



Title	非対称的結合子Tをもつ論理系について
Author(s)	大畑, 甚一
Citation	北海道大学人文科学論集, 6, 1-17
Issue Date	1968-07-05
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/34288
Type	departmental bulletin paper
File Information	6_PL1-17.pdf



非対称的結合子 T をもつ論理系について

大 畑 甚 一

この論文で、結合子 (connective) T をもつ T-calculus [von Wright (3)] は、ある定義に関して、2 項様相体系 (dyadic modal system) Md [von Wright (1)] へ後述する意味で重要な変更を加えた体系 PMd に含まれることが示される [§ 4]. この論理的事実のもつ哲学的意味はトリヴィアルかどうか明かでない。簡単に § 5 でふれる。必要な解説的叙述：結合子 T の informal な分析、形式的体系としての T-calculus とそれについてのコメント、Md についてのそれらは、それぞれ、§ 1, § 2, § 3 である。

§ 1 事象 (event) とは、ここでは、命題 'p' の記述する一つの状態から、命題 'q' の記述する一つの状態への変化、簡単に、p から q への変化をいう。従って 'p' と 'q' は時間に相対的に真理値をとる。これを順序対 $\langle p, q \rangle$ であらわす。もちろん、 $\langle p, \sim p \rangle$ も考えられる。

ここでこの表記法を採るのは、いわゆる真理函数的な表記 ' $p \& q$ ', ' $p \rightarrow q$ ', ' $p \& \sim p$ ', ' $p \rightarrow \sim p$ ' …… と区別するためである。p から q への変化は、p と q とのある《関係》である。他方、真理函数記号 '&', ' $\rightarrow$ ' は、ここで考えられている《関係》ではない。真理函数として、' $p \& q$ ' 等上記のものはそれぞれ、' $q \& p$ ', ' $\sim p \vee q$ ', 恒偽, ' $\sim p$ ' に等値であるにすぎない。

$\langle p, q \rangle$ の元 (要素) の間にどんな関係があるかここでは問わないままで、外延的に (in extension) このある《関係》を、順序対 $\langle p, q \rangle$ であらわす。しかし、時間的前後を明瞭にするため、上の表記を pTq に替える。 $\langle p, \sim p \rangle$ …… は $pT\sim p$ …… となる。'T' はその左手の命題の記述する状態から、右手のそれへの変化 (移行) を示す記号である。

さて、'T' の左右に入る命題について、それぞれ《状態記述》(state-descrip-

tion) を考えることにする. 任意の数の命題変項 $p, q, r, \dots$ (議論の宇宙) が与えられたとき, それに関する《状態記述》とは, それぞれの変項について, それら自身かその否定かがただ一度ずつあらわれる連言である. 例えば, $\{p, q, r\}$ に関して, その状態記述は, $p \& q \& r, p \& q \& \sim r, p \& \sim q \& r, p \& \sim q \& \sim r, \dots$ であり, その数は 2^3 である. これらは相互に独立で同時に真とはなりえない. 一般に命題変項の数 n ($n=1, 2, \dots$) に対して, 状態記述は 2^n 個可能であり, 相互に排他的 (mutually exclusive) である. 全く同じことであるが, 変項 $p, q, r, \dots$ より作られる古典2値命題論理の任意の表現には, unique な完全選言標準形が存在し, 《状態記述》は, その選言項である.

《状態記述》を s_1, s_2 とする. $\langle s_1, s_2 \rangle$ すなわち $s_1 T s_2$ を, 単なる $\langle p, q \rangle$ すなわち $p T q$ という状態変化と区別して, von Wright (3) に倣い《歴史》(history) と呼ぶ. この記法の拡張として, $\langle s_1, s_2, s_3, \dots, s_k \rangle$ ($k=1, 2, 3, \dots$ で同じものがあらわれてよい) は $s_1 T (s_2 T (s_3 \dots T s_k)) \dots$ と書く. 右の点線は括弧 ') ' のあらわれを示す.

$s_1 T s_2$ を《長さ》(length) 2 の《歴史》という. $s_1 T (s_2 T s_3)$ は《長さ》3 の《歴史》である. 以下同様. なお, 《状態記述》 $s_1, s_2, \dots$ そのものをそれぞれ《長さ》1 の《歴史》とする. 状態記述, すなわち《歴史》の構成素 (constituents) がつくられる変項の数を n とすれば, その n を《歴史》の《幅》(width) という. 《歴史》について, 命題変項を $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ とすれば, 《長さ》1 の《歴史》(状態記述) の論理的に可能な数は 2^n , すべての可能な《歴史》の数は $(2^n)^m$ である (ただし, $m=1, 2, \dots$ は《歴史》の《長さ》を示す数とする).

' T ' は以上のように, ある《関係》をあらわしている. それは明かに非対称的 (asymmetrical) である. ところで, これは真理関数を連想させるような結合子として, §2 で公理構造により定義される.

§2 von Wright の T-calculus

2.1 用語 (vocabulary)

- 1) 変項 $p, q, r, \dots$
- 2) 真理関数的結合子 $\sim, \&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- 3) 結合子 T
- 4) 括弧 $(,)$

2.1-1 T 表現 (T-expressions)

これらは次のように帰納的に定義される.

- 1) 変項は原子的 T 表現である (atomic T-expression).
- 2) 左右に T 表現をもつ結合子 T から作られる表現も原子的 T 表現である.
- 3) 原子的 T 表現及びそれらの真理関数的複合 (truth-functional compound) も T 表現である. 後者を分子的 T 表現 (molecular T-expression) という.

尚, 括弧の省略のために, 慣例により, 結合子の強さの順を $\sim, \&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, T$ とする.

2.1-2 公理構造 (axiomatic structure)

2.1-2 1 公理

T-A0 古典 2 値命題計算 (PC) の (完全性をもつ) 公理の集合

T-A1 $(p \vee q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$

T-A2 $(p \& q) \leftrightarrow (p \& r \& q \& r)$

T-A3 $p \leftrightarrow (p \& q \vee \sim q)$

T-A4 $\sim(p \& q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

2.1-2 2 推論規則

T-R1 代入則——変項に対する T 表現の代入

T-R2 Modus ponens

T-R3 外延性の規則——等値であることが証明された T 表現は相互に代入可能である.

2.2 《この形式的体系 T-calculus は syntactical に整合的である》。

‘T’ を ‘&’ に置換えれば、PC の中に一つの解釈をもつことは明かであるから。しかし、このメタ定理は、形式的体系についての形式的な結果としては、トリヴィアルなことと思われる。T-calculus の形式的体系としての特色は、‘T’ と ‘&’ とを区別し、通常の古典 2 値命題計算にこの体系固有の公理 T-A1 ~ A4 を加えたことにあるのだから。しかし、このメタ定理のもつ哲学的解釈(意味) もトリヴィアルかどうかここでは問わない。

2.3 任意の T 表現をとり、その変項のすべてのリストを番号づけして $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ とすれば、すでにのべたように、それは T 表現の議論の宇宙を決定し、 2^n 個の状態記述を決定する。すなわち、 $\{s_1, s_2, \dots, s_{2^n}\}$ 。

$s_1, s_2, \dots$ は《歴史》の T-constituents である。これらを利用して T-tautology を次のように定義する： n 個の議論(あるいは表現)の宇宙において《長さ》m のすべての可能な《歴史》の選言を $T_{m,n}$ -tautology という。

例 $\{p\}$ について

$$T_{2,1}\text{-tautology: } (pTp) \vee (pT\sim p) \vee (\sim pTp) \vee (\sim pT\sim p)$$

2.3-1 von Wright はこの形式的体系について、すべての T-tautology はその体系の定理であること (T-calculus の完全性)、この体系が決定手続をもつことを証明した。それは次のメタ定理： T-normal form の存在定理を証明することである。

《任意の T 表現は、その表現の宇宙において、ひとしい長さをもつ歴史の選言に等値である。与えられた任意の T 表現に等値の、歴史の選言を、その T 表現の T 標準形という》。

この定理は重要であるので、その証明のアイディアを概略紹介する。

(i) PC (古典 2 値命題計算) において、任意の PC 表現は、それに等値の完全選言標準形をもつことは周知である。この選言項は連言でできていて、それぞれ、表現の宇宙： $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ に関する《状態記述》《長さ》1 の《歴史》である。従って ‘T’ の左右に PC 表現をもつ T 表現は、‘T’ の左右

をそれぞれ、もとの PC 表現に等値の完全選言標準形に変えることができる。

(ii) この変形された T 表現について、T-A1 により 'T' の左右の選言項 (状態記述) をそれぞれ一つだけ左右にもつ T 表現の選言に変えることができる。つまり、もとの表現は、《長さ》2 の《歴史》の選言にかえることができる。

(iii) 原子的 T 表現と真理函数的結合子からつくられた T 表現は、《歴史》である原子的 T 表現を単位 (ひとまとめ) とする真理函数である。したがってその《歴史》を介して、完全選言標準形に変形される。これを T-A1 により分配すれば、《歴史》のあるいはその否定 (否定記号前置) の連言の選言となる [否定記号前置の《歴史》があれば、その《歴史》以外の別の《歴史》(《長さ》は同じ) のすべての選言を代置して否定記号を消す]。この《歴史》の連言に T-A2 を適用し、左右に状態記述の連言をもつ T 表現にかえる [もし、T-A4 およびこの体系で証明可能な定理: $\sim(p \& \sim pTq)$ により、恒偽の連言が 'T' の左右いずれかに結果すると、その T 表現を除く]。つまり、《歴史》の連言の選言は、同じ《長さ》の《歴史》(ここでは《長さ》2) の選言に変えることができる。

(iv) 同様の手続によって、'T' の左右いずれかにさらに 'T' をふくむ T 表現、あるいはそれらの真理函数的複合には、その必要に応じて《長さ》2 以上の《歴史》の選言に、任意の T 表現を変形しうる。

(v) 以上の手続によってえられる《歴史》の選言——T 標準形——は、もとの T 表現について、《長さ》を一定すれば、ただ一つだけ存在する。

以上、von Wright (3) の T-calculus と、その性格の解説である。なお、多少付言しよう。

2.4 T-calculus 内部で、定理を導出する。その目的は、推移的 (transitive) な《関係》が T-calculus という形式的レベルで表現されるかを確かめるためである。それに必要な定理の証明には、次の諸定理を用いる [T-T4~6 のナンバーは、von Wright (3) で証明されている定理のナンバーである]：

$$T-T4 \quad pTq \rightarrow p$$

$$T-T5 \quad p \& (qTr) \leftrightarrow p \& qTr$$

$$T-T6 \quad (pTq) Tr \leftrightarrow pTq \& r$$

$$2.4-1 \quad (pTq) T (qTr) \leftrightarrow pT (qTr)$$

$$(1) \quad (pTq) Tr \leftrightarrow pTq \& r \quad T-T6$$

$$(2) \quad (pTq) T (qTr) \leftrightarrow pTq \& (qTr) \quad (1), T-R1 (r/qTr)^{1)}$$

$$(3) \quad q \& (qTr) \leftrightarrow qTr \quad T-T5, PC (q \& q \leftrightarrow q)$$

$$(4) \quad (pTq) T (qTr) \leftrightarrow pT (qTr) \quad (2), (3), T-R3$$

$$2.4-2 \quad (pTq) Tr \rightarrow pTr$$

$$(1) \quad pTq \& r \leftrightarrow (pTq) \& (pTq) \quad T-A2, PC (p \leftrightarrow p \& p)$$

$$(2) \quad (pTq) Tr \leftrightarrow pTq \& r \quad T-T6$$

$$(3) \quad (pTq) Tr \rightarrow pTr \quad (1), (2), T-R3, PC$$

$$2.4-3 \quad pT (qTr) \rightarrow (pTq) Tr$$

$$(1) \quad pT (qTr) \rightarrow pTr \quad 2.4-2$$

$$(2) \quad (pTq) T (qTr) \rightarrow (pTq) Tr \quad (1), T-R1 (p/pTq)$$

$$(3) \quad pT (qTr) \rightarrow (pTq) Tr \quad (2), 2.4-1, T-R3$$

$$2.4-4 \quad pT (qTr) \rightarrow pTr$$

$$(1) \quad pT (qTr) \rightarrow pTr \quad 2.4-2, 2.4-3, PC$$

$$2.4-4.1 \quad (pTq) T (qTr) \rightarrow pTr \quad 2.4-1, 2.4-4, T-R3$$

$$2.4-5 \quad (pTq) \& (qTr) \rightarrow pTr$$

$$(1) \quad (pTq) \& (qTr) \leftrightarrow p \& qTq \& r \quad T-A2$$

$$(2) \quad p \& qTq \& r \leftrightarrow (pTr) \& (qTq) \quad T-A2, PC (q \& r \leftrightarrow r \& q)$$

$$(3) \quad (pTq) \& (qTr) \rightarrow pTr \quad (1), (2), T-R3, PC$$

1) 代入則により, (1) について, その 'r' のあらわれすべてに 'qTr' を代入したことが斜線を介して示されている. 以下同様である.

尤も, §3 以下で, 全く別の意味をもつ斜線が, 'Md 表現' の中にあらわれるが, 両者を混同するおそれはない.

2.4-6 $(pTq) \& (qTr) \rightarrow (pTq) Tr$

(1) $(pTq) \& (qTr) \leftrightarrow p \& qTq \& r$ T-A2

(2) $p \& qTq \& r \leftrightarrow q \& (pTq \& r)$ T-T5

(3) $(pTq) \& (qTr) \rightarrow pTq \& r$ (1), (2), PC

(4) $(pTq) \& (qTr) \rightarrow (pTq) Tr$ (3), T-T6, T-R3

事象の時間的前後関係は、状態 p, q, r について、 p が q に、 q が r に先行すると、 p は r に必ず先行する。この関係：状態の時間系列上の推移的な関係は、2.4-4, 2.4-41 によって表現される。§1 の記法に戻ると、 $\langle p, q, r \rangle$ あるいは $\langle \langle p, q \rangle, r \rangle$ である。

ところで T-T6 によって、 $(pTq)Tr$ は $pTq \& r$ だから、前者は時間の2点にのみ言及している。 $\langle p, q, r \rangle$, $\langle \langle p, q \rangle, r \rangle$, $\langle p, \langle q, r \rangle \rangle$ いずれでもない。 $\langle p, q \& r \rangle$ を示す。2.4-2 は、これが pTr を含むことを示すが、2.4-4, 2.4-41 の意味で推移的ではない。2.4-3 は、 $\langle p, q, r \rangle$ ならば、 p は必ず q および r に先行するが、その逆はいえないことを示している。2.4-5, 2.4-6 についても同様である。これらと 2.4-4, 2.4-41 とは混同されてはならない。論理的、無時間的な推移的關係と時間的な推移的關係とを区別しなければならぬ。このことは、この体系が、その区別の形式的表現を欠いているというわけではない。

§3 2項様相 (dyadic modality) とその形式的体系 Md-system [von Wright (1)].

様相 (可能性、必然性) を、単に《 p が可能である》等 monadic に考えず、《 q に関して (q に相対的に) p が可能的である》等のように dyadic に考えることにする。これを表記する記法として $M(p/q)$ を導入する。ここで空白をもつ記号 $M(/)$ そのものは、2つの論理記号でなくただ1つの記号である。 $\sim M(\sim p/q)$ は《 q に関して (q という条件の下で) p でないことは可能でない》、すなわち《 q に関して p は必然的である》を意味する。これを $N(p/q)$

と短縮して書いてもよい。これに倣って、 $M(p/t)$ 、ここで 't' を任意の tautology とすれば、この表現は《tautologous な条件の下で p は可能である》すなわち《絶対的に（無前提的に）p が可能である》と読む。また、 $\sim M(p/t)$ 、 $\sim M(\sim p/t)$ 、……も上に倣って読む。以上、体系 Md の特別な記号 $M(/)$ の informal な解説である。その形式的体系を次に紹介する。

3.1 用語

- 1) 変項 $p, q, r, \dots$
- 2) トートロジー変項 t
- 3) 真理函数的結合子 $\sim, \&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- 4) 様相語 $M(/)$
- 5) 括弧 $(,)$

3.1-1 Md 表現

これらは次のように帰納的に定義される。

- 1) 位数 (oder) n ($1 \leq n$) の Md 表現は、位数 n の原子的 Md 表現、または、原子的 Md 表現の分子的複合である。後者の原子的表現のうち少なくとも一つは位数 n であり、いずれの原子的 Md 表現も n より高い位数のものはないとする。
- 2) 位数 n の原子的 Md 表現は $M(/)$ という形式をもつ表現で、空白部分の一つは位数 $n-1$ の Md 表現により、他の空白部分は位数 $n-1$ かまたはより低い位数の Md 表現によって充されているものである。
- 3) 位数 0 (ゼロ) の Md 表現は、変項 $p, q, r, \dots$ または トートロジー変項 t 、または変項 (あるいは t) の分子的複合である。

上の定義から、位数 1 の原子的 Md 表現は、形式 $M(/)$ の表現であって、空白部分は位数 0 (ゼロ) の Md 表現によって充されている。さらに上の定義から、位数 1 の Md 表現は、位数 1 の原子的 Md 表現か、位数 1 の原子的 Md 表現と (または) 位数 0 の Md 表現とからなる分子的複合かである。

略記号として $N(/)$ を用いる。これは $\sim M(\sim /)$ の短縮形である。

尚、結合子の強さの順は、 $\sim$, $\&$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

3.1-2 公理構造

3.1-21 公理

Md-A1 $M(p/p) \rightarrow \sim M(\sim p/p)$

Md-A2 $M(p/q) \vee M(\sim p/q)$

Md-A3 $M(p \& q/r) \leftrightarrow M(p/r) \& M(q/r \& p)$

Md-A4 $p \rightarrow M(p/t)$

3.1-22 推論規則

Md-R0 古典2値命題計算(PC)の法則——PCの公理または定理につき、その変項に対してMd表現を代入して、Mdの定理をうる.

Md-R1 代入則——Mdの公理または定理につき、その中のある変項に対してあるMd表現を代入して、定理をうる.

Md-R2 Modus ponens

Md-R3 外延性の規則——Mdの公理または定理につき、その中のあるMd表現に対して、それに等値であることが証明されたMd表現を代入して、定理をうる.

3.2 以上が 'full' dyadic modal system Md である. 以下においては、位数1のMd表現を考察することにする.

3.3 Md-system は、確率の理論と、相対的様相論理との類比によりえられたものである. このことは von Wright (1) の所説、とくに彼のかがける初等確率論の公理:

A1 $P(p/p) = 0 \vee P(\sim p/p) = 0$

A2 $P(p/q) + P(\sim p/q) = 1$

A3 $P(p \& q/r) = P(p/r) \times P(q/r \& p)$

と Md-A1~A3 との対比によって明かである. 確率の概念は様相論理の公理によって要求されるような構造的性格をもつ概念と考えられている. つまり

確率論は、相対的可能性の程度の数的測度をもつ様相論理である——様相論理は可能性の程度の計量を導入することで確率の理論に変えられる、と考えられている [von Wright (1), p.118].

3.4 この Md-system の特徴づけとは一応別に次の点が注意される。この体系は様相概念に関する体系として、PC の中にこのままでは解釈をもたないことである。それを試みるとき、とくに Md-A3: M の作用域にある結合子 '&' について、左辺から右辺への単純な分配則を許さないことが重要な意味をもつ。尤も、可能性の概念の働く文を考えれば、このことは当然のことである。

3.5 Md-A3 に注目する。

$$\text{Md-A3 } M(p \& q/r) \leftrightarrow M(p/r) \& M(q/r \& p)$$

これから次の定理が直ぐ出る：

$$3.5-1 \quad M(p \& q/p) \leftrightarrow M(p/p) \& M(q/p) \quad \text{Md-R1 } (r/p), \text{ PC } (p \leftrightarrow p \& p), \\ \text{Md-R3}$$

$$3.5-1.1 \quad M(p \& q/q) \leftrightarrow M(q/q) \& M(p/q) \quad \text{Md-R1 } (p/q, q/p, r/q), \text{ PC}, \\ \text{Md-R3}$$

この定理のいずれか、例えば 3.5-1 を Md-A3 にかえて公理として用いるとする。他の公理その他はそのままにしてえられるこの公理系を Md'-system ということにする。この system はもとの system と異なった性質をもつ。すなわち、次のメタ定理である：

《Md'-system は PC の中に一つの解釈をもつ》

証明 次の定義を Md' に加えることにする。

$$M(p/q) =_{\text{def}} (q \rightarrow p)$$

$$M(\sim p/q) =_{\text{def}} \sim(q \rightarrow p)$$

すると、Md' の各公理はそれぞれ：

$$\text{Md}'\text{-A}'1 \quad (p \rightarrow p) \rightarrow \sim \sim (p \rightarrow p)$$

$$\text{Md}'\text{-A}'2 \quad (q \rightarrow p) \vee \sim (q \rightarrow p)$$

$$\text{Md}'\text{-A}'3 \quad (p \rightarrow p \ \& \ q) \leftrightarrow ((p \rightarrow p) \ \& \ (p \rightarrow q))$$

$$\text{Md}'\text{-A}'4 \quad p \rightarrow (t \rightarrow p)$$

この Md'-A'1~A'4 はいずれも PC の定理 (または公理) である。決定方法は PC に関する真理値表によればよい。

Md' 表現の上の定義により、すべての Md' 表現は PC 表現となるから、Md-R0 (公理以外は Md のままであった!) は、PC の代入則となる。同じ理由で、Md-R1 について、Md' の公理または定理も PC 表現からなり、その変項へ代入される Md' 表現も亦 PC 表現だから、Md-R1 はそのまま PC の代入則である。Md-R2, R3 についても同様である (Q. E. D.).

3.6 さらに Md-A3 について。

$$3.6-1 \quad M(p \ \& \ q/t) \leftrightarrow M(p/t) \ \& \ M(q/p) \qquad \text{Md-A3, Md-R1 (r/t), PC} \\ (t \ \& \ p \leftrightarrow p), \text{ Md-R3}$$

これに対して次の Md 表現:

$$3.6-2^* \quad M(p \ \& \ q/t) \leftrightarrow M(p/t) \ \& \ M(q/t)$$

は、Md においても、Md' においても定理でない。というのは次の理由による:

3.6-2* が Md または Md' において導出可能であるとする。すると Md または Md' の R3 により

$$M(p/t) \ \& \ M(q/p) \leftrightarrow M(p/t) \ \& \ M(q/t)$$

$$M(q/p) \leftrightarrow M(q/t) \qquad \text{PC}$$

これは $p \rightarrow t$ となり一般に不可能である。Md-A3 をみとめる限り、3.6-2* は証明出来ず、Md, Md' の定理ではない。この分配則の不可能性は、様相概念の特徴である。但し結合子 'V' に関しては:

$$\text{Md-T2} \quad M(p \vee q/r) \leftrightarrow M(p/r) \vee M(q/r)$$

また 'N' については:

$$\text{Md-T3} \quad N(p \& q/r) \leftrightarrow N(p/r) \& N(q/r)$$

これらについて R1 により 'r' に 't' を代入したものも亦もちろん定理である.

§4 PC の中に一つの解釈をもつかどうか、重要かどうかは個々の体系について云々されるべきことがらである. Md'-A3 [3.5-1] を含む Md'-system が PC の中に一つの解釈をもつようにする定義の下では [3.5], 3.6-2* も PC の定理となるのである. しかし, PC における解釈の問題とは別に, この Md, Md' によって証明されぬ (Md, Md' から独立した) 3.6-2* を, Md-A3 または Md'-A3 にかえて公理として採用した system——これを PMd-system と呼ぶ——は, 次のメタ定理をもつ:

《T-calculus は PMd 表現によるある定義の下で, PMd-system に含まれる》

まず, PMd-system (Pseudo-Md-system) を略記しておく:

4.1 用語: Md に同じ

4.1-1 PMd 表現: Md 表現に同じ

4.1-2 公理構造

4.1-21 公理

$$\text{PMd-A1} \quad M(p/p) \rightarrow \sim M(\sim p/p)$$

$$\text{PMd-A2} \quad M(p/q) \vee M(\sim p/q)$$

$$\text{PMd-A3} \quad M(p \& q/t) \leftrightarrow M(p/t) \& M(q/t)$$

$$\text{PMd-A4} \quad p \rightarrow M(p/t)$$

4.1-22 推論規則: Md に同じ

尚, 3.2 の特記同様, 位数 1 の PMd 表現を考察する.

さて, 上のメタ定理の証明には,

(1) T-calculus の公理が PMd-system の中で証明されること

(2) T-calculus の推論規則が PMd-system の中で証明されること.

この2条件が満足されればよい.

4.2 (1) については, Md の定理で, Md-A3 から独立に証明される次の諸定理が役立つ [von Wright (1) で証明済みの定理ナンバーを Md-T1 …… で示す]. これらは Md-A3 を用いずに証明されるという意味で, すべて PMd の定理である:

$$(P) \text{ Md-T1 } M(p/p) \leftrightarrow M(p \& r/q) \vee M(p \& \sim r/q)$$

$$(P) \text{ Md-T2 } M(p \vee q/r) \leftrightarrow M(p/r) \vee M(q/r)$$

$$(P) \text{ Md-T15 } M(t/t)$$

$$(P) \text{ Md-T18 } N(t/t)$$

$$(P) \text{ Md-T18* } \sim M(\sim t/t)$$

以上の定理と PC の定理ならびに推論規則 4.1-22 [3.1-22] により, 容易に次の各表現は PMd において証明される:

$$4.2-1 \quad (p \vee q) \& M(r \vee s/t) \leftrightarrow p \& M(r/t) \vee p \& M(s/t) \vee q \& M(r/t) \vee q \& M(s/t)$$

$$4.2-2 \quad (p \& q) \& M(r \& s/t) \leftrightarrow (p \& q) \& M(r/t) \& M(s/t)$$

$$4.2-3 \quad p \leftrightarrow p \& M(t/t)$$

$$4.2-4 \quad \sim(p \& M(\sim t/t))$$

4.2-1 について右辺は 'V' と '&' に関する PC の分配則により

$$(p \vee q) \& (M(r/t) \vee M(s/t))$$

とみれば, PC により

$$M(r \vee s/t) \leftrightarrow M(r/t) \vee M(s/t)$$

が証明されれば十分である. しかしこれは上掲 (P) Md-T2, R1 (p/r, q/s, r/t) により証明される.

4.2-2 について、この証明は (P) Md-A3, R1 (p/r, q/s) と PC によって直ちにえられる。

4.2-3, 4.2-4 についても同様である。

ところで、次の定義をこの PMd に加える：

$$4.2-5^* \quad pTq =_{\text{def}} p \& M(q/t)$$

すると、4.2-1~4.2-4 はそれぞれ T-calculus の公理 T-A1~A4 である。

4.3 (2) [4.1] について、推論規則は、R0, R1 は両体系に対して同じである。R1 についても同様である。定義 4.2-5* の下で、すべての T 表現は PMd 表現である。従って PMd の R1 はすなわち T-R1 である。

T-R3——外延性の規則の証明は次のようになる。

(i) 外延性は M の作用域の外部のいずれの場所においても、PC によって成り立つ。すなわち T-R3 と同じである。

(ii) 外延性が M の作用域の内部で成り立つとき、それが T 表現においても成り立つことを示そう。定義 4.2-5* について：

$$\begin{aligned} t \& pTq &\leftrightarrow p \& M(q/t) & \quad \text{PC (} p \leftrightarrow t \& p \text{), T-R3} \\ p \& (tTq) &\leftrightarrow p \& M(q/t) & \quad \text{PC (} p \& t \leftrightarrow t \& p \text{), T-R3, T-T5 [\S 2]} \end{aligned}$$

これは定義 4.2-5* を：

$$4.3-1^* \quad M(q/t) =_{\text{def}} tTq$$

と定義してよいことを示している。

いま仮りに q と r が等値であることが証明されたとすれば

$$4.3-11^* \quad M(r/t) \leftrightarrow tTr \quad 4.3-1^*, \text{ PMd-R3}$$

4.3-1* の定義を等値記号 $\leftrightarrow$ にあらためたものと、4.3-11* との左辺は、仮定により、PMd-R3 により等値である。従って $tTq \leftrightarrow tTr$ 。これは、仮定 $q \leftrightarrow r$ について、T-R3 が成立つことを示している (Q.E.D.)。

4.4 PMd-system と、もとの Md-system とを具体例につき比較し、それを介して T-calculus の性格づけをする。

$$\text{Md-T23} \quad M(p/t) \& M(q/t) \rightarrow (M(p/q) \leftrightarrow M(q/p))$$

この証明は：

- | | |
|--|--------|
| (1) $M(p \& q/t) \leftrightarrow M(p/t) \& M(q/p)$ | 3.6-1 |
| (2) $M(p \& q/t) \leftrightarrow M(q/t) \& M(p/q)$ | 3.6-2* |
| (3) $M(q/t) \& M(q/p) \leftrightarrow M(q/t) \& M(p/q)$ | Md-R3 |
| (4) $M(p/t) \& M(q/t) \rightarrow (M(p/q) \leftrightarrow M(q/p))$ | PC |

この定理は、compatibility の関係が対称的 (symmetrical) であるための条件を、その左辺でのべていると考えられる [von Wright (1), p. 100].

さて

$$\text{PMd-A3} \quad M(p \& q/t) \leftrightarrow M(p/t) \& M(q/t)$$

これと上掲証明の第 (1)~(3) 行から：この2つの体系は $p \leftrightarrow t$ においてのみ同一である。すなわち、 $M(/)$ 形式の表現において、右側の空白部分には 't' だけが入るということである。このことは内容的にいて、相対的可能性——様相——の立場を棄てることである。2項様相は、仮りの2項様相で、実質は monadic になった。

さらに、既述 [3.6] したように、PMd-A3 をみとめることは、直観的にも様相の意味を失うことである。

4.5 PMd と T-calculus とについて、4.1~4.3 で、前者が定義 4.2-5* の下で後者を含むことを証明した。Clifford (1), Åqvist (1) では、それぞれがった関心の下で、T-calculus が別のある様相体系に含まれることを示した。彼らはさらにその体系と T-calculus が等値であることも示した。ところで、T-calculus が、逆に PMd を含むかどうかである。詳しくは、定義 4.3-1* の下で、PMd の公理ならびに推論規則が証明されるかということである。しか

し、この定義の下では、PMd-A3, A4 の T 表現への反訳 (対応) は可能であ
れ、A1, A2 についてはその手立てがない。PMd の dyadic な表現: $M(q/p)$
という表現の T 表現への対応 (反訳)——逆ではない!——が必要であるが、
これを見出すことは出来なかった。このことは T-calculus が、von Wright
(1) の意味で、dyadic な体系ではないこと、それと本質的に異なった monadic
な体系であること、なのであろう。

§5 PMd は Md によって証明出来ない公理を含むという意味で、Md と
異なる体系であった。この PMd に T-calculus が含まれることが示された。
この理由に関する限りで、T-calculus は Md の観点からする様相論理と異な
るといえる。一般に、相違や関連は、どの観点に関して異なり、あるいは関
連するかをいうべきだとすれば、否定的 (消極的) であれ、その相違が多少と
も明瞭になったと思われる。T-calculus の積極的な性格づけは、4.5 で指摘
した人々の試みのように、相違よりも、全く別の体系との等値を示すことで
果されるであろう。

しかし、そのような試みとは別に、次のことが指摘できるように思う。記
号 'T' は、modal operator でもなく、また、通常の真理関数的結合子でもな
い [§1]。だが、結合子的性格を備えている。このことを決定的にしているの
は、T-calculus が、PC の完全選言標準形のテクニックを基礎として、決定
手続きをもっていることである [2.3-1]。このことから T-calculus——内容
として事象変化を記述する論理——を可能性や必然性など様相概念から独立
なものと考えてよい。また、上に示されたように、様相の意味を失った擬似
様相論理系 PMd に T-calculus が含まれることは、別の角度から、同じこと
がらを表わしているものと思われる (1968. 1)

References

- Åqvist, L., (1) 《“Next” and “Ought”. Alternative foundations for von Wright’s tense-logic, with an application to deontic logic》 *Logique et Analyse*, Vol. 34, 1966.
- Clifford, J. (1) 《Tense logic and the logic of change》 *op. cit.*
- Hintikka, J. (1) 《The modes of modality》 *Acta Philosophica Fennica*, fasc. 16, 1963.
- Kripke, S. A. (1) 《A completeness theorem in modal logic》 *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 24, 1959.
- von Wright, G. H. (1) 《A new system of modal logic》 developed version of 1953, contained in “*Logical Studies*”, London, 1957.
- (2) *Norm and Action*, London, 1963.
- (3) 《“And next”》 *Acta Philosophica Fennica*, fasc. 18, 1965.