版への批判を受ける形でその十五年後に出版された『プリンキピア』第二版(1925年)から見ると、彼の解釈はなおまだいくつかの問題をはらんでいるように思われる。本稿では、『プリンキピア』第一版と同書第二版のタイプ理論のランディニによる定式化とその特徴を確認した後で(I, II), そこに含まれる問題点をいくつか指摘したい(III~V)。

I 『プリンキピア』 第一版のタイプ理論の ランディニによる定式化 (LPM1)

まず第一版タイプ理論のランディニによる定式化を見よう (Landini 1998, pp.255-257, sec.10.1)。そこで非常に特徴的なのは、以下に定式化される構文論にたいして唯名論的な意味論が想定されているということである (Ⅳで詳述する) (とりわけ命題の存在論が落とされている点が注目に値する)。また、述語的なオーダー／タイプの変項しか認められていないという点も際立っている (Ⅴを参照)¹。そしてこの点と連動して、包括原理は還元公理しか認められていない (どのような論理式を使っても、それによって抽象できるのは述語的関数のみである)。

(1) オーダー／タイプとオーダーの定義

(1.1) オーダー／タイプ・シンボルの定義 (各変項の右肩につける)

- ・“o” はオーダー／タイプ・シンボルである。
- ・ $t_1, \dots, t_m$ がオーダー／タイプ・シンボルならば、表現 $(t_1, \dots, t_m)$ もオーダー／タイプ・シンボルである。
- ・以上のみがオーダー／タイプ・シンボルである。

●注意：ランディニは「オーダー／タイプ order/type」という言葉を使っているが、任意の述語変項のオーダー／タイプが、そのアーギュメントのオーダー／タイプのみによって完全に決定されるという限りでは、この「オーダー／タイプ」は、けっきょく単純タイプ理論におけるタイプの区別に帰しているように思われる (Ⅴを参照)。

(1.2) オーダーの定義

- ・オーダー／タイプ・シンボル “o” のオーダーは 0 である。

¹ 本稿に言う「述語的」は、『プリンキピア』第一版序論の「述語的」、つまり与えられた命題関数のオーダーが、そのアーギュメントの (うちで最高の) オーダーより一つだけ高いことを意味する (PM, p.53)。

- ・オーダー／タイプ・シンボル $t_1, \dots, t_m$ のうちで最高のオーダーが n ならば、オーダー／タイプ・シンボル $(t_1, \dots, t_m)$ のオーダーは $n+1$ である。

(2) 原始記号

- (2.1) 論理定項 (真理関数的操作子 “ $\sim$ ” “ $\vee$ ”, 量化子 “ $\forall$ ”)
- (2.2) 補助記号 (カッコ “(” “)”, ドット “.” “:” など)
- (2.3) オーダー／タイプ・シンボルをスーパースクリプトとする変項
 - 例: “ $x^{(o)}$ ”, “ $x^{((o))}$ ”, “ $x^{((o),o)}$ ” など。
- (2.4) 「もう一つの記号法 alternative notation」 (Landini 1998, p.256)
 - ・個体変項 “ x^o ” を “ $^ox^o$ ” と書く。
 - ・各変項の左肩に、当の変項のオーダーを書き、右肩に記号列 (アーギュメントのオーダー／アーギュメントの右肩記号) を書く²。

●例: “ $x^{(o)}$ ” $\rightarrow$ “ $^1x^{(o/o)}$ ”, “ $x^{((o))}$ ” $\rightarrow$ “ $^2x^{(1/(o/o))}$ ”, “ $x^{((o),o)}$ ” $\rightarrow$ “ $^2x^{(1/(o/o),o/o)}$ ”

(3) 構成規則

- (3.1) 原子論理式:

$$x^{(t_1, \dots, t_j)}(y_1^{t_1}, \dots, y_j^{t_j})$$

- (3.2) 論理式

- ・原子論理式は論理式である。
- ・ A, B が論理式ならば, $\sim A$ および $(A \vee B)$ も論理式である。
- ・ C が x^t の自由な現れを含む論理式ならば, $(\forall x^t)C$ も論理式である。
- ・以上のみが論理式である。

- (3.3) 諸定義

² 帰納的に定義すると以下になるだろう ($O'n/p=n$ とする)。(i) $OT'o=0/o$, (ii) $OT'(t_1, \dots, t_n) = \max[O'(OT't_1), \dots, O'(OT't_n)] + 1/(OT't_1, \dots, OT't_n)$. 変項 “ x ” のオーダー／タイプが $(t_1, \dots, t_n)$ ならば, “ x ” の左肩には, $OT'(t_1, \dots, t_n)$ のスラッシュの左側の部分を, 右肩にはその右側の部分を書く。変項のオーダー／タイプが与えられれば, 「もう一つの記号法」においてその変項をどう書き記すべきかも一意に定まる。

(3.31) 他の論理定項は通常の仕方 で定義する。

(3.32) 同一性 (PM * 13.01) :

$$x^t = y^t : =_{df} (\forall z^{(t)}) (z^{(t)}(x^t) \equiv z^{(t)}(y^t))$$

(4) 推論規則と公理

(4.1) 論理定項にかんする推論規則と諸公理 (真理関数的操作子については PM * 1 を, 量子子については PM * 10 を参照)

(4.2) 還元公理 (PM * 19.10) :

$$(\exists x^{(t_1, \dots, t_j)}) (\forall y_1^{t_1} \dots y_j^{t_j}) (x^{(t_1, \dots, t_j)}(y_1^{t_1}, \dots, y_j^{t_j}) \equiv A).$$

(ここで A は $x^{(t_1, \dots, t_j)}$ の自由な現れを含まない論理式とする。)

II 『プリンキピア』第二版のタイプ理論の ランディニによる定式化 (LPM2)

次に第二版序論のタイプ理論のランディニによる定式化を見よう (Landini 1996, pp.602-606)。背後に唯名論的な意味論が想定されているのは LPM1 と同じである (IV を参照)。LPM1 からの最大の変更点は, 還元公理の廃止である (同じく IV を参照)。そしてこれにともなって, 述語変項へのアーギュメントの変域からオーダーの区別が消去され (III を参照), 命題関数とクラスが同一視されることとなった (PM, p.xxxix)。また非述語的な述語変項が再導入されている。

(1) タイプとオーダー

(1.1) タイプ・インデクス (各タームの右肩につける)

- ・ “o” はタイプ・インデクスである。
- ・ $t_1, \dots, t_n$ がタイプ・インデクスならば, 表現 $(t_1, \dots, t_n)$ もタイプ・インデクスである。
- ・ 以上のみがタイプ・インデクスである。

(1.2) オーダー・インデクス (各タームの左肩につける) : 任意の数字

(1.3) オーダーが 0 のときかつそのときに限ってタイプが o だという条件を満たす限りで, 任意のオーダーは任意のタイプと両立可能である (Landini

1996, p.603) (すなわち “o” 以外のタイプ・インデックスをもつ変項は任意のオーダー・インデックスをもちうる)。

●LPM1 (2.4) の「もう一つの記号法」の “n/” の部分をすべて落とせば LPM2 のスーパースクリプトが得られるが (例: “ $1_{X^{(o/o)}}$ ” → “ $1_{X^{(o)}}$ ”, “ $2_{X^{(1/(o/o))}}$ ” → “ $2_{X^{((o))}}$ ”, “ $2_{X^{(1/(o/o), o/o)}}$ ” → “ $2_{X^{((o), o)}}$ ”), LPM2 には, このような仕方では得られない非述語的なスーパースクリプトも存在する (たとえば “ $3_{X^{(o)}}$ ” や “ $1_{X^{(((o))})}$ ” など)。

(2) 原始記号

(2.1) 論理定項 (真理関数的操作子 “ $\sim$ ” “ $\vee$ ”, 量子子 “ $\forall$ ”)

(2.2) 補助記号 (カッコ “(” “)”, ドット “.” “:” など)

(2.3) オーダー・インデックスを左肩に, タイプ・インデックスを右肩に乗せた変項

(3) 構成規則

(3.1) ターム: 変項およびラムダ・ターム ((3.3) を見よ)

(3.2) 原子論理式 (ターム列):

$${}^a x^{(t_1, \dots, t_j)} (b_1 y_1^{t_1}, \dots, b_j y_j^{t_j})$$

●注意: 述語変項とそれへのアーギュメントはタイプにおいてだけ一致していればよく, オーダーにかんしてはいかなる制限もない (IIIを参照)。

(3.3) 論理式

- 原子論理式は論理式である。
- A, B が論理式ならば, $\sim A$ および $A \vee B$ も論理式である。
- C が論理式ならば, $(\forall {}^a x^t) C$ も論理式である。
- n が^s, 論理式 A に現れる最高のオーダーのとき

$${}^a [\lambda {}^{o_1} x_1^{t_1}, \dots, {}^{o_j} x_j^{t_j} A]^{(t_1, \dots, t_j)}$$

はラムダ・タームである。ただし a は, もし n が束縛変項のオーダーならば n+1 であり, そうでなければ n である。

●任意の論理式 A について,

$$\begin{aligned} & (\forall {}^{m_1} y_1^{t_1} \dots {}^{m_j} y_j^{t_j}) ({}^a [\lambda {}^{o_1} x_1^{t_1}, \dots, {}^{o_j} x_j^{t_j} A]^{(t_1, \dots, t_j)} ({}^{m_1} y_1^{t_1}, \dots, {}^{m_j} y_j^{t_j})) \\ & \equiv A[{}^{m_1} y_1^{t_1} \mid {}^{o_1} x_1^{t_1}, \dots, {}^{m_j} y_j^{t_j} \mid {}^{o_j} x_j^{t_j}] \end{aligned}$$

が成り立つので ((4.24) を見よ), ラムダ・タームの導入は包括原理として機能する (ここで $A[m^1y_1^{t1} | o^1x_1^{t1}, \dots, m^jy_j^{tj} | o^jx_j^{tj}]$ は, $o^1x_1^{t1}, \dots, o^jx_j^{tj}$ のすべての自由な現れの代わりにそれぞれ $m^1y_1^{t1}, \dots, m^jy_j^{tj}$ の自由な現れを含むという点でのみ A と異なる論理式である)。

(3.4) 諸定義

(3.41) 他の論理定項は通常の仕方で定義する。

(3.42) 同一性：

$${}^a x^t = {}^b y^t : =_{df} (\forall {}^c z^{(t)}) ({}_c z^{(t)} ({}_a x^t) \equiv {}_c z^{(t)} ({}_b y^t))$$

ここで $c = \max[a, b] + 1$ である。

- 注意：この定義では、オーダーの異なる存在者でも同一でありうることになる (III を参照)。

(3.43) メンバーシップ：

$$\langle m^1P_1^{t1}, \dots, m^jP_j^{tj} \rangle \in {}^a Q^{(t1, \dots, tj)} : =_{df} {}^a Q^{(t1, \dots, tj)} (m^1P_1^{t1}, \dots, m^jP_j^{tj})$$

- クラス (関係) は命題関数と端的に同一視される (PM, p.xxxix)。

(3.44) クラス抽象：

$$\begin{aligned} B({}^a \{ \langle m^1P_1^{t1}, \dots, m^jP_j^{tj} \rangle : A \}^{(t1, \dots, tj)}) \\ : =_{df} B({}^a [\lambda m^1P_1^{t1}, \dots, m^jP_j^{tj} A]^{(t1, \dots, tj)} | {}^a \{ \langle m^1P_1^{t1}, \dots, m^jP_j^{tj} \rangle : A \}^{(t1, \dots, tj)}) \end{aligned}$$

- クラス (関係) について話すことは、それを定義する論理式から生成されるラムダ・タームが表示する命題関数について話すことにほかならないことになる。

(4) 推論規則と公理

(4.1) 推論規則

(4.11) 通常の MP と全称一般化規則：

$$\vdash A \text{ ならば } \vdash (\forall {}^m V^t) A$$

(4.2) 諸公理

(4.21) A (A がトートロジーのとき)

(4.22) $(\forall {}^m V^t) A \supset A[{}^m P^t | {}^m V^t]$

(ここで ${}^m P^t$ は A において ${}^m V^t$ にたいして自由である。)

- この全称例化公理は、タイプだけではなく、オーダーの区別もリスペク

トしている点に注意。

$$(4.23) (\forall^m V^t) (B \supset A) . \supset . B \supset (\forall^m V^t) A$$

(ここで $^m V^t$ は B のなかに自由に現れない。)

$$(4.24) {}^a[\lambda {}^{m1}V_1{}^{t1}, \dots, {}^{mj}V_j{}^{tj} A]^{(t1, \dots, tj)} ({}^{v1}P_1{}^{t1}, \dots, {}^{vj}P_j{}^{tj}) \\ \equiv A[{}^{v1}P_1{}^{t1} | {}^{m1}V_1{}^{t1}, \dots, {}^{vj}P_j{}^{tj} | {}^{mj}V_j{}^{tj}]$$

(ここで、 $1 \leq i \leq j$ なる任意の i について、 ${}^{vi}P_i{}^{ti}$ は A において ${}^{mi}V_i{}^{ti}$ にたいして自由であるとする。)

$$(4.25) \text{外延性}_1 : (\forall^m V^t) ({}^aP^{(t)} ({}^m V^t) \equiv {}^cQ^{(t)} ({}^m V^t)) . \supset . A {}^aP^{(t)} \supset A [{}^cQ^{(t)} | {}^aP^{(t)}]$$

(ここで $A [{}^cQ^{(t)} | {}^aP^{(t)}]$ は、 ${}^aP^{(t)}$ の自由な現れの(かならずしもすべてではない)いくつかの代わりに ${}^cQ^{(t)}$ の自由な現れを含むという点でのみ A と異なる論理式である。)

$$(4.26) \text{外延性}_2 : {}^o x^o = {}^o y^o . \supset . A {}^o x^o \supset A [{}^o y^o | {}^o x^o]$$

(ここで $A [{}^o y^o | {}^o x^o]$ は、 ${}^o x^o$ の自由な現れの(かならずしもすべてではない)いくつかの代わりに ${}^o y^o$ の自由な現れを含むという点でのみ A と異なる論理式である。)

III なぜに半分岐タイプ理論なのか？

上に見たように、LPM2では、述語変項へのアーギュメントはタイプにおいてのみ一致すればよいことになっている (LPM2, (3.2))。とくに「1925体系は、述語変項へのアーギュメントが当の述語変項より高いオーダーであってもよいとしている」(Landini 1996, p.601)。ということは、たとえば“ ${}^1\phi^{(o)}$ ” (${}^2\psi^{(o)}$)”といった記号結合が許されるということであり (LPM1ではこれは“ ${}^1\phi^{(2/(o/o))} ({}^2\psi^{(o/o)})$ ”となって完全にイル-フォームドである³⁾、このことはけっきよく、すくなくとも原子文にかんしては、事実上オーダーの区別が崩壊して単純タイプ理論に帰するということである。

³ “ ${}^2\phi^{(1/(o/o))} ({}^1\psi^{(o/o)})$ ”はウェル-フォームドだが。

じっさい LPM2 では、外延性₁ の公理 (4.25) と同一性の定義 (3.42) とラムダ抽象の公理 (4.24) を使えば、たやすく

$$(\forall^0 x^0) (^1\phi^{(0)}(^0x^0) \equiv ^2\psi^{(0)}(^0x^0)). \equiv .^1\phi^{(0)} = ^2\psi^{(0)}$$

という (LPM1 では論理式ですらない) 論理式が証明できる⁴ (その証明の過程ではまさに、“¹ $\phi^{(0)}$ ” と “² $\psi^{(0)}$ ” というオーダーの異なる述語変項が、同じ一つのタームのアーギュメントとして登場する)。この論理式が意味するのは、命題関数の同一性にとっては、タイプと外延のみが重要で、オーダーはどうでもよいということである。

こうなってくると、意味論的パラドクスが再燃してしまうのではないかという心配が生じる。しかしそれは、量子子にかんする推論規則がタイプだけではなくオーダーの区別もリスペクトするとされていること (LPM2, (4.11) (4.22)) (およびラムダ・タームのオーダーを勝手に上げ下げできないこと (LPM2, (3.3))) によってブロックされる。LPM2 におけるオーダーの区別は、原子文の構成規則においては無効化されるが、すくなくとも量化の変域にかんしてはなお残されている。つまり LPM2 は、高階の量化が登場する場面においてだけ分岐タイプ理論としての特徴を保持している単純タイプ理論、いわば半分分岐タイプ理論なのである。

しかし、アーギュメントの変域がタイプのみによって種別化される一方で (単純タイプ理論)、量化の変域の方はタイプとオーダーの両者によっていっそう細かく種別化されるというのは (分岐タイプ理論)、いかにもアド・ホックだという印象を受ける。LPM2 の理論構成を見ていると、これをつくった人は、還元公理をなしで済ませるためにいったんはオーダーの区別を廃棄しようとしたが、完全にそうしてしまうと意味論的パラドクスが復活してしまうので、アーギュメントの変域にかんしてだけそれを廃棄しつつ、パラドクス回避のために最低限必要な (量化の変域にかんする) オーダーの区別だけを残しておいた、という風にも見える。

⁴ より一般に、相異なる任意のオーダー n と m について同じことが証明できる。

このような、ともするとアド・ホックにすら見える理論をラッセルが容認していた可能性は、あまり高くないように思われる。というのも第一に、すくなくとも『プリンキピア』第一版においては、命題関数の「タイプ」は、量化の変域であると同時に「有意義性の範囲 range of significance」として定義されていた (PM, p.161, cf., Russell 1919, p.162)。したがってこの限りでは、或る量化の変域に含まれていない命題関数が、そこに含まれている命題関数が有意味に登場できるまさにその場所に有意味に登場できるとは思われない。また第二に、後年のラッセル自身による回想によると、パラドクスと格闘していた当時の彼は、その解決が満たすべき条件として或る種の自然さ (ラッセルの言い方では「論理的常識 logical common sense とでも呼ぶもの」) を要求していた (Russell 1959, p.61)。クワインによるパラドクスへの対処を「アド・ホックだ」と批判したラッセルが (ibid.), それに劣らずアド・ホックに見える半分岐タイプ理論を容認していたとは考えにくい。以上は傍証である。

『プリンキピア』第二版のタイプ理論が半分岐タイプ理論だということの論拠としてランディニが挙げているのは、『プリンキピア』第二版序論の一節である (PM, pp.xxxix-xl)。ラッセルはそこで以下のような議論を行っている。

κ を

$$\kappa :=_{\text{df}} \hat{\alpha} (\bar{R}''\alpha \subseteq \alpha \ \& \ a \in \alpha)^5 \text{ (} a \text{ をメンバーとする } R\text{-自己写像的なクラスのクラス)}$$

と定義すると、

$$\bar{R}''p'\kappa \subseteq p'\kappa \ \& \ a \in p'\kappa$$

が成り立つ ($p'\kappa$ は κ の積集合 $\hat{x}(\forall \alpha (\alpha \in \kappa \supset x \in \alpha))$ である)。これは $p'\kappa$ が κ の定義式を満たすということであり、通常のクラスの理論においてならば

$$p'\kappa \in \kappa$$

と結論してさしつかえないところである。しかし『プリンキピア』第二版で

⁵ $\bar{R}''\alpha = \hat{y}(\exists x(x \in \alpha \ \& \ R(x, y)))$ (R による α の像 (cf., PM * 31.02, 37.01))

は、命題関数がそのままクラスとして扱われるので (PM, p.xxxix), オーダーの区別という内包性がクラスの理論のなかに持ち込まれる (ibid.)。すると、 κ がオーダー 1 のクラスをアーギュメントとするならば、 $p'\kappa$ のオーダーは 2 になるので、“ $p'\kappa \in \kappa$ ” はイル-フォームドになる⁶。ラッセルは以上の状況の全体を、或る「限定された意味 limited sense」で $p'\kappa \in \kappa$ である、という微妙な言い方で表現した (PM, p.xli)。問題はこの「限定された意味」の意味である。

ランディニはこの「限定された意味」を、けっきょくのところあまり重視しなかったように思われる。

“ $p'\kappa \in \kappa$ ” のような表現は、彼 [ラッセル] が言うところでは、有意味でありうる。彼はわれわれに、 κ を特徴づける論理式に現れる変項“ α ”の代わりにたんに“ $p'\kappa$ ”と書き、* 8 の諸規則によって推論を行うよう命じている (PM, p.xl)。このことはまた、シュレーダー-ベルンシュタインの結果のツェルメロによる証明のラッセルによる再定式化においても同じように行われている (PM, p.xli)。(Landini 1996, p.601)

ランディニはここから、LPM2 の原子文の構成規則においてオーダーの区別を完全に無効化した (LPM2, (3.2))。したがってランディニにおいては、なんの「限定」もなく“ $p'\kappa \in \kappa$ ”と言ってよいことになる⁷。しかし、このように読むことははたして適切だろうか。

ラッセルは次のように述べている。

$p'\kappa$ は κ のメンバーと同じオーダーではないので、表面上“ $p'\kappa \in \kappa$ ”は不可能である。しかしながら、これは言われるべきことのすべてではない。クラスのクラス κ は、つねに次のような形の或る関数によって定義

⁶ たとえば Church による分岐タイプ理論の定式化によるならば (1976, p.748), κ の分岐タイプが (i)/1/1 のとき $p'\kappa$ の分岐タイプは (i)/2 となるので、後者は前者のアーギュメントになれない。

⁷ ゲーデルも『プリンキピア』第二版当該箇所をこのように読んでいる (Gödel 1944, p. 454)。

される。

$$(x_1, x_2, \dots) : (\exists y_1, y_2, \dots). F(x_1 \in \alpha, x_2 \in \alpha, \dots, y_1 \in \alpha, y_2 \in \alpha, \dots)^8$$

ここでFは或るストローク関数である⁹。そして“ $\alpha \in \kappa$ ”が意味するのは、上の関数が真だということである。上の関数は、 α の代わりに $p'\kappa$ が代入され、その結果が*8によって解釈されても真だということがままある。このことは、 $p'\kappa \in \kappa$ を主張することを正当化してはくれないだろうか。(PM, pp.xxxix-xl)

この箇所は、まさに件の「限定された意味」の説明である。ラッセルがここで指摘しているのは、 κ を定義する論理式においては“ α ”に“ $p'\kappa$ ”を代入した結果がまったくイール-フォームドではないどころか、真ですらあるということである。というのも、 α も $p'\kappa$ も個体をメンバーとするので、

$$(x_1, x_2, \dots) : (\exists y_1, y_2, \dots). F(x_1 \in \alpha, x_2 \in \alpha, \dots, y_1 \in \alpha, y_2 \in \alpha, \dots)$$

がウエル-フォームドならば、代入結果の

$$(x_1, x_2, \dots) : (\exists y_1, y_2, \dots). F(x_1 \in p'\kappa, x_2 \in p'\kappa, \dots, y_1 \in p'\kappa, y_2 \in p'\kappa, \dots)$$

も当然ウエル-フォームドだからである¹⁰。このようなことはとくに珍しいことではないし¹¹、しかもじっさいの証明において、その妥当性を損なうことな

⁸ すなわち $\kappa :=_{df} \hat{\alpha}((x_1, x_2, \dots) : (\exists y_1, y_2, \dots). F(x_1 \in \alpha, x_2 \in \alpha, \dots, y_1 \in \alpha, y_2 \in \alpha, \dots))$ ということ。

⁹ 「ストローク」とは、否定選言を表す二変数の真理関数的操作子である (p と q の否定選言は “ $(p \mid q)$ ” と書かれる)。

¹⁰ Church (1976) の定式化では、 κ の定義式に現れる “ α ” の分岐タイプが (i)/1 ならば (オーダー 1)、 κ の分岐タイプは (i)/1/1 となり (オーダー 2)、 $p'\kappa$ の分岐タイプは (i)/2 となる (オーダー 2)。すると “ α ” と “ $p'\kappa$ ” は、すくなくともそのアーギュメントの分岐タイプを共有しているので (ともに個体をアーギュメントとする)、 κ の定義式において前者に後者を代入することは、構成規則上はなんの問題もない。

¹¹ たとえば “ $\forall f^{(i)/1} (F^{((i)/1)/1} (f^{(i)/1}), \equiv, \forall x^1 (f^{(i)/1} (x^1) \supset f^{(i)/1} (x^1)))$ ” という仕方では $F^{((i)/1)/1}$ を抽

く、“ $\in \kappa$ ”が登場するすべての箇所を κ の定義式で書き換えることができればなんの問題もないであろう。したがって、「限定された意味で $p'\kappa \in \kappa$ である」と言う際にラッセルが意味していたことは、「もともとの定義式に書き換えることによって “ $p'\kappa \in \kappa$ ” から得られる論理式が成り立つ」ということであるように思われる。

とはいえ、もともとの証明が妥当ならば定義式への書き換えによってつねに妥当な証明が得られるかと言うと、そうではない。ランディニが言及している「シュレーダー—ベルンシュタインの結果のツェルメロによる証明のラッセルによる再定式化」の場合がそうである (PM, p.xli)。そこでは κ は

$$\kappa :=_{\text{df}} \hat{\alpha} (\alpha \subset D'R. \beta - (E'R \subset \alpha. \bar{R}''\alpha \subset \alpha))^{12}$$

と定義され、

$$p'\kappa \in \kappa$$

や

$$(A) p'\kappa - l'x \in \kappa^{13}$$

が「上で説明された限定された意味で」成り立つとされるが(要するに “ $\in \kappa$ ” を κ の定義式で書き換えた論理式が証明できる)、しかしこの (A) と

$$(B) \alpha \in \kappa. \supset \alpha. p'\kappa \subset \alpha^{14}$$

から

$$(C) p'\kappa \subset p'\kappa - l'x$$

を導くところで「証明は崩壊する」と言われる (PM, p.xli)。というのもこの導出は、(B) の束縛変項 “ α ” を “ $p'\kappa - l'x$ ” で例化することによって成立しているが、後者のオーダーは前者のそれよりも高いので、後者は前者の量化の変域に入ることができず、しかもこの一連の導出において κ や $p'\kappa$ や

象した場合、“ $f^{(1)/1}$ ”を“ $g^{(1)/2}$ ”で置き換えても右辺は成り立つが、左辺は“ $F^{((1)/1)/1}(g^{(1)/2})$ ”となってイルーフォームドになる。

¹² $D'R = \hat{x}(\exists y(R(x, y)), E'R = \hat{y}(\exists x(R(x, y)))$.

¹³ $p'\kappa - l'x = \hat{y}(y \in p'\kappa \ \& \ y \neq x)$.

¹⁴ $\forall \alpha (\alpha \in \kappa \supset p'\kappa \subset \alpha)$.

$p'x-l'x$ をそのそれぞれの定義式に書き換えても、このことはまったく変わらないからである。このように、高階の量子子にかんする推論規則を使ったオーダー横断的な導出が本質的に必要な場合には、もともとの証明が妥当であって書き換え結果は妥当とはならない。なんらかの他の方法を見出す必要がある (cf., PM, pp.xli-xlii)。

いずれにせよ、『プリンキピア』第二版の当該箇所をランディニのように読むのは無理があるように思われる。というのも、原子文の構成規則においてオーダーの区別を完全に無効化してしまう彼の読みにおいては、「限定された意味で $p'x \in x$ である」というラッセルの微妙な言い方に反して、なんの「限定」もなく端的に “ $p'x \in x$ ” と言ってしまえることになるからである。

しかもラッセルは次のように言っている。

われわれはいまや、同じオーダーのメンバーから成る異なったオーダーのクラスを区別せねばならない。もっとも単純な場合として個体のクラスをとれば、 $\mathfrak{x}(\phi!x)$ は $\mathfrak{x}(\phi_2x)$ 等々から区別されねばならない¹⁵。(PM, p.xxxix)

クラスと命題関数が同一視される『プリンキピア』第二版にあっては (PM, p. xxxix), 同じことはもちろん命題関数についても言える。したがって、わたしがこの節の冒頭で挙げた

$$(\forall^0 x^0) ({}^1\phi^{(0)}({}^0x^0) \equiv {}^2\psi^{(0)}({}^0x^0)) \equiv {}^1\phi^{(0)} \equiv {}^2\psi^{(0)}$$

といった論理式が証明可能であるような体系が、『プリンキピア』第二版のタイプ理論の定式化として正しいとは考えにくいのではないだろうか。

IV 還元公理はいかに放棄されたか？

まず『プリンキピア』第一版および同書第二版における「還元公理 axiom of

¹⁵ $\mathfrak{x}(\phi!x)$ は個体をメンバーとするオーダー 1 のクラス、 $\mathfrak{x}(\phi_2x)$ は個体をメンバーとするオーダー 2 のクラスである。

reducibility」の扱いをめぐる歴史的な経緯をごく簡単におさらいしておこう。『プリンキピア』は、ラッセル自身が見出したものを含むいくつかのパラドクスを回避しつつ、いわゆる論理主義のプログラムを完遂しようという目的のもとで書かれ、1910年にその第一版(の第一巻)が出版された。しかし、論理的パラドクスだけではなく意味論的パラドクスへの対処をも盛り込んだその体系(分岐タイプ理論)は、「還元公理」といういささかアド・ホックとも見える公理ぬきでは、さしあたって古典数学を展開することができなかった。というのもそれなしでは、不可識別性による同一性の定義も、クラス(や関係)の文脈的定義も、遺伝的性質による自然数の定義も立ち行かず、また実数論におけるワイエルシュトラースの定理も(もともと意図されていたような形では)証明されえないことになるからである。

とはいえ、「あらゆる命題関数は、そのすべての値に対して、同じアーギュメントの或る述語的関数と等値である」ということを主張するこの還元公理(PM, p.166)にたいしては、ウィトゲンシュタインやラムジーらから厳しい批判が寄せられ¹⁶、ラッセル自身も、1925年に出版された『プリンキピア』第二版への序論のなかで「あきらかに改善が望まれる論点は還元公理である」と述べることになる(PM, p.xiv, cf., Russell 1919, p.193)。その第二版でラッセルは、彼自身がウィトゲンシュタインに負っていると述べている或る対策を採用することによって(PM, p.xiv)、還元公理をなしですませることを試みたが、すくなくとも望み通りの結果を得ることはできなかった(ibid.)。

ランディニは、言うまでもなく以上のような経緯を踏まえた上で、わたし如上で「LPM1」および「LPM2」と呼んだ体系を定式化した。彼は前者を「『プリンキピア』の形式的体系 The Formal System of *Principia* (cum *10)」と呼び(Landini 1998, p.255)、後者を「1925年の形式的体系 The Formal System of 1925 *pace* *8」と呼んでいる(Landini 1996, p.602)。

まず LPM1 から見ていくと、これまでの標準的な『プリンキピア』理解と

¹⁶ E.g., Wittgenstein 1922, 6.1232-6.1233, Ramsey 1925, p.191, p.220, Ramsey 1926, p.228.

の対比において際立っているのは、その唯名論的な解釈と非述語的変項の排除である。非述語的変項については次節 V で扱うことにして、唯名論的な解釈については、まずランディニが LPM1 の意味論としてどのようなものを想定していたかを見てみよう。『プリンキピア』第一版においてリファレンシャルな解釈が想定されているのは個体変項のみで、高階の変項はすべてサブスティテューショナルに解釈される、というのがランディニの結論である (Landini 1998, pp.275-278)。

すると当然、『プリンキピア』第一版の著者たち（とくにラッセル）は、これまでの解釈に反して唯名論者だったのか、と問われることになるが、ランディニはこれを否定する。

普遍が存在し、……それは『プリンキピア』の述語変項ではなく、**個体**変項の値となる。意図された意味論においては、述語変項だけが唯名論的な解釈を与えられる。(Landini 1998, p.277)

すべての存在者は、それが普遍者であろうが特殊者であろうが、『プリンキピア』の個体／存在者変項 individual/entity variable の値となる。

(Landini 1998, p.292)

すると、特殊者と普遍者の両者を含む個体領域をもつ標準的な一階論理の言語の上に¹⁷、サブスティテューショナルに解釈される高階の変項によって階層化される分岐タイプが載る、というような構図になると思われる¹⁸。

これにたいして LPM2 では、唯名論的な解釈は基本的にそのままだが、還元公理がない代わりにラムダ抽象が導入され (LPM2, (3.3) (4.24)), 原子

¹⁷ このような言語の例としては、たとえば二階論理の言語を一階の多種論理の言語と見なし、(新たに例化述語を導入するなどして)それを標準的な一階論理の言語として再定式化したものが挙げられよう (cf., Shapiro 1991, pp.74-76)。

¹⁸ これにたいして、これまでの標準的な解釈では、『プリンキピア』第一版の分岐タイプ理論は、抽象的かつ内包的な存在者としての高階の命題関数の存在に實在論的な仕方コミットしていたとされる (e.g., Quine 1963, pp.243-244, Chihara 1973, pp.25-26, Hylton 1993, pp.353-355)。

文の構成規則においてオーダーの区別が無効化されている(LPM2, (3.2))。ラムダ抽象は包括原理としての役割を果たしており, LPM1 ではこの役割は還元公理が果たしていたものである(LPM1, (4.2))。またオーダーの区別の緩和も, 還元公理を要する或る種の証明を, それなしで可能にさせるという効果をもっている¹⁹。したがってランディニの見立てでは、『プリンキピア』第一版の還元公理への厳しい批判に接したラッセルは, 同書第二版において還元公理を端的に廃棄する代わりに, ラムダ抽象(包括原理)によって還元公理の機能の一部を保持しつつ, オーダーの区別の緩和によって還元公理の必要性を減じた, ということになる。この見立ては果たして適切だろうか。

まず『プリンキピア』第二版におけるラッセルの言葉を聞いてみよう。

〔還元公理をなしですますための〕もう一つ別の道がある。それは, 哲学的な理由からウィトゲンシュタインによって推奨されているものである。それが仮定しているところでは, 命題の関数はつねに真理-関数であり, 関数はその値を通じてのみ命題に現れることができる。この見方には困難があるが, 克服不可能というわけではない。……この理論が正しいと主張する準備はないが, 以下のページでその帰結を引き出してみることは価値あることのように思われる。(PM, p.xiv)

ラッセルはこのように述べて『プリンキピア』第二版序論の理論的な展開を始める。

すると, 還元公理を放棄する代わりにラッセルが採用したのは, (1)命題の関数はつねに真理-関数であり, (2)関数はその値を通じてのみ命題に現れることができる, という二つの仮定であったことがわかる。比較的わかりやすい前者についてはさしあたり措くとして, 後者の仮定はそもそもどういう仮定なのだろうか。

『プリンキピア』第二版でつけくわえられた「付録C」で, ラッセルは次の

¹⁹ たとえば前節で言及した「シュレーダー-ベルンシュタインの結果のツェルメロによる証明のラッセルによる再定式化」の場合など。

ように述べている。

この版の序論でわれわれが仮定したのは、関数はその値を通じてのみ命題に入り込むことができるということである。われわれが事実上仮定したところでは、マトリクス $f!(\phi!2)$ はつねに、或るストローク-関数

$$F(p, q, r, \dots)$$

の、 $p, q, r, \dots$ のいくつかまたはすべてを $\phi!a, \phi!b, \phi!c, \dots$ で置き換えることによって得られ、しかも他のすべての関数の関数は、そのようなマトリクスから一般化によって、すなわち $a, b, c, \dots$ のいくつかまたはすべてを変項で置き換え、その「すべての値」または「或る値」をとることによって、派生させることができる。(PM, p.659)

ここで言われていることは、さしあたり、“ $f!(\phi!2)$ ”における“ $f!$ ”のような高階の述語変項の値は、それとアーギュメントを共有しうる或るストローク-関数だということである。たとえば、上の $F(p, q, r, \dots)$ が “ $(p|(q|r))$ ”である場合²⁰、高階の述語変項“ $f!$ ”の値は、ストローク関数 “ $(\psi!a|(\psi!b|\psi!c))$ ”であり (“ $\psi!$ ”は当該の文脈に登場しない変項とする)、ここにおける“ $\psi!$ ”の自由な現れのすべてを“ $\phi!$ ”で書き換えた結果が、“ $f!$ ”の“ $\phi!2$ ”にたいする値だということになる。

ということは、高階の述語変項は、それとアーギュメントを共有しうる或るストローク-関数によって解釈されるということであって、これは高階の変項のサブスティテューショナルな解釈にほかならない。するとけつきよく、「関数はその値を通じてのみ命題に現れることができる」という、ラッセルが『プリンキピア』第二版で（還元公理を放棄する代わりに）導入した仮定は、高階の変項のサブスティテューショナルな解釈であったことになる。

するとラッセルは、還元公理を放棄する代わりに、

(R1) 命題の関数として真理-関数だけを認める、および

(R2) 高階の変項をサブスティテューショナルに解釈する

²⁰ このストローク関数は $(\sim p \vee \sim (\sim q \vee \sim r))$ と等値である。

という二つの仮定を採用したことになる。ランディニの見立てとはずいぶん異なるように思われる。彼の見立てを同じように挙げてみると、

(L1) ラムダ計算（包括原理）の導入、および

(L2) オーダーの区別の部分的消去

であった。(L1)のラッセルにおける対応者はサーカムフレクションだが²¹、これは『プリンキピア』の第一版と第二版を通じて採用されているので²²、とくに還元公理対策とは認められない（ランディニ自身もそう言っているわけではないが）。また(L2)は、前節Ⅲで見たように、とくに還元公理対策としてどうこう言う以前に、ラッセル自身がそもそも採用していないように思われる。還元公理を放棄する代価としてそれがラッセルの口にのぼることもまったくない。

逆にラッセルの側での対応策は、ランディニの見立てにおいてどうなっているだろうか。(R1)については、LPM1にもLPM2にも命題のタイプというものがそもそも存在しないので、さしあたり問題にならない（というかトリヴィアルにすでに採用されている）。(R2)については、LPM2ばかりか、LPM1においてすでに採用されている。ということは、ラッセルにおいて還元公理を放棄する代価であったものが、ランディニにおいてはすでにLPM1において還元公理と共存していたことになる。これはいかにも不思議なことのようと思われる。

還元公理をなしですませるために「関数はその値を通じてのみ～」テーゼ（高階の変項のサブスティテューショナルな解釈）を採用したというラッセル

²¹ サーカムフレクションとは、変項に曲折アクセント記号（circumflex）を付することによって、開放文から、命題関数を表示するタームを得るという操作である。たとえば“ ϕx ”が開放文ならば、“ ϕx ”は、適切な種類の任意の y にたいして或る値 ϕy を返す命題関数を表示するタームとなる（cf., PM, p.15）（したがってこの操作は包括原理と同じ機能を果たすことになる）。

²² ランディニは、『プリンキピア』第一版ではサーカムフレクションは採用されていないと言っているのだが（Landini 1998, p.265）。

自身の道行きが、ランディニの解釈ではほとんど説明されないように思われる。ランディニの見立てでは、そのテーゼは『プリンキピア』第一版ですでに採用されていたことになっているので、第二版で（還元公理を放棄する代価として）はじめて採用されたとすることはもちろんできない。そこで、オーダーの区別を部分的に無効化するという、それ自体でアド・ホックにも見える対策をラッセルが採っていたという解釈を出したわけだが、それは（前節で見たように）テキスト上の支持を得ることはきわめて難しいのではないだろうか。

V 非述語的変項はなぜ存在しないのか？

LPM1 には非述語的なオーダー／タイプの変項が存在しない（LPM1, (1.1)）。そうになっているのは、ランディニによればそもそも『プリンキピア』第一版に非述語的なオーダー／タイプの変項が存在しないからである。そう結論づける彼の議論は、非述語的変項を認めるとクラスの文脈的定義が立ち行かなくなる、というものである（Landini 1998, p.266）。たとえば、

$${}^0 2^0 A(z) \in {}^2 \hat{\alpha}^{(0/0)} B(\alpha)$$

という式を、『プリンキピア』第一版のクラスの文脈的定義（PM * 20.01）に即して展開すると、最後に

$$\begin{aligned} & \exists {}^3 \Sigma^{(2/(0/0))} (\forall {}^2 \alpha^{(0/0)} ({}^3 \Sigma^{(2/(0/0))} ({}^2 \alpha^{(0/0)}) \equiv B({}^2 \alpha^{(0/0)})) \\ & \& \exists {}^1 \phi^{(0/0)} (\forall {}^0 x^0 ({}^1 \phi^{(0/0)} ({}^0 x^0) \equiv A({}^0 x^0)) \& {}^3 \Sigma^{(2/(0/0))} ({}^1 \phi^{(0/0)}))) \end{aligned}$$

という式が得られる。しかしよく見ると、これは式ではない。というのも最後の“ ${}^3 \Sigma^{(2/(0/0))} ({}^1 \phi^{(0/0)})$ ”がイル-フォームドだからである。ここからランディニは、『プリンキピア』第一版の言語には非述語的変項は端的に存在しえないと結論した。

まず“ ${}^0 2^0 A(z) \in {}^2 \hat{\alpha}^{(0/0)} B(\alpha)$ ”といった記号結合が、クラスの文脈的定義に従った場合に無意味になるというのは、まったくその通りである。この点にかんして異論はない。しかし、ここからランディニのような結論へ向かうのは性急にすぎると思われる。この議論にとっては、 ${}^2 \hat{\alpha}^{(0/0)} B(\alpha)$ のような

非述語的存在者のクラスが登場することが不可欠である²³。すると、この議論が第一に示していることは、非述語的変項一般の是非よりもむしろ、非述語的存在者のクラスを抽象することの是非ではないだろうか。

じっさい、抽象されるクラスが、通常そうであるように述語的存在者のクラスである場合、クラスの文脈の定義はまったくなんの問題もなく機能する(たとえその抽象のために非述語的な論理式が使われたとしても)。他方で、上の例のような非述語的存在者のクラスが登場するような記号列が無意味になるということは、『プリンキピア』第一版の著者たちが、そのようなクラスをまったく想定していなかったということであり、しかもそれで問題は生じなかったということである²⁴。

すると“ $\exists z A(z) \equiv \exists \alpha^{(0/0)} B(\alpha)$ ”のような記号列が無意味になるという事態にたいする対応としては、ランディニのように非述語的変項を一般に排除するというのはあきらかに過剰反応であり、むしろそれでなにか問題があるのかと開き直るべきではないだろうか。

ましてや、非述語的変項をもたない LPM1 は、実質的には単純タイプ理論に帰しているように思われる。「オーダー／タイプ」という概念が登場しているために一見するとそうは見えないが (LPM1, (1) (2.4)), すべてのオーダー／タイプが述語的だということは、すべての述語変項のオーダー／タイプがそのアーギュメントのオーダー／タイプのみによって完全に決定されるということであり、これは LPM1 のオーダー／タイプがまったく分岐化 remified されていないということ、つまりそれはじっさいには単純タイプ理論におけるタイプの区別に帰しているということである。これにともなって、アーギュメントの変域からも、量化の変域からも、オーダーの区別が端的に

²³ ここに言う「非述語的存在者」とは、非述語的なオーダー／タイプの変項の値となる存在者のことであり、同じく「述語的存在者」とは、述語的なオーダー／タイプの変項の値となる存在者のことである(変項がどのように解釈されるにせよ)。

²⁴ 『プリンキピア』第一版の著者たちが還元公理を「クラスの公理 axiom of classes」とも呼んだ真意を考えるべきだろう (PM, pp.166-167)。

放逐され(LPM1, (3.1) (3.2)), 還元公理は(ランディニ自身も述べているように (Landini 1998, p.267)) 包括原理として機能するのみである (LPM1, (4.2))。

ならば, 意味論的パラドクスが復活してしまうのではないだろうか。もっとも単純な場合の一つであるグレリングの「ヘテロロジカル」のパラドクスを(ラムジーの定式化に即した形で)展開してみよう (Ramsey 1925, pp.205-206, cf., Grelling 1908, Quine 1966, pp.4-5)。まず, LPM1 の原始記号を個体変項の変域のなかに含め, 個体としてのそれらを指示する表現としてそのそれぞれを引用符で括ったもの (たとえば “ ${}^0x^0$ ” “ ${}^{0,1}f^{(0/0)}$ ” といったもの) を LPM1 のタームとして導入する。そして “ ${}^0x^0$ は ${}^1y^{(0/0)}$ を意味する” ということを意味する原始述語 “ ${}^2m^{(0/0,1/(0/0))}({}^0x^0, {}^1y^{(0/0)})$ ” を導入したうえで, 還元公理によって次を得る (LPM1, (4.2))。

$$\begin{aligned} & (\exists {}^1h^{(0/0)}) (\forall {}^0x^0) ({}^1h^{(0/0)}({}^0x^0) \\ & \quad \equiv \exists {}^1\phi^{(0/0)} ({}^2m^{(0/0,1/(0/0))}({}^0x^0, {}^1\phi^{(0/0)}) \& \sim {}^1\phi^{(0/0)}({}^0x^0))) \end{aligned}$$

ここでさらに, 任意の述語記号 “ ${}^1f^{(0/0)}$ ” は関数 $f^{(0/0)}$ を意味するのみだという自然な仮定をつけくわえれば, 個体 “ ${}^{0,1}h^{(0/0)}$ ” は個体変項 “ ${}^0x^0$ ” の変域のなかに入っており, また還元公理によっていましがたその存在が保証された関数 ${}^1h^{(0/0)}$ は述語変項 “ ${}^1\phi^{(0/0)}$ ” の変域のなかに入っているので,

$${}^1h^{(0/0)}({}^{0,1}h^{(0/0)}) \equiv \sim {}^1h^{(0/0)}({}^{0,1}h^{(0/0)})$$

という矛盾が得られる。

真正の分岐タイプ理論においてならば, 変項 “ ${}^1\phi^{(0/0)}$ ” の変域への量化を含む論理式によって抽象された関数は, 当の変項よりオーダーが高くなるので, その変域のなかに含まれることはできず, したがって上の導出はさしあたりブロックされる²⁵。しかし, オーダーの区別が事実上廃棄されている LPM1

²⁵ LPM2 で同じことをやろうとすると, 上の導出における関数 ${}^1h^{(0/0)}$ に対応するラムダ・タームは “ ${}^2[\lambda {}^0x^0 \exists {}^1\phi^{(0)} ({}^2m^{(0,(0))}({}^0x^0, {}^1\phi^{(0)}) \& \sim {}^1\phi^{(0)}({}^0x^0))]^{(0)}$ ” となって, そのオーダーが変項 “ ${}^1\phi^{(0)}$ ” のオーダーより高くなるので (cf., LPM2, (3.3)), その変域のなかに含まれてしまうことがない (したがってさしあたり矛盾は生じない)。そもそもここでの

においては、そのような仕方でのこのパラドクスをブロックすることはできない。

上の導出がもし誤りを含んでおり、よしんば LPM1 がなお意味論的パラドクスをも回避しえていても、すくなくともその回避の仕方は、(非述語的変項を含み、オーダーの区別が機能している)『プリンキピア』第一版のそれとは大きく異なることであろう。たとえばうつきのパラドクスは LPM1 には現れない。しかしそうなるのは、LPM1 には命題のタイプが端的に存在しないからであって²⁶、『プリンキピア』第一版がオーダーの区別を導入することによってそれを回避したのとは、回避の仕方がまったく異なっている。

おわりに

以上、ランディニによる『プリンキピア』解釈を検討してきた。主な批判点は以下の三つにまとめられる。(1)『プリンキピア』第二版は半分岐タイプ理論ではないのではないのか(Ⅲ)。(2)高階の変項の唯名論的な解釈は、還元公理を廃棄する代償として『プリンキピア』第二版で採用されたのではないのか(Ⅳ)。(3)『プリンキピア』第一版は、非述語的変項をもつ真正の分岐タイプ理論ではないのか(Ⅴ)。

ランディニの見方では、『プリンキピア』第一版のタイプ理論は、けっきょくのところ唯名論的な解釈を施された単純タイプ理論であり、還元公理は包括原理へと退化している(LPM1)。第二版のそれは、同じく唯名論的な解釈を施された半分岐タイプ理論であり、ラムダ抽象という形で包括原理が残されている(LPM2)。ラッセルにおいて第一版から第二版への改訂を動機づけたのが還元公理の扱いだったことはテキスト上ははっきりしているが(e.g., PM, p.xiv)、ランディニの見方では、還元公理は包括原理へと退化したまま

“ $m^{(0,(0))}$ ”のような内包的な文脈を構成する述語は LPM2 には含まれないのだが。

²⁶ Church (1976) の定式化では、 $0/1$, $0/2$, $0/3$, …といった分岐タイプがそれにあたる。

(Landini 1998, p.267), 事実上第二版まで生き残っていることになる。ならばラッセルは、なぜに改版の際に長大な序論を書き足して新たなタイプ理論を展開したのだろうか。還元公理をなしですませるという第二版におけるラッセルの目論見が²⁷, ランディニの見方では完全に宙に浮いてしまうように思われる。

ランディニの解釈は、『プリンキピア』の二つの版でそれぞれに展開された二つのタイプ理論の間の内的な連関を捉え損なっているのではないか。これが結論である。

略号表

- Chihara, C. S., 1973: *Ontology and the Vicious Circle Principles*, Cornell University Press, 1973.
- Church, A., 1976: “A Comparison of Russell’s Resolution of the Semantical Antinomies with That of Tarski”, *Journal of Symbolic Logic*, 41, 1976, pp.747-760.
- Gödel, K., 1944: “Russell’s Mathematical Logic”, in, P. Benacerraf and H. Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, 2nd ed. 1983, pp. 447-469.
- Grelling, K., and H. Nelson, 1908: “Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Brali-Forti”, *Abhandlungen der Fries’schen Schule*, 2, 1907-1908, S.300-334.
- Hylton, P., 1993: “Functions and Propositional Functions in *Principia Mathematica*”, in Irvine and Wedeking 1993, pp.342-360.
- Irvine, A. D., and G. A. Wedeking (eds.), 1993: *Russell and Analytic Philosophy*, University of Toronto Press, 1993.
- Landini, G., 1993: “Reconciling *PM*’s Ramified Type Theory with the Doctrine of the Unrestricted Variable of the *Principles*”, in Irvine and Wedeking 1993, pp.361-394.
- Landini, G., 1996: “The *Definability* of the Set of Natural Numbers in the 1925 *PRINCIPIA MATHEMATICA*”, *Journal of Philosophical Logic*, 25, 1996, pp.597-615.

²⁷ 「この新しい版〔『プリンキピア』第二版〕におけるわたしの主要な目的は、「還元公理」の使用を最小限に抑えることであつた」(Russell 1959, p.89)。

- Landini, G., 1998: *Russell's Hidden Substitutional Theory*, Oxford University Press, 1998.
- PM: A. N. Whitehead and B. Russell, *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, vol. 1, 2nd ed., 1925 (1st ed., 1910).
- Quine, W. V. O., 1963: *Set Theory and its Logic*, Harvard University Press, revised ed., 1969 (1st ed., 1963).
- Quine, W. V. O., 1966: *The Ways of Paradox and Other Essays*, Harvard University Press, revised and enlarged ed., 1976 (1st ed., 1966).
- Ramsey, F. P., 1925: "The Foundations of Mathematics", in his *Philosophical Papers* (ed. by D. H. Mellor), Cambridge University Press, 1990, pp.164-224.
- Ramsey, F. P., 1926: "Mathematical Logic", in his *Philosophical Papers* (ed. by D. H. Mellor), Cambridge University Press, 1990, pp.225-244.
- Russell, B., 1919: *Introduction to Mathematical Philosophy*, Routledge, 1993 (1st ed., 1919).
- Russell, B., 1959: *My Philosophical Development*, Routledge, revised ed., 1995 (1st ed., 1959).
- Shapiro, S., 1991: *Foundations without Foundationalism*, Oxford University Press, 1991.
- Wittgenstein, L., 1922: *Tractatus Logico-philosophicus (Logisch-philosophische Abhandlung)*, Routledge & Kegan Paul, 1961.