



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Einphasiger Kurzschluss der Synchronmaschine als ein Beispiel der Integration einer Differentialgleichung, deren Koeffizienten periodische Funktionen enthalten und einen kleinen Parameter besitzen
Author(s)	Ikeda, Yoshiro; Mori, Motokichi
Citation	北海道帝國大學理學部紀要, 1(1), 1-56
Issue Date	1930-09-27
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/34436
Type	departmental bulletin paper
File Information	1_P1-56.pdf





EINPHASIGER KURZSCHLUSS DER SYNCHRON-
MASCHINE ALS EIN BEISPIEL DER INTEGRATION
EINER DIFFERENTIALGLEICHUNG, DEREN
KOEFFIZIENTEN PERIODISCHE FUNK-
TIONEN ENTHALTEN UND EINEN
KLEINEN PARAMETER
BESITZEN

Von

Yoshiro IKEDA und Motokichi MORI

Mit Tafel I-X.

(Eingegangen am 3. Juli 1930.)

Der einphasige Kurzschluss-Strom der Synchronmaschine genügt, wenn die magnetische Sättigung vernachlässigt werden kann, einer Differentialgleichung, deren Koeffizienten periodische Funktionen enthalten. Da die Widerstände der Feld- und der Ankerwicklung bei Kurzschluss sehr klein sind, haben wir also die Widerstände als die kleinen Parameter zu betrachten. Diese glücklichen Umstände bieten die Möglichkeit, den Strom mit hinreichender Genauigkeit zu berechnen.

Wenn man nur die erste Ordnung der kleinen Parameter berücksichtigt, so erhält man eine einfache Formel, welche mit dem Oszillogramm genau übereinstimmt. Darüber wird an anderer Stelle veröffentlicht werden, aber wenn die Widerstände grösser sind, wird die Brauchbarkeit der Formel aufgehoben und eine weitere Annäherung wird benötigt. In der vorliegenden Abhandlung soll gezeigt werden, wie die weitere Annäherung durchgeführt, und durch die trigonometrischen Polynome abgeschätzt werden kann.

I. KURZSCHLUSS-STRÖME

Es handelt sich nun um die Gleichungen

$$(1) \quad \frac{d}{dt}(L_1 i_1) + \frac{d}{dt}(M i_2) + R_1 i_1 = R_1 I,$$

$$(2) \quad \frac{d}{dt}(L_2 i_2) + \frac{d}{dt}(M i_1) + R_2 i_2 = 0,$$

wobei i_1, i_2 , die Ströme L_1, L_2 , die I der Feld- und der Ankerwickelungen der Erregerstrom ist.

R_1, R_2 die Widerstände
selbstinduktivität und I

Schreiben wir

$$\frac{d}{dt}(L_1 i_1) + \frac{R_1}{L_1}(L_1 i_1) = E_1 - \frac{d}{dt}(M i_2),$$

$$\frac{d}{dt}(L_2 i_2) + \frac{R_2}{L_1}(L_2 i_2) = -\frac{d}{dt}(M i_1),$$

so haben wir die Gleichungen als lineare Differentialgleichungen erster Ordnung zu betrachten. Zunächst wird vorausgesetzt, dass L_1, L_2 und M die periodische Funktionen sind.

Nach der bekannten Formel der linearen Differentialgleichung erster Ordnung haben wir

$$\begin{aligned} L_1 i_1 &= e^{-\int_0^t \frac{R_1}{L_1} dt} \int_0^t \left\{ R_1 I - \frac{d}{dt}(M i_2) \right\} e^{\int_0^t \frac{R_1}{L_1} dt} dt + A_1 e^{-\int_0^t \frac{R_1}{L_1} dt} \\ &= \left\{ A_1 + M(0) i_2(0) \right\} e^{-\int_0^t \frac{R_1}{L_1} dt} + \int_0^t e^{-\int_\tau^t \frac{R_1}{L_1} dt} R_1 I d\tau \\ &\quad - M(t) i_2 + \int_0^t \frac{M(\tau) R_1}{L_1(\tau)} e^{-\int_\tau^t \frac{R_1}{L_1} dt} i_2 d\tau. \end{aligned}$$

Setzt man

$$A_1 + M(0)i_2(0) = B_1,$$

so wird

$$(3) \quad L_1 \dot{i}_1 + M \dot{i}_2 = B_1 e^{-\int_0^t \frac{R_1}{L_1} dt} + \int_0^t e^{-\int_\tau^t \frac{R_1}{L_1} dt} R_1 I d\tau \\ + \int_0^t \frac{R_1 M(\tau)}{L_1(\tau)} e^{-\int_\tau^t \frac{R_1}{L_1} dt} d\tau$$

In analoger Weise :

$$(4) \quad L_2 \dot{i}_2 + M \dot{i}_1 = B_2 e^{-\int_0^t \frac{R_2}{L_2} dt} + \int_0^t e^{-\int_\tau^t \frac{R_2}{L_2} dt} \frac{M(\tau) R_2}{L_2} i_1(\tau) d\tau.$$

Aus beiden Gleichungen eliminieren wir i_2 , so erhalten wir

$$(5) \quad i_2 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \right) L_1 = B_1 e^{-\int_0^t \frac{R_1}{L_1} dt} - B_2 \frac{M}{L_2} e^{-\int_0^t \frac{R_2}{L_2} dt} \\ + B_2 \int_0^t \frac{M(\tau) R_1}{L_2(\tau) L_1(\tau)} e^{-\int_\tau^t \frac{R_1}{L_1} dt - \int_0^\tau \frac{R_2}{L_2} dt} d\tau + \int_0^t e^{-\int_\tau^t \frac{R_1}{L_1} dt} R_1 I d\tau \\ - \int_0^t \frac{M^2(\tau) R_1}{L_1 L_2} e^{-\int_\tau^t \frac{R_1}{L_1} dt} i_1 d\tau - \int_0^t \frac{M(t) M(\tau) R_2}{L_1(\tau) L_2(\tau)} e^{-\int_\tau^t \frac{R_2}{L_2} dt} i_1 d\tau \\ + \int_0^t \frac{M(\tau) R_1}{L_1(\tau) L_2(\tau)} e^{-\int_\tau^t \frac{R_1}{L_1} dt} d\tau \int_0^\tau \frac{M(\tau') R_2}{L_2(\tau')} e^{-\int_{\tau'}^\tau \frac{R_2}{L_2} dt} i_1(\tau') d\tau'.$$

Nach der Dirichletschen Formel wird das letzte Glied

$$\begin{aligned} & \int_0^t \frac{M(\tau') R_2}{L_2(\tau')} i_1(\tau') d\tau' \int_{\tau'}^t \frac{M(\tau) R_1}{L_1 L_2} e^{-\int_{\tau'}^t \frac{R_1}{L_1} dt - \int_{\tau'}^{\tau} \frac{R_2}{L_2} dt} d\tau \\ &= \int_0^t \frac{M(\tau) R_2}{L_1 L_2} i_1(\tau) d\tau \int_0^{\tau} \frac{M(\tau') R_2}{L_2(\tau')} i_1(\tau') e^{-\int_{\tau'}^t \frac{R_1}{L_1} dt - \int_{\tau'}^{\tau} \frac{R_2}{L_2} dt} d\tau'. \end{aligned}$$

Durch die Substitution

$$\begin{aligned} (6) \quad K_1(t, \tau) &= \frac{1}{L_1 \left\{ 1 - \frac{M^2(t)}{L_1(t) L_2(t)} \right\}} \left[-\frac{M^2(\tau)}{L_1(\tau) L_2(\tau)} e^{-\int_{\tau}^t \frac{R_1}{L_1} dt} \right. \\ &\quad \left. - \frac{M(t) M(\tau)}{L_2(t) L_2(\tau)} R_2 e^{-\int_{\tau}^t \frac{R_2}{L_2} dt} \right. \\ &\quad \left. + \frac{M(\tau) R_2}{L_2(\tau)} \int_{\tau}^t \frac{M(\tau') R_1}{L_1(\tau') L_2(\tau')} e^{-\int_{\tau'}^t \frac{R_1}{L_1} dt - \int_{\tau}^{\tau'} \frac{R_2}{L_2} dt} d\tau' \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (7) \quad (i_1)_0 &= \frac{1}{L_1(t) \left\{ 1 - \frac{M^2(t)}{L_1(t) L_2(t)} \right\}} \left[B_1 e^{-\int_0^t \frac{R_1}{L_1} dt} - B_2 \frac{M(t)}{L_2} e^{-\int_0^t \frac{R_2}{L_2} dt} \right. \\ &\quad \left. + B_2 \int_0^t \frac{M(\tau) R_1}{L_2(\tau) L_1(\tau)} e^{-\int_{\tau}^t \frac{R_1}{L_1} dt - \int_0^{\tau} \frac{R_2}{L_2} dt} d\tau + \int_0^t e^{-\int_{\tau}^t \frac{R_1}{L_1} dt} R_1 I d\tau \right], \end{aligned}$$

ergibt sich aus (5)

$$(8) \quad i_1 = (i_1)_0 + \int_0^t K(t, \tau) i_1(\tau) d\tau.$$

Dies ist die Volterrasche Integralgleichung. Wir können immer eine endliche Zahl N finden, dass sie der Ungleichung

$$|K(t, \tau)| < N$$

genügt.

Setzt man

$$(9) \quad \begin{cases} (i_1)_0 = (i_1)_0 \\ (i_1)_1 = \int_0^t K(t, \tau) (i_1)_0 d\tau \\ (i_1)_2 = \int_0^t K(t, \tau) (i_1)_1 d\tau \\ \dots\dots\dots \\ (i_1)_n = \int_0^t K(t, \tau) (i_1)_{n-1} d\tau, \end{cases}$$

so folgt nach der bekannten Theorie der Integralgleichung, dass die Folge

$$(10) \quad i_1 = (i_1)_0 + (i_1)_1 + (i_1)_2 + \dots\dots\dots + (i_1)_n$$

unbedingt und gleichmässig konvergiert.

Schreiben wir nun :

$$(11) \quad R_1 = \epsilon r_1 L_1, \quad R_2 = \epsilon r_2 L_2$$

so können wir die Grösse ϵ als kleines Parameter der ersten Ordnung betrachten. Weil der Kern mindestens die erste Ordnung des Widerstandes enthält, so kann man aus (6), (7) und (9) die k -te Approximation $(i_1)_k$ in der Form

$$(12) \quad (i_1)_k = \epsilon^k (\phi_1(t) + \epsilon \phi_2(t) + \dots\dots\dots)$$

schreiben, wenn man die Funktion $(i_1)_0$ und $K_1(t, \tau)$ nach der Potenz des kleinen Parameters ϵ fortschreiten lässt.

Folglich wird der Strom

$$(13) \quad i_1 = f_0(t) + \epsilon f_1(t) + \epsilon^2 f_2(t) + \dots$$

Wenn ϵ hinreichend klein ist, so stellen die ersten Glieder den Strom mit hinreichender Genauigkeit dar.

Für die Synchronmaschine ist die Wechselinduktivität

$$M = M_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Obwohl wir die Induktivitäten L_1 und L_2 als gewisse periodische Funktionen zu betrachten haben, setzen wir voraus, dass sie Konstanten sind, denn unter dieser Voraussetzung sind wir zu dem Resultat gelangt, das mit dem Oszillogramm genau übereinstimmt.

Durch die Substitutionen

$$\omega t + \varphi = \theta$$

$$(14) \quad m = \frac{M_0^2}{L_1 L_2},$$

$$(15) \quad \alpha = \frac{R_1}{\omega L_1}, \quad \beta = \frac{R_2}{\omega L_2}$$

geht das System der Gleichungen (6) und (7) über in

$$(16) \quad (i_1)_0 = \frac{1}{1 - m \cos^2 \theta} \left\{ \frac{B_1}{L_1} e^{-\alpha \theta} + I(1 - e^{-\alpha \theta}) - m \frac{B_2}{M_0} \cos \theta e^{-\beta \theta} \right. \\ \left. + am \frac{B_2}{M_0} \frac{\{(a - \beta) \cos \theta + \sin \theta\} e^{-\beta \theta} - (a - \beta) e^{-\alpha \theta}}{(a - \beta)^2 + 1} \right\}$$

$$(17) \quad K(\theta, \theta_1) = \frac{-1}{1 - m \cos^2 \theta_1} \left[\alpha m \cos^2 \theta_1 e^{-\alpha(\theta - \theta_1)} + \beta m \cos \theta \cos \theta_1 \right. \\ \left. - \frac{\alpha \beta m \cos \theta_1}{1 + (\alpha - \beta)^2} \left\{ (\alpha - \beta) \cos \theta + \sin \theta \right\} e^{-\beta(\theta - \theta_1)} \right. \\ \left. - \left\{ (\alpha - \beta) \cos \theta_1 + \sin \theta_1 \right\} e^{-\alpha(\theta - \theta_1)} \right].$$

Um das Prinzip der Berechnung anschaulich zeigen, wollen wir kurz beschreiben, wie wir die Lösung htingung nur der ersten Ordnung des kleinen Parameter n.

Aus (16) und (17),

$$(18) \quad (1 - m \cos^2 \theta)(i_1)_0 = \frac{B_1}{L_1} (1 - a\theta) - \frac{B_2}{M_0} m \cos \theta + \frac{B_2}{M_0} m \alpha \sin \theta + I_a \theta,$$

$$(19) \quad K(\theta, \theta_1) = -m \frac{\alpha \cos^2 \theta_1 + \beta \cos \theta \cos \theta_1}{1 - m \cos^2 \theta_1},$$

$$(1 - m \cos^2 \theta)(i_1)_1 = \int_0^\theta K(\theta, \theta_1)(i_1)_0 d\theta \\ = -m \int_0^\theta \frac{(\alpha \cos^2 \theta_1 + \beta \cos \theta \cos \theta_1)}{1 - m \cos^2 \theta_1} \left(\frac{B_1}{L_1} - \frac{B_2}{M_2} m \cos \theta_1 \right) d\theta_1.$$

Daraus

$$(20) \quad i_1(1 - m \cos^2 \theta) = \frac{B_1}{L_1} \left\{ 1 - \frac{a\theta}{\sqrt{1-m}} - \frac{\alpha}{\sqrt{1-m}} \right. \\ \left[\tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}} \tan \frac{\theta}{2} \right) + \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}} \tan \frac{\theta}{2} \right) - \theta \right] \\ \left. - \frac{m\beta}{\sqrt{1-m}} \left[\tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}} \tan \frac{\theta}{2} \right) \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}}\tan\frac{\theta}{2}\right)\cos\theta\Big\} \\
& -\frac{B_2}{M_0}m\left\{\cos\theta-\frac{\beta\theta\cos\theta}{\sqrt{1-m}}-\frac{\beta\cos\theta}{\sqrt{1-m}}\right. \\
& \quad \left[\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}}\tan\frac{\theta}{2}\right)+\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}}\tan\frac{\theta}{2}\right)-\theta\right] \\
& \quad -\frac{a}{\sqrt{1-m}}\cdot\frac{1}{\sqrt{m}}\left[\tan^{-1}\frac{\theta}{2}\right) \\
& \quad \left.-\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}}\tan\frac{\theta}{2}\right)\right]\Big\}+Ia\theta.
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung, deren Koeffizienten periodische Funktionen enthalten, ist bekannt und wird in der folgenden Form dargestellt:

$$(21) \quad i_1 = e^{-\delta\theta} \mathfrak{P}_1 + e^{-\gamma\theta} \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_0,$$

wobei $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_0$ die periodischen Funktionen von θ sind, und sie werden durch die Fouriersche Reihe entwickelt. δ , γ , $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_0$ werden als Funktionen von ϵ betrachtet. Also

$$\delta = \delta_0 + \delta_1 \epsilon + \delta_2 \epsilon^2 + \dots,$$

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 \epsilon + \gamma_2 \epsilon^2 + \dots,$$

$$\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}_{00} + \mathfrak{P}_{01} \epsilon + \mathfrak{P}_{02} \epsilon^2 + \dots,$$

$$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_{10} + \mathfrak{P}_{11} \epsilon + \mathfrak{P}_{12} \epsilon^2 + \dots,$$

$$\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}_{20} + \mathfrak{P}_{21} \epsilon + \mathfrak{P}_{22} \epsilon^2 + \dots$$

Wenn man $\epsilon=0$ setzt, so ist die Lösung eine rein periodische Funktion von θ . Folglich

$$\delta_0=0, \quad \gamma_0=0.$$

Wenn man die Lösung nach der Potenz des Parameters fortschreiten lässt, so erhält man

$$i_1 = \mathfrak{P}_{10} + \epsilon \{ \mathfrak{P}_{11} + \delta_1 \mathfrak{P}_{10} \} + \mathfrak{P}_{20} + \epsilon \{ \mathfrak{P}_{21} + \gamma \mathfrak{P}_{20} \} + \mathfrak{P}_{00} + \mathfrak{P}_{01} \epsilon.$$

Vergleichen wir (20) mit (21), so e:

$$\mathfrak{P}_{10} = \left(\frac{B_1}{L_1} - I \sqrt{1-m} \right) \frac{1}{1-m \cos^2 \theta},$$

$$\mathfrak{P}_{00} = I \sqrt{1-m} \cdot \frac{1}{1-m \cos^2 \theta},$$

$$\mathfrak{P}_{20} = - \frac{B_2 m \cos \theta}{M_0 (1-m \cos^2 \theta)},$$

$$\epsilon \delta_1 = - \frac{\alpha}{\sqrt{1-m}}, \quad \epsilon \gamma_1 = - \frac{\beta}{\sqrt{1-m}},$$

$$\begin{aligned} \epsilon \mathfrak{P}_{11} = & \left\{ - \frac{\alpha}{\sqrt{1-m}} \left[\tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}} \tan \frac{\theta}{2} \right) \right. \right. \\ & + \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}} \tan \frac{\theta}{2} \right) - \theta \Big] \\ & - \frac{m \beta \cos \theta}{\sqrt{1-m} \sqrt{m}} \left[\tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}} \tan \frac{\theta}{2} \right) \right. \\ & \left. \left. - \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}} \tan \frac{\theta}{2} \right) \right] \right\} \mathfrak{P}_{10}, \end{aligned}$$

$$\epsilon \mathfrak{P}_{21} = \left\{ -\frac{\beta}{\sqrt{1-m}} \cos \theta \left[\tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}} \tan \frac{\theta}{2} \right) \right] \right. \\ \left. - \frac{\alpha}{\sqrt{1-m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{m}} \left[\tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}} \tan \frac{\theta}{2} \right) \right] \right\} \mathfrak{P}_{20}.$$

In der Tat sind $\mathfrak{P}_{10}$, $\mathfrak{P}_{00}$, $\mathfrak{P}_{20}$, $\mathfrak{P}_{11}$ und $\mathfrak{P}_{21}$ periodische Funktionen, und sie können durch die Fouriersche Reihe entwickelt werden. Setzen wir zur Abkürzung

$$(22) \quad \frac{\alpha}{\sqrt{1-m}} = \mu, \quad \frac{\beta}{\sqrt{1-m}} =$$

$$(23) \quad \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}} \tan \frac{\theta}{2} \right) = \lambda_1,$$

$$(24) \quad \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}} \tan \frac{\theta}{2} \right) = \lambda_2,$$

so folgt daraus

$$(25) \quad i_1 = \frac{\left(\frac{B_1}{L_1} - I\sqrt{1-m} \right) e^{-\mu_0}}{1-m \cos^2 \theta} \left\{ 1 - \mu[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] - \nu \cos \theta m \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} \right\} \\ - \frac{B_2 m e^{-\nu_0}}{M_0} \left\{ \cos \theta - \nu[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] \cos \theta - \mu \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} \right\} \\ + \frac{I\sqrt{1-m}}{1-m \cos^2 \theta} \left\{ 1 - \mu[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] - \nu \cos \theta m \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} \right\}.$$

Wenn man aus (3) und (4) i_1 eliminiert, so wird in analoger Weise

$$(26) \quad \frac{L_2}{M_0} i_2 = - \frac{\left(\frac{B_1}{L_1} - I\sqrt{1-m} \right) e^{-\mu_0}}{1-m \cos^2 \theta} \times$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \cos\theta - \mu \cos\theta [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] - \nu \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} \right\} \\
& + \frac{B_2}{M_0} \left\{ 1 - \nu [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] - \mu \cos\theta m \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} \right\} \\
& - \frac{I_1 \sqrt{1-m}}{1-m \cos^2\theta} \left\{ \cos\theta - \mu \cos\theta [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] - \nu \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} \right\}.
\end{aligned}$$

Wenn die Widerstände grösser werden und die höheren Ordnungen von ϵ nicht vernachlässigt werden können, so wird das entstehende Resultat nicht mehr brauchbar. Also ist eine weitere Annäherung gesucht. In der Tat sind wenn die Widerstände grösser werden, die grössten Ströme desto kleiner.

Daher wollen wir die Formeln (16) und (17) bis zur zweiten Ordnung des kleinen Parameter berücksichtigen.

$$\begin{aligned}
(27) \quad (i_1)_0 &= \frac{B_1}{L_1} \left(1 - a\theta + a^2 \frac{\theta^2}{2} \right) - \frac{B_2}{M_0} m \left(1 - \beta\theta - \beta^2 \frac{\theta^2}{2} \right) \cos\theta \\
& + \frac{B_2}{M_0} m a \left\{ \cos\theta \cdot (\alpha - \beta) - (\alpha - \beta) + \sin\theta - \beta \cdot \theta \cdot \sin\theta \right\} \\
& + I \left(a\theta - a^2 \frac{\theta^2}{2} \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(28) \quad \int_0^{\theta} K(t, \tau) (i_1)_0 d\tau &= -m \int_0^{\theta} \frac{(a \cos^2\theta_1 + \beta \cos\theta \cos\theta_1)}{1 - m \cos^2\theta} \\
& \times \left(\frac{B_1}{L_1} - \frac{B_1}{M_0} m \cos\theta_1 \right) d\theta_1 - m \int_0^{\theta} \frac{(a \cos^2\theta_1 + \beta \cos\theta \cos\theta_1)}{1 - m \cos^2\theta_1} \times \\
& \left(-a\theta_1 \frac{B_1}{L_1} + \beta\theta_1 \frac{B_2}{M_0} m \cos\theta_1 + \frac{B_2}{M_0} m a \sin\theta_1 \right) d\theta_1 \\
& + m \int_0^{\theta} \frac{\cos^2\theta_1 a^2 (\theta - \theta_1) + \beta^2 (\theta - \theta_1) \cos\theta \cos\theta_1}{1 - m \cos^2\theta_1} \left(\frac{B_1}{L_1} - \frac{B_2}{M_0} m \cos\theta_1 \right) d\theta_1,
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -m \int_0^\theta \frac{\alpha^2 \cos^2 \theta_1 + \beta \cos \theta \cos \theta_1}{1 - m \cos^2 \theta_1} I \alpha \theta_1 d\theta_1 \\
& + \alpha \beta m \int_0^\theta \frac{\cos \theta_1 \left(\frac{B_1}{L_1} - \frac{B_2}{M_0} m \cos \theta_1 \right)}{1 - m \cos^2 \theta_1} (\sin \theta - \sin \theta_1) d\theta_1, \\
(29) \quad & \int_0^\theta K(t, \tau) (i_1)_1 d\tau = -m \int_0^\theta \frac{\alpha \cos^2 \theta_1 + \beta}{1 - m \cos^2 \theta_1} \frac{\cos \theta_1}{L_1} d\theta_1 \times \\
& \int_0^\theta \frac{(-m)(\alpha \cos^2 \theta_2 + \beta \cos \theta_1)}{1 - m \cos^2 \theta_2} \frac{m \cos \theta_2}{M_0} d\theta_2.
\end{aligned}$$

Wir nennen die sechs Integralen $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \mathfrak{I}_3, \mathfrak{I}_4, \mathfrak{I}_5$ und $\mathfrak{I}_6$.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_1 &= \int_0^\theta \frac{\alpha(1 - m \cos^2 \theta_1) - \alpha - m \beta \cos \theta \cos \theta_1}{1 - m \cos^2 \theta_1} \left(\frac{B_1}{L_1} - \frac{B_2}{M_0} m \cos \theta_1 \right) d\theta_1 \\
&= \alpha \int_0^\theta \left(\frac{B_1}{L_1} - \frac{B_2}{M_0} m \cos \theta_1 \right) d\theta_1 \\
&\quad - \int_0^\theta \frac{(\alpha + m \beta \cos \theta \cos \theta_1) \left(\frac{B_1}{L_1} - \frac{B_2}{M_0} m \cos \theta_1 \right)}{1 - m \cos^2 \theta_1} d\theta_1 \\
&= \alpha \left(\frac{B_1}{L_1} \theta - \frac{B_2}{M_0} m \sin \theta \right) \\
&\quad - \left(\alpha \frac{B_1}{L_1} - m \beta \frac{B_2}{M_0} \cos \theta \right) \frac{[\lambda_1 + \lambda_2]}{\sqrt{1 - m}} \\
&\quad + \left(\alpha \frac{B_2}{M_0} m - \frac{B_1}{L_1} m \beta \cos \theta \right) \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m} \sqrt{1 - m}} \\
&\quad - m \beta \frac{B_2}{M_0} \cos \theta \cdot \theta.
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_1 = & \left(\alpha \frac{B_1}{L_1} - m \beta \cos \theta \frac{B_2}{M_0} \right) \theta - \frac{\alpha B_2}{M_0} m \sin \theta \\ & - \left(\alpha \frac{B_1}{L_1} - m \beta \cos \theta \frac{B_2}{M_0} \right) \frac{\theta}{\sqrt{1-m}} \\ & - \left(\alpha \frac{B_1}{L_1} - m \beta \cos \theta \frac{B_2}{M_0} \right) \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{\sqrt{1-m}} \\ & + \left(\alpha \frac{B_2}{M_0} m - \frac{B_1}{L_1} m \beta \cos \theta \right) \end{aligned}$$

Das zweite Integral wird durch einen Teil des sechsten Integrals vernichtet.

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_3 = & -\theta \left[-m \int_0^\theta \frac{\cos^2 \theta_1 \alpha^2 + \beta^2 \cos \theta \cos \theta_1}{1 - m \cos^2 \theta_1} \left(\frac{B_1}{L_1} - \frac{B_2}{M_0} m \cos \theta_1 \right) d\theta_1 \right. \\ & \left. - m \int_0^\theta \frac{\cos^2 \theta_1 \alpha^2 + \beta^2 \cos \theta \cos \theta_1}{1 - m \cos^2 \theta_1} \left(\frac{B_1}{L_1} - \frac{B_2}{M_0} m \cos \theta_1 \right) \theta_1 d\theta_1 \right].\end{aligned}$$

Wenn man α^2 anstatt α , β^2 anstatt β setzt, so wird der ersten Teil dieses Integrals ohne weiteres berechnet, während der letzte Teil durch partielle Integration berechnet wird.

$$\begin{aligned}= & -\theta \left[\left(\alpha^2 \frac{B_1}{L_1} - m \beta^2 \cos \theta \frac{B_2}{M_0} \right) \theta - \frac{\alpha^2 B_2}{M_0} m \sin \theta \right. \\ & - \left(\alpha^2 \frac{B_1}{L_1} - m \beta^2 \cos \theta \frac{B_2}{M_0} \right) \frac{\theta}{\sqrt{1-m}} \\ & \left. - \left(\alpha^2 \frac{B_1}{L_1} - m \beta^2 \cos \theta \frac{B_2}{M_0} \right) \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{\sqrt{1-m}} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\alpha^2 \frac{B_2}{M_0} m - \frac{B_1}{L_1} m \beta^2 \cos \theta \right) \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m} \sqrt{1-m}} \Big] \\
& + \theta \left[\alpha^2 \frac{B_1}{L_1} - m \beta^2 \cos \theta \cdot \frac{B_2}{M_0} \right] \theta - \frac{\alpha^2 B_2}{M_0} m \sin \theta \\
& - \left(\alpha^2 \frac{B_1}{L_1} - m \beta^2 \cos \theta \frac{B_2}{M_0} \right) \frac{\theta}{\sqrt{1-m}} \\
& - \left(\alpha^2 \frac{B_1}{L_1} - m \beta^2 \cos \theta \frac{B_2}{M_0} \right) \\
& - \int \left[\left(\alpha^2 \frac{B_1}{L_1} - m \beta^2 \cos \theta \frac{B_2}{M_0} \right) \theta_1 - \frac{\alpha^2 B_2}{M_0} m \sin \theta_1 \right. \\
& \quad - \left(\alpha^2 \frac{B_1}{L_1} - m \beta^2 \cos \theta \frac{B_2}{M_0} \right) \frac{\theta_1}{\sqrt{1-m}} \\
& \quad - \left(\alpha^2 \frac{B_1}{L_1} - m \beta^2 \cos \theta \frac{B_2}{M_0} \right) \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{\sqrt{1-m}} \\
& \quad \left. + \left(\alpha^2 \frac{B_2}{M_0} m - \frac{B_1}{L_1} m \beta^2 \cos \theta \right) \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m} \sqrt{1-m}} \right] d\theta_1 \\
& = - \left(\alpha^2 \frac{B_1}{L_1} - m \beta^2 \cos \theta \frac{B_2}{M_0} \right) \frac{\theta^2}{2} - \frac{\alpha^2 B_2}{M_0} m \cos \theta + \frac{\alpha^2 B_2}{M_0} m \\
& \quad + \left(\alpha^2 \frac{B_1}{L_1} - m \beta^2 \cos \theta \frac{B_2}{M_0} \right) \frac{\theta_1}{2\sqrt{1-m}} \\
& \quad + \left(\alpha^2 \frac{B_1}{L_1} - m \beta^2 \cos \theta \frac{B_2}{M_0} \right) \frac{1}{\sqrt{1-m}} \int_0^\theta [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta_1] d\theta_1 \\
& \quad - \left(\alpha^2 \frac{B_2}{M_0} m - \frac{B_1}{L_1} m \beta^2 \cos \theta \right) \frac{1}{\sqrt{1-m}} \int_0^\theta \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} d\theta_1 .
\end{aligned}$$

Führen wir nun die Substitution in $\mathfrak{S}_3$,

$$\frac{B_1}{L_1} = I, \quad B_2 = 0, \quad \beta^2 = \alpha\beta$$

ein, so ergibt sich das vierte Integral.

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_4 &= \theta \left[\alpha^2 \theta - \alpha^2 \frac{\theta}{\sqrt{1-m}} - \alpha^2 \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{\sqrt{1-m}} \right. \\ &\quad \left. - m\alpha\beta \cos\theta \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{1-m} \sqrt{m}} \right] - \frac{\theta I}{\sqrt{1-m}} \\ &\quad + \alpha^2 I \int_0^\theta \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{\sqrt{1-m}} d\theta + m\beta\alpha \cos\theta \cdot I \int_0^\theta \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{1-m} \sqrt{m}} d\theta_1 \\ &= \frac{\alpha^2 \theta^2}{2} I - \frac{\alpha^2 \theta^2}{2} \frac{I}{\sqrt{1-m}} - \frac{\alpha^2 I \theta}{\sqrt{1-m}} [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] \\ &\quad - m\alpha\beta \cos\theta I \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m} \sqrt{1-m}} \theta \\ &\quad + \alpha^2 I \int_0^\theta \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta_1]}{\sqrt{1-m}} d\theta_1 + m\alpha\beta \cos\theta I \int_0^\theta \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m} \sqrt{1-m}} d\theta_1. \end{aligned}$$

Nun

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_5 &= \alpha\beta m \int_0^\theta \frac{\frac{B_1}{L_1} \cos\theta_1 + \frac{B_2}{M_0} (-m \cos^2\theta_1 + 1 - 1)}{1 - m \cos^2\theta_1} (\sin\theta - \sin\theta_1) d\theta_1 \\ &= \alpha\beta m (\sin\theta \theta + \cos\theta - 1) \frac{B_2}{M_0} + \alpha\beta \left[(\sin\theta - \sin\theta_1) m \times \right. \\ &\quad \left. \left\{ \frac{B_1}{L_1} \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m} \sqrt{1-m}} - \frac{[\lambda_1 + \lambda_2]}{\sqrt{1-m}} \frac{B_2}{M_0} \right\} \right]_0^\theta \\ &\quad + m \int_0^\theta \left\{ \frac{B_1}{L_1} \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m} \sqrt{1-m}} - \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta_1]}{\sqrt{1-m}} \frac{B_2}{M_0} \right\} \end{aligned}$$

$$-\frac{B_2}{M_0} \frac{\theta_1}{\sqrt{1-m}} \Big\} \cos \theta_1 d\theta_1.$$

Die Letzte Integrale werden durch partielle Integration berechnet :

$$\begin{aligned} \int_0^{\theta} \cos \theta [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] d\theta &= \left[\sin \theta [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] \right]_0^{\theta} \\ &- \int_0^{\theta} \sin \theta \left\{ \frac{\sqrt{1-m}}{1-m \cos^2 \theta} - 1 \right\} d\theta \\ &= \sin \theta [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] - \sqrt{1-m} \frac{1}{2\sqrt{m}} \left[\log \frac{1-\sqrt{m} \cos \theta}{1+\sqrt{m} \cos \theta} \right]_0^{\theta} \\ &+ \int_0^{\theta} \frac{\sqrt{m} \sin \theta}{1+\sqrt{m} \cos \theta} d\theta - \cos \theta + 1 = \sin \theta [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] \\ &- \cos \theta + 1 - \frac{\sqrt{1-m}}{2\sqrt{m}} \left[\log \frac{1-\sqrt{m} \cos \theta}{1+\sqrt{m} \cos \theta} \right]_0^{\theta} \\ &= \sin \theta [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] - \cos \theta + 1 - \frac{\sqrt{1-m}}{2\sqrt{m}} \log \frac{(1-\sqrt{m} \cos \theta)(1+\sqrt{m})}{(1+\sqrt{m} \cos \theta)(1-\sqrt{m})} \\ \int_0^{\theta} \cos \theta \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} d\theta &= \left[\sin \theta \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} \right]_0^{\theta} - \int_0^{\theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{1-m \cos^2 \theta} d\theta \sqrt{1-m} \\ &= \sin \theta \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} - \frac{\sqrt{1-m}}{2m} \left[\log(1-m \cos^2 \theta) \right]_0^{\theta} \\ &= \sin \theta \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} - \frac{\sqrt{1-m}}{2m} \log \frac{1-m \cos^2 \theta}{1-m}. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir

$$\mathfrak{F}_5 = \alpha \beta m (\sin \theta + \cos \theta - 1) \frac{B_2}{M_0} + \alpha \beta m \sin \theta \left\{ \frac{B_1}{L_1} \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m} \sqrt{1-m}} \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{B_2}{M_0} \frac{\theta}{\sqrt{1-m}} - \frac{B_2}{M_0} \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{\sqrt{1-m}} \Big\} - \alpha \beta \frac{B_1}{2L_1} \log \left(\frac{1-m \cos^2 \theta}{1-m} \right) \\
& + \frac{\alpha \beta}{2} \sqrt{m} \frac{B_2}{M_0} \log \left(\frac{1 + \sqrt{m} \cos \theta}{1 - \sqrt{m} \cos \theta} \frac{1 - \sqrt{m}}{1 + \sqrt{m}} \right).
\end{aligned}$$

Endlich

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_6 &= -m \int_0^{\theta_1} \frac{\alpha \cos^2 \theta_1 + \beta \cos \theta \cos \theta_1}{1-m \cos^2 \theta} (\mathfrak{F}_1) d\theta_1 \\
&= -m \int_0^{\theta_1} \frac{\alpha \cos^2 \theta_1 + \beta \cos \theta \cos \theta_1}{1-m \cos^2 \theta} \left\{ \alpha \frac{B_1}{L_1} - m \beta \cos \theta_1 \frac{B_2}{M_0} \right\} \theta_1 \\
&\quad - \frac{\alpha B_2 m}{M_0} \sin \theta_1 \Big\} d\theta_1 \\
&+ m \int_0^{\theta_1} \frac{\alpha \cos^2 \theta_1 + \beta \cos \theta \cos \theta_1}{1-m \cos^2 \theta} \left\{ \left(\alpha \frac{B_1}{L_1} - m \beta \cos \theta_1 \frac{B_2}{M_0} \right) \times \right. \\
&\quad \left. \frac{\theta_1}{\sqrt{1-m}} \right\} d\theta_1 \\
&+ m \int_0^{\theta_1} \frac{\alpha \cos^2 \theta_1 + \beta \cos \theta \cos \theta_1}{1-m \cos^2 \theta} \left\{ \left(\alpha \frac{B_1}{L_1} - m \beta \cos \theta_1 \frac{B_2}{M_0} \right) \times \right. \\
&\quad \left. \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta_1]}{\sqrt{1-m}} \right\} d\theta_1 \\
&- m \int_0^{\theta_1} \frac{\alpha \cos^2 \theta_1 + \beta \cos \theta \cos \theta_1}{1-m \cos^2 \theta} \left(\alpha \frac{B_2}{M_0} m - \frac{B_1}{L_1} m \beta \cos \theta_1 \right) \times \\
&\quad \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m} \sqrt{1-m}} d\theta_1.
\end{aligned}$$

Da der erste Teil dieses Integrals den gleichen Wert wie $\mathfrak{F}_2$ besitzt, und nur das Vorzeichen verschieden ist, braucht man den ersten Teil nicht zu berechnen.

Ersetzen wir in $\mathfrak{F}_3$, α durch α^2 , β durch β^2 , $B_1 \alpha$ durch B_1 und $B_2 \beta$ durch B_2 und dividieren wir durch $\sqrt{1-m}$, so geht $\mathfrak{F}_3$ über in

$$\begin{aligned}
& m \int_0^\theta \frac{\alpha \cos^2 \theta_1 + \beta \cos \theta \cos \theta_1}{1 - m \cos^2 \theta} \left\{ \left(\alpha \frac{B_1}{L_1} - m \beta \cos \theta_1 \frac{B_2}{M_0} \right) \frac{\theta_1}{\sqrt{1-m}} \right\} d\theta_1 \\
&= -\frac{1}{\sqrt{1-m}} \left[\left(\alpha^2 \frac{B_1}{L_1} - m \beta^2 \cos \theta \frac{B_2}{M_0} \right) \theta^2 - \frac{\alpha \beta B_2}{M_0} m \sin \theta \cdot \theta \right. \\
&\quad - \left(\alpha^2 \frac{B_1}{L_1} - m \beta^2 \cos \theta \frac{B_2}{M_0} \right) \frac{\theta^2}{\sqrt{1-m}} - \left(\alpha^2 \frac{B_1}{L_1} - m \beta^2 \cos \theta \right) \times \\
&\quad \left. \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{\sqrt{1-m}} \theta \right. \\
&\quad + \left(\alpha \beta \frac{B_2}{M_0} m - \alpha \beta m \frac{B_1}{L_1} \right) \frac{\theta}{\sqrt{m} \sqrt{1-m}} - \left(\alpha^2 \frac{B_1}{L_1} \right. \\
&\quad \left. - m \beta^2 \cos \theta \frac{B_2}{M_0} \right) \frac{\theta^2}{2} \\
&\quad - \alpha \beta \frac{B_2}{M_0} m \cos \theta + \alpha \beta \frac{B_2}{M_0} m + \left(\alpha^2 \frac{B_1}{L_1} - m \beta^2 \cos \theta \frac{B_2}{M_0} \right) \frac{\theta^2}{2\sqrt{1-m}} \\
&\quad + \left(\alpha^2 \frac{B_1}{L_1} - m \beta^2 \cos \theta \frac{B_2}{M_0} \right) \int_0^\theta \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{\sqrt{1-m}} d\theta - \left(\alpha \beta \frac{B_2}{M_0} m \right. \\
&\quad \left. - \alpha \beta \frac{B_1}{L_1} m \cos \theta \right) \int_0^\theta \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m} \sqrt{1-m}} d\theta \Big].
\end{aligned}$$

Also ist das nichts anderes als der zweite Teil des sechsten Integrals.

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\sqrt{1-m}} \left[\left(\alpha^2 \frac{B_1}{L_1} - m \beta^2 \cos \theta \frac{B_2}{M_0} \right) \frac{\theta^2}{2} - \alpha \beta \frac{B_2}{M_0} m \theta \sin \theta \right. \\
&\quad - \left(\alpha^2 \frac{B_1}{L_1} - m \beta^2 \cos \theta \frac{B_2}{M_0} \right) \frac{\theta^2}{2\sqrt{1-m}} - \alpha \beta \frac{B_2}{M_0} m \cos \theta + \alpha \beta \frac{B_2}{M_0} m \\
&\quad - \left(\alpha^2 \frac{B_1}{L_1} - m \beta^2 \cos \theta \frac{B_2}{M_0} \right) \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{\sqrt{1-m}} \theta + \left(\alpha \beta \frac{B_2}{M_0} m \right. \\
&\quad \left. - \alpha \beta m \frac{B_1}{L_0} \cos \theta \right) \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m} \sqrt{1-m}} \theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\alpha^2 \frac{B_1}{L_1} - m \beta^2 \cos \theta \frac{B_2}{M_0} \right) \frac{(\psi(\theta) - \psi(0))}{\sqrt{1-m}} \\
 & - \left(\alpha \beta \frac{B_2}{M_0} m - \alpha \beta \frac{B_1}{L_1} m \cos \theta \right) \frac{(\chi(\theta) - \chi(0))}{\sqrt{1-m}},
 \end{aligned}$$

wobei

$$(30) \quad \int_0^{\theta} [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] d\theta = \psi(\theta) - \psi(0),$$

$$(31) \quad \int_0^{\theta} \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{1-m}} d\theta = \chi(\theta) - \chi(0)$$

gesetzt sind

Addieren wir den dritten Teil zum vierten Teil, so folgt

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^{\theta} \frac{\alpha(-m \cos^2 \theta_1 + 1) - \alpha - m \beta \cos \theta \cos \theta_1}{1 - m \cos^2 \theta_1} \left(\alpha \frac{B_1}{L_1} - m \beta \cos \theta_1 \frac{B_2}{M_0} \right) \times \\
 & \quad \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{\sqrt{1-m}} d\theta_1 \\
 & + \int_0^{\theta} \frac{\alpha(-m \cos^2 \theta_1 + 1) - \alpha - m \beta \cos \theta \cos \theta_1}{1 - m \cos^2 \theta_1} \left(\alpha \frac{B_2}{M_0} m - \frac{B_1}{L_1} m \beta \cos \theta_1 \right) \times \\
 & \quad \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{1-m}} d\theta_1 \\
 & = - \int_0^{\theta} \left\{ \left(\alpha^2 \frac{B_1}{L_1} - m \alpha \beta \cos \theta_1 \frac{B_2}{M_0} \right) - \frac{B_2}{M_0} \beta^2 m \cos \theta \right\} \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta_1]}{\sqrt{1-m}} d\theta_1 \\
 & + \int_0^{\theta} \left\{ \alpha^2 \frac{B_2}{M_0} m - \frac{B_1}{L_1} m \alpha \beta \cos \theta_1 - \frac{B_1}{L_1} \alpha \beta m \cos \theta \right\} \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{1-m}} d\theta_1 \\
 & + \int_0^{\theta} \frac{\left(\alpha^2 \frac{B_1}{L_1} - \frac{B_2}{M_0} \beta^2 m \cos \theta \right) + \cos \theta_1 \left(\alpha \beta m \frac{B_1}{L_1} \cos \theta - m \alpha \beta \frac{B_2}{M_0} \right)}{1 - m \cos^2 \theta_1} \times \\
 & \quad \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta_1]}{\sqrt{1-m}} d\theta_1
 \end{aligned}$$

$$-\int_0^{\theta} \frac{\left(\alpha^2 \frac{B_2}{M_0} m - \frac{B_1}{L_1} m \beta^2 \cos \theta \right) + \cos \theta_1 \left(\alpha \beta \frac{B_2}{M_0} m \cos \theta - \alpha \beta \frac{B_1}{L_1} m \right)}{1 - m \cos^2 \theta_1} \times \\ \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m} \sqrt{1-m}} d\theta_1.$$

Die Integrale, welche in der ersten und zweiten Reihen auftreten sind in (23), (24), (30) und (31) gegeben. Nun wollen wir die Integrale, welche in den dritten und vierten Reihen auftreten, berechnen:

$$\int_0^{\theta} \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{1 - m \cos^2 \theta} d\theta = \left[\frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{\sqrt{1-m}} \right]_0^{\theta} - \int_0^{\theta} [\lambda_1 + \lambda_2] \left\{ \frac{1}{1 - m \cos^2 \theta} \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{1-m}} \right\} d\theta = \frac{[\lambda_1 + \lambda_2][\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{\sqrt{1-m}} - \int_0^{\theta} \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{1 - m \cos^2 \theta} d\theta \\ - \int_0^{\theta} \frac{\theta d\theta}{1 - m \cos^2 \theta} + \int_0^{\theta} \frac{[\lambda_1 + \lambda_2]}{\sqrt{1-m}} d\theta = \frac{1}{2} \frac{[\lambda_1 + \lambda_2][\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{\sqrt{1-m}} \\ - \frac{1}{2} \frac{[\lambda_1 + \lambda_2]}{\sqrt{1-m}} \theta + \frac{1}{2} \int_0^{\theta} \frac{[\lambda_1 + \lambda_2]}{\sqrt{1-m}} d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{\theta} \frac{[\lambda_1 + \lambda_2]}{\sqrt{1-m}} d\theta \\ = \frac{1}{2} \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]^2}{\sqrt{1-m}} + \int_0^{\theta} \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{\sqrt{1-m}} d\theta.$$

Also

$$(32) \quad \int_0^{\theta} \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{1 - m \cos^2 \theta} d\theta = \frac{1}{2} \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]^2}{\sqrt{1-m}} + \int_0^{\theta} \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{\sqrt{1-m}} d\theta.$$

Da

$$\int_0^{\theta} \frac{\cos \theta [\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m} (1 - m \cos^2 \theta)} d\theta = \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]^2}{m \sqrt{1-m}} - \int_0^{\theta} \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{m \sqrt{1-m}} \times \\ \frac{\sqrt{m} \sqrt{1-m} \cos \theta}{1 - m \cos^2 \theta} d\theta$$

ist, so erhält man

$$(33) \quad \int_0^0 \frac{\cos\theta [\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m(1 - m \cos^2\theta)}} d\theta = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - m}} \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]^2}{m}.$$

Weiter

$$\begin{aligned} & \int_0^0 \frac{[\lambda_1 - \lambda_2] d\theta}{(1 - m \cos^2\theta) \sqrt{m}} + \int_0^0 \frac{\cos\theta [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{1 - m \cos^2\theta} d\theta \\ &= \frac{[\lambda_1 - \lambda_2] [\lambda_1 + \lambda_2]}{\sqrt{m} \sqrt{1 - m}} - \int_0^0 \frac{\cos\theta [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{1 - m \cos^2\theta} d\theta \\ &= \frac{[\lambda_1 - \lambda_2] [\lambda_1 + \lambda_2]}{\sqrt{m} \sqrt{1 - m}} - \int_0^0 \frac{\theta \cos\theta d\theta}{1 - m \cos^2\theta} \\ &= \frac{[\lambda_1 - \lambda_2] [\lambda_1 + \lambda_2]}{\sqrt{m} \sqrt{1 - m}} - \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m} \sqrt{1 - m}} \theta + \int_0^0 \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m} \sqrt{1 - m}} d\theta \\ &= \frac{[\lambda_1 - \lambda_2] [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{\sqrt{m} \sqrt{1 - m}} + \int_0^0 \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m} \sqrt{1 - m}} d\theta. \end{aligned}$$

Schliesslich

$$(34) \quad \int_0^0 \frac{[\lambda_1 - \lambda_2] d\theta}{(1 - m \cos^2\theta) \sqrt{m}} + \int_0^0 \frac{\cos\theta [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{1 - m \cos^2\theta} d\theta \\ = \frac{[\lambda_1 - \lambda_2] [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{\sqrt{m} \sqrt{1 - m}} + \int_0^0 \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m} \sqrt{1 - m}} d\theta.$$

Die dritten und vierten Teile des Integrals $\mathfrak{J}_6$ werden

$$\begin{aligned} & - \left(\alpha^2 \frac{B_1}{L_1} - \frac{B_2}{M_0} \beta^2 m \cos\theta \right) \left\{ \frac{\psi(\theta) - \psi(0)}{\sqrt{1 - m}} \right\} - m \alpha \beta \frac{B_2}{M_0} \left\{ \sin\theta \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{\sqrt{1 - m}} \right. \\ & \left. - \frac{\cos\theta}{\sqrt{1 - m}} + \frac{1}{\sqrt{1 - m}} - \frac{1}{2\sqrt{m}} \log \left(\frac{1 - \sqrt{m} \cos\theta}{1 + \sqrt{m} \cos\theta} \frac{1 + \sqrt{m}}{1 - \sqrt{m}} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\alpha^2 \frac{B_2}{M_0} m - \frac{B_1}{L_1} m a \beta \cos \theta \right) \left\{ \frac{\chi(\theta) - \chi(0)}{\sqrt{1-m}} \right\} \\
& - \frac{B_1}{L_1} m a \beta \left\{ \frac{\sin \theta [\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m} \sqrt{1-m}} - \frac{1}{2m} \log \left(\frac{1-m \cos^2 \theta}{1-m} \right) \right\} \\
& + \left(\alpha^2 \frac{B_1}{L_1} - \frac{B_2}{M_0} \beta^2 m \cos \theta \right) \left\{ \frac{1}{2} \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]^2}{1-m} + \frac{1}{\sqrt{1-m}} \left(\frac{\psi(\theta) - \psi(0)}{\sqrt{1-m}} \right) \right\} \\
& + \left(a \beta \frac{B_1}{L_1} m \cos \theta - m a \beta \frac{B_2}{M_0} \right) \left\{ -\frac{1}{\sqrt{1-m}} \int_0^\theta \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m} (1-m \cos^2 \theta)} d\theta \right. \\
& \left. + \frac{[\lambda_1 - \lambda_2] [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{\sqrt{m} (1-m)} + \frac{0}{\sqrt{1-m} \sqrt{1-m}} \right\} \\
& - \left(\alpha^2 \frac{B_2}{M_0} m - \frac{B_1}{L_1} m \beta^2 \cos \theta \right) \frac{1}{\sqrt{1-m}} \int_0^\theta \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m} (1-m \cos^2 \theta)} d\theta \\
& - \left(a \beta \frac{B_2}{M_0} m \cos \theta - a \beta \frac{B_1}{L_1} m \right) \frac{1}{2} \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]^2}{(1-m)m}.
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
\mathfrak{J}_2 + \mathfrak{J}_6 = & - \left(\alpha^2 \frac{B_1}{L_1} - m \beta^2 \cos \theta \frac{B_2}{M_0} \right) \frac{\theta^2}{2 \sqrt{1-m}} + a \frac{\beta B_2}{M_0} m \frac{\theta}{\sqrt{1-m}} \sin \theta \\
& + \left(\alpha^2 \frac{B_1}{L_1} - m \beta^2 \frac{B_2}{M_0} \cos \theta \right) \frac{\theta^2}{2(1-m)} + \left(\alpha^2 \frac{B_1}{L_1} - m \beta^2 \cos \theta \frac{B_2}{M_0} \right) \times \\
& \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{1-m} \theta \\
& - \left(a \beta \frac{B_2}{M_0} m - m a \beta \frac{B_1}{L_1} \cos \theta \right) \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m} (1-m)} \theta + a \beta \frac{B_2}{M_0} m \cos \theta \\
& - a \beta \frac{B_2}{M_0} m \\
& - \left(\alpha^2 \frac{B_1}{L_1} - m \beta^2 \cos \theta \frac{B_2}{M_0} \right) \frac{\psi(\theta) - \psi(0)}{(1-m)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\alpha \beta \frac{B_2}{M_0} m - \alpha \beta \frac{B_1}{L_1} m \cos \theta \right) \frac{(\chi(\theta) - \chi(0))}{(1-m)} \\
& - \left(\alpha^2 \frac{B_1}{L_1} - \frac{B_2}{M_0} \beta^2 \cos \theta \right) (\psi(\theta) - \psi(0)) + \\
& m \alpha \beta \frac{B_2}{M_0} \left\{ \sin \theta \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{\sqrt{1-m}} - \frac{\cos \theta}{\sqrt{1-m}} + \frac{1}{\sqrt{1-m}} - \frac{1}{2\sqrt{m}} \times \right. \\
& \left. \log \left(\frac{1 - \sqrt{m} \cos \theta}{1 + \sqrt{m} \cos \theta} \right) \right\} \\
& + \left(\alpha^2 \frac{B_2}{M_0} m - \frac{B_1}{L_1} m \alpha \beta \cos \theta \right) \frac{(\chi(\theta) - \chi(0))}{\sqrt{1-m}} \\
& - \frac{B_1}{L_1} m \alpha \beta \left\{ \frac{\sin \theta [\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m} \sqrt{1-m}} - \frac{1}{2m} \log \left(\frac{1 - m \cos^2 \theta}{1 - m} \right) \right\} \\
& \left(\alpha^2 \frac{B_1}{L_1} - \frac{B_2}{M_0} \beta^2 m \cos \theta \right) \left(\frac{1}{2} \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]^2}{1-m} + \frac{\psi(\theta) - \psi(0)}{(1-m)} \right) \\
& - \frac{1}{\sqrt{1-m}} \left(\alpha \beta m \frac{B_1}{L_1} \cos \theta - m \alpha \beta \frac{B_2}{M_0} \right) \left\{ \int_0^\theta \frac{[\lambda_1 - \lambda_2] d\theta}{\sqrt{m} (1 - m \cos^2 \theta)} \right. \\
& \left. - \frac{[\lambda_1 - \lambda_2] [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{\sqrt{m} \sqrt{1-m}} - \frac{(\chi(\theta) - \chi(0))}{\sqrt{1-m}} \right\} \\
& - \left(\alpha^2 \frac{B_2}{M_0} m - \frac{B_1}{L_1} \beta^2 m \cos \theta \right) \frac{1}{\sqrt{1-m}} \int_0^\theta \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m} (1 - m \cos^2 \theta)} d\theta \\
& - \left(\alpha \beta \frac{B_2}{M_0} m^2 \cos \theta - \alpha \beta \frac{B_1}{L_1} m \right) \frac{1}{2} \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]^2}{m (1-m)} .
\end{aligned}$$

Wenn man die Funktionen $(i_1)_0$, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$, $\mathfrak{F}_4$, $\mathfrak{F}_5$, und $\mathfrak{F}_6$ zusammen addiert, so bleiben nur die Glieder

$$\text{aus } (i_1)_0 : \quad \frac{B_1}{L_1} - \frac{B_2}{L_1} m + I \alpha \theta ,$$

$$\begin{aligned}
\text{aus } \mathfrak{S}_1 : & -\left(\alpha \frac{B_1}{L_1} - m\beta \cos\theta \frac{B_2}{M_0}\right) \frac{\theta}{\sqrt{1-m}} \\
& -\left(\alpha \frac{B_1}{L_1} - m\beta \cos\theta \frac{B_2}{M_0}\right) \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{\sqrt{1-m}} \\
& +\left(\alpha \frac{B_2}{M_0} m - \frac{B_1}{L_1} m\beta \cos\theta\right) \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m} \sqrt{1-m}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{aus } \mathfrak{S}_4 : & -\frac{\alpha^2 \theta}{2} \frac{I}{\sqrt{1-m}} - \frac{\alpha^2 I \theta}{\sqrt{1-m}} \\
& -m\alpha\beta \cos\theta \frac{I[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m} \sqrt{1-m}} \theta + \alpha^2 I \int_0^\theta \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta_1]}{\sqrt{1-m}} d\theta_1 \\
& +m\alpha\beta \cos\theta I \int_0^\theta \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m} \sqrt{1-m}} d\theta_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{aus } \mathfrak{S}_6 : & \left(\alpha^2 \frac{B_1}{L_1} - m\beta^2 \frac{B_2}{M_0} \cos\theta\right) \frac{\theta^2}{2(1-m)} + \left(\alpha^2 \frac{B_1}{L_1} - m\beta^2 \cos\theta \frac{B_2}{M_0}\right) \times \\
& \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{1-m} \theta \\
& -\left(\alpha\beta \frac{B_2}{M_0} m - m\alpha\beta \frac{B_1}{L_1} \cos\theta\right) \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m} (1-m)} \theta \\
& +\left(\alpha^2 \frac{B_1}{L_1} - \frac{B_2}{M_0} m\beta^2 \cos\theta\right) \frac{1}{2} \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]^2}{1-m} \\
& +\left(\alpha\beta \frac{B_1}{L_1} m \cos\theta - m\alpha\beta \frac{B_2}{M_0}\right) \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m} (1-m)} \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{1-m} \\
& -\left(\alpha\beta \frac{B_2}{M_0} m^2 \cos\theta - \alpha\beta \frac{B_1}{L_1} m\right) \frac{1}{2} \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]^2}{(1-m)m}
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{1-m}} \left(\alpha \beta m \frac{B_1}{L_1} \cos \theta - m \alpha \beta \frac{B_2}{M_0} + \alpha^2 \frac{B_2}{M_0} m - \frac{B_1}{L_1} m \beta^2 \cos \theta \right) \\ \int_0^\theta \frac{[\lambda_1 - \lambda_2] d\theta}{(1 - m \cos^2 \theta) \sqrt{m}}.$$

Also

$$(35) \quad i_1(1 - m \cos^2 \theta) = \frac{B_1}{L_1} \left\{ \left(1 - \frac{\alpha \theta}{\sqrt{1-m}} + \frac{\alpha^2 \theta^2}{2(1-m)} \right) - \alpha \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{\sqrt{1-m}} \right. \\ - \frac{m \beta}{\sqrt{m}} \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{1-m}} \cos \theta \\ + \frac{\alpha^2 \theta}{1-m} [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] + m \alpha \beta \cos \theta \frac{[\lambda_1 - \lambda_2] \theta}{\sqrt{m}(1-m)} + \frac{\alpha^2}{2} \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]^2}{1-m} \\ + m \alpha \beta \cos \theta \frac{[\lambda_1 - \lambda_2][\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{\sqrt{m}(1-m)} + \alpha \beta \frac{m}{2} \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]^2}{m(1-m)} \\ \left. - \frac{\beta(\alpha - \beta)}{\sqrt{1-m}} m \cos \theta \int_0^\theta \frac{[\lambda_1 - \lambda_2] d\theta}{\sqrt{m}(-m \cos^2 \theta)} \right. \\ - \frac{B_2}{M_0} m \left\{ \left(1 - \frac{\beta \theta}{\sqrt{1-m}} + \frac{\beta^2 \theta^2}{2(1-m)} \right) - \beta \cos \theta \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{\sqrt{1-m}} \right. \\ - \alpha \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} \frac{1}{\sqrt{1-m}} + m \cos \beta^2 \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{1-m} \theta \\ + \alpha \beta \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}(1-m)} \theta + \beta^2 \cos \theta \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]^2}{2(1-m)} + \alpha \beta \frac{[\lambda_1 - \lambda_2][\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{\sqrt{m}(1-m)} \\ \left. + \alpha \beta \cos \theta \frac{m}{2} \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]^2}{m(1-m)} + \frac{\alpha(\alpha - \beta)}{\sqrt{m}} \frac{1}{\sqrt{1-m}} \int_0^\theta \frac{[\lambda_1 - \lambda_2] d\theta}{(1 - m \cos^2 \theta)} \right\} \\ + I \left\{ \alpha \theta - \frac{\alpha^2 \theta^2}{2} \frac{1}{\sqrt{1-m}} + \alpha^2 I \frac{(\psi(\theta) - \psi(0))}{\sqrt{1-m}} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + m\alpha\beta \cos\theta \frac{(\chi(\theta) - \chi(0))}{\sqrt{1-m}} - \frac{\alpha^2\theta}{\sqrt{1-m}} [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] \\
& - m\alpha\beta \cos\theta \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} \frac{\theta}{\sqrt{1-m}} - m\alpha\beta \cos\theta \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]\theta}{\sqrt{1-m} \sqrt{m}} \Big\}.
\end{aligned}$$

Wenn man das Resultat der Berechnung, welche bis zur zweiten Ordnung des kleinen Parameters diesen berücksichtigt, mit (21) vergleicht, so kann man die Lösung wie folgt mmen

$$\begin{aligned}
(36) \quad i_1 = & \frac{\left(\frac{B_1}{L_1} + \mu(\mu - \nu)\phi(0) \frac{B_2}{M_0} \right)}{1 - m\cos^2\theta} e^{-\mu\theta} \left\{ 1 - \mu[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] \right. \\
& + \nu \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} m\cos\theta + \frac{\mu^2}{2} [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]^2 + \mu\nu \cos\theta m \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] \\
& \left. + \mu\nu m \frac{1}{2} \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]^2}{m} - \nu(\mu - \nu)m \cos\theta \phi(\theta) \right\} \\
& - m \frac{\left(\frac{B_2}{M_0} - \frac{B_1}{L_1} \nu(\mu - \nu)m\phi(0) + m\mu\nu\chi(0) \right) e^{-\nu\theta}}{1 - m\cos^2\theta} \left\{ \cos\theta \right. \\
& - \nu\cos\theta[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] - \mu \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} + \frac{\nu^2}{2} \cos\theta[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]^2 \\
& + \mu\nu \frac{[\lambda_1 - \lambda_2][\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{\sqrt{m}} + \frac{\mu\nu}{2} m\cos\theta \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]^2}{m} + \mu(\mu - \nu)\phi(\theta) \Big\} \\
& + I\sqrt{1-m} \left\{ 1 - \mu[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] - \nu \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} m\cos\theta + \frac{\mu^2}{2} [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]^2 \right. \\
& + \mu\nu \cos\theta m \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] + \mu\nu m \frac{1}{2} \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]^2}{m} \\
& \left. - \nu(\mu - \nu)m\cos\theta\phi(\theta) + \mu^2(\psi(\theta) - \psi(0)) + m\mu\nu\cos\theta\chi(\theta) \right\},
\end{aligned}$$

wobei

$$(37) \quad \frac{\alpha}{\sqrt{1-m}} = \frac{R_1}{\sqrt{1-m} L_1 \omega} = \mu, \quad \frac{\beta}{\sqrt{1-m}} = \frac{R_2}{\sqrt{1-m} L_2 \omega} = \nu,$$

$$(38) \quad \psi(\theta) - \psi(0) = \int_0^\theta [\lambda_1 - \lambda_2 - \theta] d\theta,$$

$$(39) \quad \chi(\theta) - \chi(0) = \int_0^\theta \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} d\theta,$$

$$(40) \quad \sqrt{1-m} \int_0^\theta \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{(1 - m \cos^2 \theta)} \frac{d\theta}{\sqrt{m}} = \varphi$$

gesetzt sind.

In analoger Weise, erhalten wir

$$(41) \quad i_2 = - \frac{M_0}{L_2} \frac{\left(\frac{B_1}{L_1} + \mu(\mu - \nu)\phi(0) \frac{B_2}{M_0} m - I \sqrt{1-m} \right) e^{-\mu\theta}}{1 - m \cos^2 \theta} + \left\{ \cos \theta \right. \\ \left. - \mu \cos \theta [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] - \nu \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} + \frac{\mu^2}{2} \cos \theta [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]^2 \right. \\ \left. + \mu \nu \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] + \frac{\mu \nu}{2} m \cos \theta \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]^2}{m} + \nu(\nu - \mu)\phi(\theta) \right\} \\ + \frac{M_0}{L_2} \frac{\left(\frac{B_2}{M_0} - \frac{B_1}{L_1} \nu(\mu - \nu)\phi(0) + \mu \nu \chi(0) \right)}{1 - m \cos^2 \theta} \left\{ 1 - \nu [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] \right. \\ \left. - \mu \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} m \cos \theta + \frac{\nu^2}{2} [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]^2 + \mu \nu \cos \theta \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] \right. \\ \left. + \mu \nu m \frac{1}{2} \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]^2}{m} - \mu(\nu - \mu) m \cos \theta \phi(\theta) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& -I \sqrt{1-m} \left\{ \cos\theta - \mu \cos\theta [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] - \nu \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} \right. \\
& + \frac{\mu^2}{2} \cos\theta [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]^2 + \mu\nu \frac{[\lambda_1 - \lambda_2] [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{\sqrt{m}} + \frac{\mu\nu}{2} m \cos\theta \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]^2}{m} \\
& \left. + \nu(\nu - \mu) \phi(\theta) + \mu\nu \chi(\theta) + \mu^2 \cos\theta (\psi(\theta) - \psi(0)) \right\}.
\end{aligned}$$

Setzen wir

$$\begin{aligned}
(42) \quad [I_1] &= 1 - \mu [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] - \nu \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} m, \quad \frac{\mu^2}{2} [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]^2 \\
& + \mu\nu \cos\theta m \frac{[\lambda_1 - \lambda_2] [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{\sqrt{m}} + \frac{\mu\nu}{2} m \cos\theta \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]^2}{m} \\
& - \nu(\mu - \nu) m \cos\theta \phi(\theta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(43) \quad [I_1'] &= \cos\theta - \nu \cos\theta [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] - \mu \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} + \frac{\nu^2}{2} \cos\theta [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]^2 \\
& + \mu\nu \frac{[\lambda_1 - \lambda_2] [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{\sqrt{m}} + \frac{\mu\nu}{2} m \frac{\cos\theta}{m} [\lambda_1 - \lambda_2]^2 + \mu(\mu - \nu) \phi(\theta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(44) \quad [I_2] &= \cos\theta - \mu \cos\theta [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] - \nu \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} + \frac{\mu^2}{2} \cos\theta [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]^2 \\
& + \mu\nu \frac{[\lambda_1 - \lambda_2] [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{\sqrt{m}} + \frac{\mu\nu}{2} m \frac{\cos\theta}{m} [\lambda_1 - \lambda_2]^2 + \nu(\nu - \mu) \phi(\theta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(45) \quad [I_2'] &= 1 - \nu [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] - \mu \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} m \cos\theta + \frac{\nu^2}{2} [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]^2 \\
& + \mu\nu \cos\theta m \frac{[\lambda_1 - \lambda_2] [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{\sqrt{m}} + \mu\nu m \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]^2}{2m} \\
& - \nu(\mu - \nu) m \cos\theta \phi(\theta),
\end{aligned}$$

$$(46) \quad [P_1] = [I_1] + \mu^2 \{\psi(\theta) - \psi(0)\} + m\mu\nu \cos\theta \chi(\theta),$$

$$(47) \quad [P_2] = [I_2] + \mu^2 \cos \theta \{ \psi(\theta) - \psi(0) \} + \mu \nu \chi(\theta),$$

und weiter

$$(48) \quad I_1 = \frac{I [I_1] \sqrt{1-m}}{1-m \cos^2 \theta}, \quad I_1' = \frac{I [I_1'] \sqrt{1-m}}{1-m \cos^2 \theta},$$

$$(49) \quad I_2 = \frac{I [I_2] \sqrt{1-m}}{1-m \cos^2 \theta}, \quad I_2' = \frac{I [I_2'] \sqrt{1-m}}{1-m \cos^2 \theta},$$

$$(50) \quad P_1 = \frac{I [P_1] \sqrt{1-m}}{1-m \cos^2 \theta}, \quad P_2 = \frac{I [P_2] \sqrt{1-m}}{1-m \cos^2 \theta},$$

so gewinnen wir

$$(51) \quad i_1 = C_1 e^{-\mu \theta} I_1 - m C_2 e^{-\nu \theta} I_1' + P_1,$$

$$(52) \quad i_2 = -C_1 \frac{M_0}{L_2} e^{-\mu \theta} I_2 + \frac{M_0}{L_2} C_2 e^{-\nu \theta} I_2' - P_2 \frac{M_0}{L_2},$$

wobei

$$(53) \quad C_1 = \frac{\frac{B_1}{L_1} + \mu(\mu-\nu)\phi(0) \frac{B_2}{M_0} m - I \sqrt{1-m}}{I \sqrt{1-m}},$$

$$(54) \quad C_2 = \frac{\frac{B_2}{M_0} - \frac{B_1}{L_1} \nu(\mu-\nu)\phi(0) - \mu \nu \chi(0)}{I \sqrt{1-m}},$$

gesetzt sind. Da B_1 und B_2 Integrationskonstanten sind, so sind C_1 und C_2 auch willkürliche Konstanten. Um die Konstanten zu bestimmen, setzen wir als Anfangsbedingungen:

$$\theta = \varphi, \quad i_1 = I, \quad i_2 = 0.$$

Daraus haben wir die algebraischen Gleichungen

$$(55) \quad C_1 = \frac{I I_2'(\varphi) - (I_2'(\varphi) P_2(\varphi) - m I_1'(\varphi) P_2(\varphi))}{I_1(\varphi) I_2'(\varphi) - m I_1'(\varphi) I_2(\varphi)} e^{-\mu \varphi},$$

$$(56) \quad C_2 = \frac{I I_2(\varphi) - (I_1(\varphi) P_2(\varphi) - I_2(\varphi) P_1(\varphi))}{I_1(\varphi) I_2'(\varphi) - m I_1'(\varphi) I_2(\varphi)} e^{-\nu \varphi}.$$

Wenn man die zweite Ordnung des k 1 Parameters vernachlässigt, so gehen die Gleichungen (26). Also

$$(57) \quad i_1 = \frac{C_1 e^{-\mu \theta}}{1 - m \cos^2 \theta} \left\{ 1 - \mu [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] - \nu \cos \theta m \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} \right\} \sqrt{1 - m} \\ - \frac{C_2 e^{-\nu \theta} m}{1 - m \cos^2 \theta} \left\{ \cos \theta - \nu [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] \cos \theta - \mu \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} \right\} \sqrt{1 - m} \\ + I \sqrt{1 - m} \left\{ 1 - \mu [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] - \nu \cos \theta m \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} \right\},$$

$$(58) \quad i_2 = -\frac{M_0}{L_2} \frac{C_1 e^{-\mu \theta}}{1 - m \cos^2 \theta} \left\{ \cos \theta - \mu [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] \cos \theta - \nu \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} \right\} \sqrt{1 - m} \\ + \frac{M_0}{L_2} \frac{C_2 e^{-\nu \theta}}{1 - m \cos^2 \theta} \left\{ 1 - \nu [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] - \mu \cos \theta m \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} \right\} \sqrt{1 - m} \\ - \frac{M_0}{L_0} I \sqrt{1 - m} \left\{ \cos \theta - \mu [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] \cos \theta - \nu \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} \right\},$$

und die Konstanten werden wie folgt gegeben :

$$(59) \quad C_1 = \frac{I I_2'(\varphi) e^{-\mu \varphi}}{I_1(\varphi) I_2'(\varphi) - m I_1'(\varphi) I_2(\varphi)} e^{-\mu \varphi},$$

$$(60) \quad C_2 = \frac{I I_2(\varphi) e^{-\nu \varphi}}{I_1(\varphi) I_2'(\varphi) - m I_1'(\varphi) I_2(\varphi)}.$$

Wenn der Kurzschluss in dem Moment wo $\varphi=0$ auftritt, so werden die Ströme

$$(61) \quad i_1 = \frac{I(1-\sqrt{1-m})e^{-\mu\theta}}{1-m\cos^2\theta} \left\{ 1 - \mu[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] - \nu \cos\theta m \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} \right\} \\ - \frac{e^{-\nu\theta} m I}{1-m\cos^2\theta} \left\{ \cos\theta - \nu[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] \cos\theta - \mu \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} \right\} \\ + I\sqrt{1-m} \left\{ 1 - \mu[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] - \nu \cos\theta m \frac{[\lambda_2]}{\sqrt{m}} \right\},$$

$$(62) \quad i_2 = -\frac{M_0}{L_2} \frac{I(1-\sqrt{1-m})}{1-m\cos^2\theta} e^{-\mu\theta} \left\{ \cos\theta - \mu[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] \cos\theta - \nu \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} \right\} \\ + \frac{M_0}{L_2} \frac{I e^{-\nu\theta}}{1-m\cos^2\theta} \left\{ 1 - \nu[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] - \mu \cos\theta \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} m \right\} \\ - \frac{M_0}{L_2} \frac{I\sqrt{1-m}}{1-m\cos^2\theta} \left\{ \cos\theta - \mu[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] \cos\theta - \nu \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} \right\}.$$

II. DIE APPROXIMATION DURCH TRIGONOMETRISCHE POLYNOME

Die in den vorangehenden Paragraphen gewonnenen Lösungen bestehen aus Funktionen, welche aus den zwei fundamentalen Funktionen abgeleitet werden.

Setzen wir

$$(63) \quad \frac{\sqrt{1-m}}{1-m\cos^2\theta} = 1 + a_2 \cos 2\theta + a_4 \cos 4\theta + \dots,$$

so sind die Fourierschen Konstanten

$$(64) \quad a_2 = \frac{4}{m} \left(1 - \frac{m}{2} - \sqrt{1-m} \right),$$

$$(65) \quad a_4 = -8 \left(\frac{2}{m} - 1 \right) \frac{\sqrt{1-m}}{m} + \frac{16}{m} \left(\frac{1}{m} - 1 \right) + 2,$$

$$(66) \quad a_6 = \left[-\frac{32}{m} \cdot \frac{3}{4} - \left(\frac{32}{m} - 48 \right) \frac{1}{m} - \left\{ \left(\frac{32}{m} - 48 \right) \frac{1}{m} + 18 \right\} \frac{2}{m} \right] \sqrt{1-m} \\ + \left\{ \left(\frac{32}{m} - 48 \right) \frac{1}{m} + 18 \right\} \frac{2}{m} -$$

$$(67) \quad a_8 = \left\{ -\frac{128}{m} \cdot \frac{15}{48} \cdot 2 - \left(\frac{128}{m} - 256 \right) \frac{1}{m} - \left\{ \left(\frac{128}{m} - 256 \right) \frac{1}{m} + 160 \right\} \frac{1}{m} \right. \\ \left. - \left[\left\{ \left(\frac{128}{m} - 256 \right) \frac{1}{m} + 160 \right\} \frac{1}{m} - 32 \right] \frac{2}{m} \right\} \sqrt{1-m} \\ + \left[\left\{ \left(\frac{128}{m} - 256 \right) \frac{1}{m} + 160 \right\} \frac{1}{m} - 32 \right] \frac{2}{m} + 2.$$

Daraus

$$(68) \quad \frac{\sqrt{1-m} \cos \theta}{1-m \cos^2 \theta} = a_1 \cos \theta + a_3 \cos 3\theta + \dots,$$

wobei

$$(69) \quad a_1 = 1 + \frac{a_2}{2}, \quad a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2}, \quad a_5 = \frac{a_4 + a_6}{2},$$

$$a_7 = \frac{a_6 + a_8}{2} \dots$$

gesetzt sind.

In der folgenden Tabelle sind die numerischen Werte der Fourierschen Konstanten zusammengestellt.

TABELLE I.

m	0,91	0,84	0,75	0,64	0,51
$1-m$	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49
$\sqrt{1-m}$	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70
a_1	1,54	1,43	1,33	1,25	1,17
a_2	1,08	0,86	0,67	0,50	0,35
a_3	0,83	0,61	0,45	0,31	0,19
a_4	0,58	0,36	0,22	0,12	0,04
a_5	0,45	0,26		7	0,02
a_6	0,32	0,16		2	0,00
a_8	0,25	0,11	0,04	0,01	0,00
a_9	0,19	0,06	0,01	0,00	0,00

Aus den Tabellen ist ersichtlich, dass es nicht so einfach ist, die Funktionen durch die Cosinusreihen zu entwickeln, wenn m nicht klein ist. Doch sind die Integralen durch die Cosinusreihen schnell zu approximieren.

Da

$$\begin{aligned}
 \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} &= \frac{1}{\sqrt{m}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}} \tan \frac{\theta}{2} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{\sqrt{m}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}} \tan \frac{\theta}{2} \right) \\
 &= \int_0^\theta \frac{\sqrt{1-m} \cos \theta}{1-m \cos^2 \theta} d\theta
 \end{aligned}$$

ist, so folgt

$$\begin{aligned}
 (70) \quad \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} &= \int_0^\theta \{a_1 \cos \theta + a_3 \cos 3\theta + a_5 \cos 5\theta + \dots\} d\theta \\
 &= a_1 \sin \theta + \frac{a_3}{3} \sin 3\theta + \frac{a_5}{5} \sin 5\theta + \dots
 \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise

$$[\lambda_1 + \lambda_2] = \int_0^{\theta} \frac{\sqrt{1-m}}{1-m \cos^2 \theta} d\theta = \theta + \frac{a_2}{2} \sin 2\theta + \frac{a_4}{4} \sin 4\theta + \dots ,$$

oder

$$(71) \quad [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] = \frac{a_2}{2} \sin 2\theta + \frac{a_4}{4} \sin 4\theta + \dots .$$

Daraus

$$\chi(\theta) - \chi(0) = \int_0^{\theta} \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} d\theta = -\frac{a_3}{3^2} (\cos 3\theta - 1) - \dots ,$$

so ist

$$(72) \quad \chi(\theta) = -a_1 \cos \theta - \frac{a_3}{3^2} \cos 3\theta - \frac{a_5}{5^2} \cos 5\theta - \dots .$$

Ebenso

$$\psi(\theta) - \psi(0) = \int_0^{\theta} [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] d\theta = -\frac{a_2}{2^2} (\cos 2\theta - 1) - \frac{a_4}{4^2} (\cos 4\theta - 1) - \dots ,$$

$$(73) \quad \psi(\theta) = -\frac{a_2}{2^2} \cos 2\theta - \frac{a_4}{4^2} \cos 4\theta - \dots$$

$$\begin{aligned} \phi(\theta) - \phi(0) &= \sqrt{1-m} \int_0^{\theta} \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m(1-m \cos^2 \theta)}} d\theta \\ &= \int_0^{\theta} \{1 + a_2 \cos 2\theta + a_4 \cos 4\theta + \dots\} \{a_1 \sin \theta + \frac{a_3}{3} \sin 3\theta + \dots\} d\theta. \end{aligned}$$

Setzen wir

$$(74) \quad \phi(\theta) = \phi_1 \cos \theta + \phi_3 \cos 3\theta + \phi_5 \cos 5\theta + \dots ,$$

so erhalten wir

$$(75) \quad \phi_1 = a_1 - \frac{a_2}{2} \left(a_1 - \frac{a_3}{3} \right) - \frac{a_4}{2} \left(\frac{a_3}{3} - \frac{a_5}{5} \right) - \frac{a_6}{2} \left(\frac{a_5}{5} - \frac{a_7}{7} \right) - \dots,$$

$$(76) \quad \phi_3 = \frac{1}{3} \left\{ \frac{a_3}{3} + \frac{a_2}{2} \left(a_1 + \frac{a_5}{5} \right) - \frac{a_4}{2} \left(a_1 - \frac{a_7}{7} \right) - \frac{a_6}{2} \left(\frac{a_3}{3} - \frac{a_9}{9} \right) - \dots \right\},$$

$$(77) \quad \phi_5 = \frac{1}{5} \left\{ \frac{a_5}{5} + \frac{a_2}{2} \left(\frac{a_3}{3} + \frac{a_7}{7} \right) - \frac{a_4}{2} \left(\frac{a_3}{3} - \frac{a_{11}}{11} \right) - \dots \right\},$$

$$(78) \quad \phi_7 = \frac{1}{7} \left\{ \frac{a_7}{7} + \frac{a_2}{2} \left(\frac{a_5}{5} + \frac{a_9}{9} \right) + \frac{a_4}{2} \left(\frac{a_3}{3} + \frac{a_{11}}{11} \right) + \frac{a_6}{2} \left(a_1 + \frac{a_{13}}{13} \right) - \frac{a_8}{2} \left(a_1 - \frac{a_{15}}{2} \right) - \dots \right\},$$

$$(79) \quad \phi_9 = \frac{1}{9} \left\{ \frac{a_9}{9} + \frac{a_2}{2} \left(\frac{a_7}{7} + \frac{a_{11}}{11} \right) + \frac{a_4}{2} \left(\frac{a_5}{5} + \frac{a_{13}}{13} \right) + \dots \right\}.$$

Schreiben wir

$$(80) \quad [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]^2 = L_0 + L_2 \cos 2\theta + L_4 \cos 4\theta + \dots,$$

so erhalten wir die Fourierschen Konstanten

$$(81) \quad L_0 = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{a_2}{2} \right)^2 + \left(\frac{a_4}{4} \right)^2 + \left(\frac{a_6}{6} \right)^2 + \dots \right\},$$

$$(82) \quad L_2 = \frac{a_2}{2} \frac{a_4}{4} + \frac{a_4}{4} \cdot \frac{a_6}{6} + \frac{a_6}{6} \cdot \frac{a_8}{8} + \dots,$$

$$(83) \quad L_4 = -\frac{1}{2} \left(\frac{a_2}{2} \right)^2 + \frac{a_2}{2} \frac{a_6}{6} + \frac{a_4}{4} \cdot \frac{a_8}{8} + \dots,$$

$$(84) \quad L_6 = -\frac{a_2}{2} \cdot \frac{a_4}{4} + \frac{a_2}{2} \frac{a_2}{8} + \dots,$$

$$(85) \quad L_8 = -\frac{1}{2} \left(\frac{a_4}{4} \right)^2 - \frac{a_2}{2} \frac{a_6}{6} + \dots,$$

$$(89) \quad L_{10} = -\frac{a_2}{2} \frac{a_8}{8} - \frac{a_4}{4} \frac{a_6}{6} + \dots$$

Schreiben wir weiter

$$(90) \quad \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]^2}{m} = K_0 + K_2 \cos 2\theta + \dots,$$

so haben wir

$$(91) \quad K_0 = \frac{1}{2} \left\{ a_1^2 + \left(\frac{a_3}{3} \right)^2 + \left(\frac{a_5}{5} \right)^2 + \dots \right\},$$

$$(92) \quad K_2 = -\frac{a_1^2}{2} + a_1 \frac{a_3}{3} + \frac{a_3}{3} \frac{a_5}{5} + \frac{a_5}{5} \frac{a_7}{7} + \dots,$$

$$(93) \quad K_4 = -a_1 \frac{a_3}{3} + a_1 \frac{a_5}{5} + \frac{a_3}{3} \frac{a_7}{7} + \frac{a_5}{5} \frac{a_9}{9} + \dots,$$

$$(94) \quad K_6 = -\frac{1}{2} \left(\frac{a_3}{3} \right)^2 - a_1 \frac{a_5}{5} + a_1 \frac{a_7}{7} + \frac{a_3}{3} \frac{a_9}{9} + \dots,$$

$$(95) \quad K_8 = -a_1 \frac{a_7}{7} - \frac{a_3}{3} \frac{a_5}{5},$$

.....

Wenn man

$$(96) \quad \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] = M_1 \cos \theta + M_3 \cos 3\theta + M_5 \cos 5\theta + \dots$$

setzt, so sind die Fourierschen Konstanten

$$(97) \quad M_1 = \frac{1}{2} \left\{ a_1 \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} \frac{a_4}{4} + \frac{a_5}{5} \frac{a_4}{4} + \dots \right\},$$

$$(98) \quad M_3 = \frac{1}{2} \left\{ -a_1 \frac{a_2}{2} + a_1 \frac{a_4}{4} + \frac{a_3}{3} \frac{a_6}{6} + \dots \right\},$$

$$(99) \quad M_5 = \frac{1}{2} \left\{ -a_1 \frac{a_4}{4} + a_1 \frac{a_6}{6} - \frac{a_3}{3} \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} \frac{a_8}{8} + \frac{a_7}{7} \frac{a_2}{2} \right\},$$

$$(100) \quad M_7 = \frac{1}{2} \left\{ -a_1 \frac{a_6}{6} - \frac{a_3}{3} \frac{a_4}{4} - \dots \right\},$$

$$(101) \quad M_9 = \frac{1}{2} \left\{ -a_1 \frac{a_8}{8} - \frac{a_3}{3} \frac{a_6}{6} - \frac{a_5}{5} \frac{a_4}{4} - \frac{a_7}{7} \frac{a_2}{2} + \dots \right\}.$$

Schliesslich entwickeln wir die Funktionen $[I_1]$ $[I_1']$ $[I_2]$ $[I_2']$ $[P_1]$ und $[P_2]$ durch die Fourierschen Reihen,

$$(102) \quad [I_1] = A_{10} + A_{12} \cos 2\theta + A_{14} \cos 4\theta + \dots + B_{12} \sin 2\theta + B_{14} \sin 4\theta + \dots$$

$$(103) \quad [I_1'] = A_{11} \cos \theta + A_{13} \cos 3\theta + \dots + B_{11} \sin \theta + B_{13} \sin 3\theta + \dots$$

$$(104) \quad [I_2] = A_{21} \cos \theta + A_{23} \cos 3\theta + \dots + B_{21} \sin \theta + B_{23} \sin 3\theta + \dots$$

$$(105) \quad [I_2'] = A_{20} + A_{22} \cos 2\theta + \dots + B_{22} \sin 2\theta + B_{24} \sin 4\theta + \dots$$

$$(106) \quad [P_1] = C_{10} + C_{12} \cos 2\theta + \dots + B_{12} \sin 2\theta + B_{14} \sin 4\theta + \dots$$

$$(107) \quad [P_2] = C_{21} \cos \theta + C_{23} \cos 3\theta + \dots + B_{21} \sin \theta + B_{23} \sin 3\theta + \dots,$$

und wenn wir die Funktionen, welche in $[I_1]$ $[I_2]$ $[I_1']$ $[I_2']$ $[P_1]$ und $[P_2]$ enthalten sind, durch die eben gewonnenen Reihen ersetzen, so ergibt sich ohne weiteres das System der Fourierschen Konstanten

$$(108) \quad A_{10} = 1 + \frac{\mu^2}{2} L_0 + \mu\nu \frac{m}{2} (M_1 + K_0 + \phi_1) - \nu^2 \frac{m}{2} \phi_1 ,$$

$$(109) \quad A_{12} = \frac{\mu^2}{2} L_2 + \mu\nu \frac{m}{2} (M_1 + M_3 + K_2 + \phi_1 + \phi_3) - \nu^2 \frac{m}{2} (\phi_1 + \phi_3) ,$$

$$(110) \quad A_{14} = \frac{\mu^2}{2} L_4 + \mu\nu \frac{m}{2} (M_3 + M_5 + K_4 + \phi_3 + \phi_5) - \nu^2 \frac{m}{2} (\phi_3 + \phi_5) ,$$

..... ,

$$(111) \quad B_{12} = - \left(\mu \frac{a^2}{2} + \frac{\nu m}{2} \left(a_1 + \frac{1}{3} \right) \right) ,$$

$$(112) \quad B_{14} = - \left(\mu \frac{a_4}{4} + \frac{\nu m}{2} \left(\frac{a_3}{3} + \frac{a_5}{5} \right) \right) ,$$

.....

$$(113) \quad A_{11} = 1 + \frac{\nu^2}{2} \left(L_0 + \frac{L_2}{2} \right) + \mu\nu \left(M_1 + \frac{m}{2} \left(K_0 + \frac{K_2}{2} \right) + \phi_1 \right) - \mu^2 \phi_1 ,$$

$$(114) \quad A_{13} = \frac{\nu^2}{4} (L_2 + L_4) + \mu\nu \left(M_3 + \frac{m}{4} (K_2 + K_4) + \phi_3 \right) - \mu^2 \phi_3 ,$$

..... ,

$$(115) \quad B_{11} = - \left(\nu \frac{a_2}{4} + \mu a_1 \right) ,$$

$$(116) \quad B_{13} = - \left(\frac{\nu}{2} \left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_4}{4} \right) + \mu \frac{a_3}{3} \right) ,$$

.....

$$(117) \quad C_{10} = A_{10} - \mu^2 \psi(0) - m\mu\nu \frac{a_1}{2} ,$$

$$(118) \quad C_{12} = A_{12} - \mu^2 \frac{a_2}{2^2} - m \frac{\mu\nu}{2} \left(a_1 + \frac{a_3}{9} \right),$$

..... ,

$$(119) \quad A_{21} = 1 + \frac{\mu^2}{2} \left(L_0 + \frac{L_2}{2} \right) + \mu\nu \left(M_1 + \frac{m}{2} \left(K_0 + \frac{K_2}{2} \right) + \phi_1 \right) - \nu^2 \phi_1,$$

$$(120) \quad A_{23} = \frac{\mu^2}{4} (L_2 + L_4) + \mu\nu \left(M_3 + \frac{m}{4} (K_2 + K_4) + \phi_3 \right) - \mu^2 \phi_3,$$

..... ,

$$(121) \quad B_{21} = - \left(\mu \frac{a_2}{4} + \nu a_1 \right),$$

$$(122) \quad B_{23} = - \left(\frac{\mu}{2} \left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_4}{4} \right) + \mu \frac{a_3}{3} \right),$$

..... ,

$$(122') \quad A_{20} = 1 + \frac{\nu^2}{2} L_0 + \mu\nu \frac{m}{2} (M_1 + K_0 + \phi_1) - \mu^2 \frac{m}{2} \phi_1,$$

$$(123) \quad A_{22} = \frac{\nu^2}{2} L_2 + \mu\nu \frac{m}{2} (M_1 + M_3 + K_2 + \phi_1 + \phi_3) - \mu^2 \frac{m}{2} (\phi_1 + \phi_3),$$

..... ,

$$(124) \quad B_{22} = - \left(\nu \frac{a_2}{2} + \frac{\mu m}{2} \left(a_1 + \frac{a_3}{3} \right) \right),$$

$$(125) \quad B_{24} = - \left(\nu \frac{a_4}{4} + \frac{\mu m}{2} \left(\frac{a_3}{3} + \frac{a_5}{5} \right) \right),$$

..... ,

$$(126) \quad C_{21} = A_{21} - \mu^2 \psi(0) - \mu^2 \frac{a_2}{8} - \mu\nu a_1,$$

$$(127) \quad C_{23} = A_{23} - \mu^2 \frac{1}{2} \left(\frac{a_2}{4} + \frac{a_4}{4^2} \right) - \mu\nu \frac{a_3}{9},$$

.....

Setzen wir weiter

$$(128) \quad I_1 = a_{10} + a_{12} \cos 2\theta + \dots + b_{12} \sin 2\theta + b_{14} \sin 4\theta + \dots,$$

$$(129) \quad I_1' = a_{11} \cos \theta + a_{13} \cos 3\theta + \dots - n\theta + b_{13} \sin 3\theta + \dots,$$

$$(130) \quad I_2 = a_{21} \cos \theta + a_{23} \cos 3\theta + \dots + b_{23} \sin 3\theta + \dots,$$

$$(131) \quad I_2' = a_{20} + a_{22} \cos 2\theta + \dots + b_{22} \sin 2\theta + b_{24} \sin 4\theta + \dots,$$

$$(132) \quad P_1 = c_{10} + c_{12} \cos 2\theta + \dots + b_{12} \sin 2\theta + b_{14} \sin 4\theta + \dots,$$

$$(133) \quad P_2 = c_{21} \cos \theta + c_{23} \cos 3\theta + \dots + b_{21} \sin \theta + b_{23} \sin 3\theta + \dots,$$

so gewinnen wir die Fourierschen Konstanten

$$(134) \quad a_{i0} = A_{i0} + \frac{A_{i2}}{2} a_2 + \frac{A_{i4}}{2} a_4 + \dots,$$

$$(135) \quad a_{i2} = A_{i0} a_2 + A_{i2} \left(1 + \frac{a_4}{2} \right) + \frac{A_{i4}}{2} (a_2 + a_6) + \frac{A_{i6}}{2} (a_4 + a_6) + \dots,$$

$$(136) \quad a_{i4} = A_{i0} a_4 + \frac{A_{i2}}{2} (a_2 + a_6) + A_{i4} \left(1 + \frac{a_8}{2} \right) + \frac{A_{i6}}{2} (a_2 + a_{10}) + \dots,$$

.....

$$(137) \quad b_{i2} = B_{i2} \left(1 - \frac{a_4}{2} \right) + \frac{B_{i4}}{2} (a_2 - a_6) + \frac{B_{i6}}{2} (a_4 - a_8) + \dots,$$

$$(138) \quad b_{i4} = \frac{B_{i2}}{2} (a_2 - a_6) + B_{i4} \left(1 - \frac{a_8}{2} \right) + \frac{B_{i6}}{2} (a_2 - a_{10}) + \dots,$$

.....

Wenn μ und ν klein genug sind, um ihre höheren Ordnungen zu vernachlässigen, so werden die Ströme in den folgenden Formen ausgedruckt,

$$(148) \quad i_1 = \frac{C_1 e^{-\mu_0} \sqrt{1-m}}{1-m \cos^2 \theta} I \left\{ 1 - \left(\mu \frac{a_2}{2} + \frac{\nu m}{2} \left(a_1 + \frac{a_3}{3} \right) \right) \sin 2\theta \right\}$$

$$\frac{\sqrt{1-m} C_2 m e^{-\nu_0} I}{1-m \cos^2 \theta} \left\{ \cos \theta - \left(\nu \frac{a_2}{4} + \mu \frac{a_1}{2} \right) \sin \theta \right\}$$

$$+ \frac{I \sqrt{1-m}}{1-m \cos^2 \theta} \left\{ 1 - \left(\mu \frac{a_2}{2} + \frac{\nu m}{2} \left(a_1 + \frac{a_3}{3} \right) \right) \sin 2\theta \right\},$$

$$(149) \quad i = -\frac{M_0}{L_2} \frac{C_1 e^{-\mu_0}}{1-m \cos^2 \theta} I \left\{ \cos \theta - \left(\mu \frac{a_2}{4} + \nu a_1 \right) \sin \theta \right\} \sqrt{1-m}$$

$$+ \frac{M_0}{L_2} \frac{C_2 e^{-\nu_0}}{1-m \cos^2 \theta} I \left\{ 1 - \left(\nu \frac{a_2}{2} + \mu \frac{m}{2} \left(a_1 + \frac{a_3}{3} \right) \right) \sin 2\theta \right\} \sqrt{1-m}$$

$$- \frac{M_0}{L_0} \frac{I \sqrt{1-m}}{1-m \cos^2 \theta} \left\{ \cos \theta - \left(\mu \frac{a_2}{4} + \nu a_1 \right) \sin \theta \right\},$$

wobei

$$(150) \quad C_1 = \left(\frac{\left(1 - \left(\nu \frac{a_2}{2} + \mu \frac{m}{2} \left(a_1 + \frac{a_3}{3} \right) \right) \sin 2\varphi \right)}{\left\{ \sqrt{1-m} \left(1 - \frac{(\mu + \nu) \left(\frac{a_2}{2} + \frac{m a_3}{3} - m \frac{a_2}{8} \right)}{1-m \cos^2 \varphi} \sin 2\varphi \right) \right\}} - 1 \right) e^{-\mu \varphi},$$

$$(151) \quad C_2 = \frac{\left\{ \cos \varphi - \left(\mu \frac{a_2}{4} + \nu a_1 \right) \sin \varphi \right\} e^{-\nu \varphi}}{\sqrt{1-m} \left\{ 1 - \frac{(\mu + \nu) \left(\frac{a_2}{2} + \frac{m a_3}{3} - m \frac{a_2}{8} \right)}{1-m \cos^2 \varphi} \sin 2\varphi \right\}}$$

III. SPANNUNG DER NICHT KURZGESCHLOSSENEN ANKERSPULE

Für dreiphasigen Generator, wird die Spannung an der offenen Ankerspule durch den einphasigen Kurzschluss erregt: einerseits infolge der Wechselinduktion zwischen der kurzgeschlossenen und nicht kurzgeschlossenen Ankerspule, andererseits infolge der Wechselinduktion zwischen der Feld- und der nicht kurzgeschlossenen Ankerspule.

Die zusammengesetzte Spannung an der nicht kurzgeschlossenen Ankerspule ist

$$(152) \quad e = -M_0 \omega \frac{d}{d\theta} \left\{ i_1 \cos \left(\theta \pm \frac{2\pi}{3} \right) \right\} + \frac{1}{2K} L_2 \omega \frac{d}{d\theta} (i_2),$$

wobei $K \doteq 1$.

Oder

$$(153) \quad e = +M_0 \omega \frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{c_1 e^{-\mu\theta}}{2} (I_1 - I_2) - \frac{c_2 e^{-\nu\theta}}{2} (mI_1' - I_2') + \frac{1}{2} (I_1 - I_2) \right\} \\ \pm M_0 \omega \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d}{d\theta} \left\{ (c_1 e^{-\mu\theta} I_1 - c_2 m e^{-\nu\theta} I_1' + I_1) \sin \theta \right\}.$$

Die Kurzschlußströme werden durch die Fouriersche Reihe entwickelt und die Fourierschen Konstanten werden numerisch leicht berechnet. Durch Differentiation könnten wir die Spannung erhalten. In der Tat liefert die Reihe wenn m klein ist, ohne weiteres die Spannung, aber in den gewöhnlichen Fällen konvergiert die Reihe zu langsam. Zunächst nehmen wir an dass μ und ν klein genug sind, um die Ordnungen, die höher sind als die erste zu vernachlässigen.

Aus

$$I_1 - I_2 = \nu \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}},$$

$$mI_1' - I_2' = \nu(-1 + [\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]) ,$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{c_1 e^{-\mu_0}}{2} (I_1 - I_2) - \frac{c_2 e^{-\nu_0}}{2} (mI_1' - I_2') + \frac{1}{2} (I_1 - I_2) \right\} \\ &= \frac{\nu}{2} \frac{\cos\theta (c_1 e^{-\mu_0} + 1)}{1 - m \cos^2\theta} + \frac{\nu}{2} \left(\frac{1}{1 - m \cos^2\theta} - 1 \right) c_2 e^{-\nu_0} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\theta} \left\{ (c_1 e^{-\mu_0} I_1 - c_2 m e^{-\nu_0} I_1' + I_1) \sin\theta \right\} \\ &= (c_1 e^{-\mu_0} + 1) \frac{d}{d\theta} I_1 \sin\theta - n\theta - \mu c_1 e^{-\mu_0} \frac{\sin\theta}{1 - m \cos^2\theta} \\ & \quad + \nu m c_2 e^{-\nu_0} \frac{\cos\theta \sin\theta}{1 - m \cos^2\theta} . \end{aligned}$$

Nun

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} (I_1 \sin\theta) &= \left[\frac{(1-m) - m \sin^2\theta}{(1-m \cos^2\theta)^2} \cos\theta - \frac{\mu[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{1 - m \cos^2\theta} \cos\theta \right. \\ & \quad \left. - \frac{\nu \cos 2\theta \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} m}{1 - m \cos^2\theta} - \mu \sin\theta \left\{ \frac{1}{1 - m \cos^2\theta} - 1 \right\} \frac{1}{1 - m \cos^2\theta} \right] \\ & \quad - \frac{\nu \sin\theta \cos^2\theta \cdot m}{(1 - m \cos^2\theta)^2} + \frac{2m \cos\theta \sin\theta}{(1 - m \cos^2\theta)^2} \left\{ \mu[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] \sin\theta \right. \\ & \quad \left. + \nu m \sin\theta \cos\theta \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} \right\} \\ &= \frac{(1-m) - m \sin^2\theta}{(1 - m \cos^2\theta)^2} \cos\theta + \frac{\mu[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{(1 - m \cos^2\theta)^2} \left\{ -\cos\theta + m \cos^3\theta \right. \\ & \quad \left. + 2m \cos\theta \sin^2\theta \right\} \\ & \quad - \nu \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} \left\{ \frac{m \cos^2\theta - 1 + 1 - m \sin^2\theta}{1 - m \cos^2\theta} - \frac{2m^2 \cos^2\theta \sin^2\theta}{(1 - m \cos^2\theta)^2} \right\} \\ & \quad - \frac{\sin\theta \cos^2\theta (\mu + \nu) m}{(1 - m \cos^2\theta)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(1-m)-m \sin^2 \theta}{(1-m \cos^2 \theta)^2} \cos \theta + \nu \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} + \mu \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{(1-m \cos^2 \theta)^2} \times \\
 &\quad \{ \cos \theta (m-1) + m \cos \theta \sin^2 \theta \} \\
 &\quad - \frac{\mu m \sin \theta \cos^2 \theta}{(1-m \cos^2 \theta)^2} - \frac{\nu \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}}}{(1-m \cos^2 \theta)^2} \{ 1 - m - m^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \} \\
 &\quad - \frac{\nu m \sin \theta \cos^2 \theta}{(1-m \cos^2 \theta)^2} .
 \end{aligned}$$

Da

$$\frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} = a_1 \sin \theta + \frac{a_3}{3} \sin 3\theta + \dots$$

$$1.5 > a_1 > 1, \quad a_3 \div 0$$

$$[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta] = a_2 \sin \theta \cos \theta$$

$$1 > a_2 > 0.3,$$

und

$$\mu(m-1) \div 0, \quad \nu(m-1) \div 0,$$

so ist

$$(154) \quad \frac{dI_1 \sin \theta}{d\theta} = \frac{(1-m)-m \sin^2 \theta}{(1-m \cos^2 \theta)^2} \cos \theta + \nu \frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}} .$$

In analoger Weise :

$$\begin{aligned}
 (155) \quad \frac{dI_1'}{d\theta} &= \frac{(2-m) \cos^2 \theta - 1}{(1-m \cos^2 \theta)^2} + \nu \frac{[\lambda_1 + \lambda_2 - \theta]}{(1-m \cos^2 \theta)} \{ 1 - m \cos^2 \theta \\
 &\quad - \mu \cos \theta \frac{\frac{[\lambda_1 - \lambda_2]}{\sqrt{m}}}{(1-m \cos^2 \theta)^2} \} \{ (1-m) - m \sin^2 \theta \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\nu(1-m\sin^2\theta)[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{m(1-m\cos^2\theta)} - \frac{2m\cos^2\theta\sin^2\theta[\lambda_1+\lambda_2-\theta]}{(1-m\cos^2\theta)^2} \\
& - \frac{\cos\theta\sin\theta(m\nu\cos^2\theta+\mu)}{(1-m\cos^2\theta)^2} \\
& \div \frac{(2-m)\cos^2\theta-1}{(1-m\cos^2\theta)^2} + \nu[\lambda_1+\lambda_2-\theta].
\end{aligned}$$

Schliesslich

$$\begin{aligned}
e = & \pm M_0 \omega \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ c_1 e^{-\mu_0} \left[\frac{(1-m)-m\sin^2\theta}{(1-m\cos^2\theta)^2} \cos\theta + \nu \frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}} \right] \right. \\
& - c_2 e^{-\nu_0} m \left[\frac{(2-m)\cos^2\theta-1}{(1-m\cos^2\theta)^2} \right. \\
& \left. \left. + \nu[\lambda_1+\lambda_2-\theta] - \nu \frac{\cos\theta\sin\theta}{1-m\cos^2\theta} \right] \right. \\
& \left. + I\sqrt{1-m} \left[\frac{(1-m)-m\sin^2\theta}{(1-m\cos^2\theta)^2} \cos\theta + \nu \frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}} \right] \right\} \\
& + M_0 \frac{\omega}{2} \left\{ c_1 e^{-\mu_0} \frac{\cos\theta}{1-m\cos^2\theta} - c_2 \nu \frac{m\cos^2\theta e^{-\nu_0}}{1-m\cos^2\theta} - \nu \frac{\cos\theta}{1-m\cos^2\theta} \right\}
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
(156) \quad e \div & \pm M_0 \omega \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ c_1 e^{-\mu_0} \frac{(1-m)-m\sin^2\theta}{(1-m\cos^2\theta)^2} \cos\theta \right. \\
& - c_2 e^{-\nu_0} m \frac{(2-m)\cos^2\theta-1}{(1-m\cos^2\theta)^2} + I\sqrt{1-m} \left[\frac{(1-m)-m\sin^2\theta}{(1-m\cos^2\theta)^2} \cos\theta \right. \\
& \left. \left. + \nu \frac{[\lambda_1-\lambda_2]}{\sqrt{m}} \right] \right\} \\
& + M_0 \frac{\omega}{2} \left\{ c_1 \nu \frac{e^{-\mu_0} \cos\theta}{1-m\cos^2\theta} - c_2 \nu \frac{m\cos^2\theta e^{-\nu_0}}{(1-m\cos^2\theta)^2} + \frac{\nu \cos\theta \cdot I\sqrt{1-m}}{1-m\cos^2\theta} \right\}.
\end{aligned}$$

Es ist zu bemerken, dass die Spannungen beider offenen Ankerwickelungen einander nicht gleich sind. Es wird leicht bestätigt, dass sie tatsächlich ungleich sind.

Aber wenn der Widerstand der Ankerwicklung hinreichend klein ist, kann man das letzte Glied vernachlässigen.

$$(157) \quad e \doteq \pm M_0 \omega \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ c_1 e^{-\nu_0} \frac{(1-m) - m \sin^2 \theta}{(1-m \cos^2 \theta)^2} \cos \theta \right. \\ \left. - c_2 e^{-\nu_0} m \frac{(2-m) \cos \theta - 1}{(1-m \cos^2 \theta)^2} + I \sqrt{1-m} \frac{m - m \sin^2 \theta}{n \cos^2 \theta} \cos \theta \right. \\ \left. + \nu a_1 \sin \theta \right\}.$$

Ein Beispiel ist durch diese Formel berechnet und mit dem Oszillogramm verglichen worden. Die Kurve und das Oszillogramm sind in Fig. III dargestellt.

Wenn die Widerstände ziemlich gross sind, muss man die zweite Ordnung des kleinen Parameter berücksichtigen. In diesem Falle sind die Berechnungen sehr kompliziert. Wir haben nur ein Beispiel der stationären Spannung berechnet: die Kurve des Spannungsverlaufs wird in Fig. III dargestellt und mit dem Oszillogramm verglichen.

IV. NUMERISCHE BEISPIELE

Nehmen wir an, dass

$$(158) \quad m=0,84,$$

so erhalten wir, wie schon gezeigt,

$$(159) \quad \sqrt{1-m} 0,4, \quad a_1=1,43 \quad a_2=0,84 \quad a_3=0,61 \\ a_4=0,36 \quad a_5=0,26 \quad a_6=0,16 \\ a_7=0,11 \quad a_8=0,00$$

Aus Paragraph III folgt

$$(160) \quad \chi(0) = -1,51, \quad \psi(0) = -0,24,$$

$$(161) \quad \phi_1 = 0,87, \quad \phi_3 = 0,18, \quad \phi_5 = 0,06, \quad \phi_7 = 0,02,$$

$$(162) \quad L_0 = 0,09, \quad L_2 = 0,04, \quad L_4 = -0,08, \quad L_6 = -0,03, \\ L_8 = -0,02,$$

$$(163) \quad K_0 = 1,05, \quad K_2 = -0,80, \quad K_4 = 0,21, \quad K_6 = -0,07, \\ K_8 = -0,03, \quad K_{10} = -0,$$

$$(164) \quad M_1 = 0,36, \quad M_3 = -0,23, \quad M_5 = -0,09, \quad M_7 = -0,04, \\ M_9 = -0,01.$$

Folglich

$$A_{10} = 1 + \mu^2 0,0482 + \mu\nu 0,95 - \nu^2 0,36,$$

$$A_{12} = \mu^2 0,0207 + \mu\nu 0,154 - \nu^2 0,435,$$

$$A_{14} = \mu^2 0,04 - \mu\nu 0,119 - \nu^2 0,097,$$

$$A_{16} = \mu^2 0,017 - \mu\nu 0,08 - \nu^2 0,032,$$

$$B_{12} = -(\mu 0,43 + \nu 0,68),$$

$$B_{14} = -(\mu 0,09 + \nu 0,107),$$

$$B_{16} = -(\mu 0,026 + \nu 0,0285),$$

$$B_{18} = -(\mu 0,008 + \nu 0,007),$$

$$A_{11} = 1 + \nu^2 0,0586 + \mu\nu 1,51 - \mu^2 0,87,$$

$$A_{13} = -\nu^2 0,0097 - \nu\mu 0,264 - \mu^2 0,177,$$

$$A_{15} = -\nu^2 0,026 - \mu\nu 0,085 - \mu^2 0,056 ,$$

$$A_{17} = -\nu^2 0,012 - \mu\nu 0,045 - \mu^2 0,021 ,$$

$$B_{11} = -\nu 0,215 - \mu 1,43 ,$$

$$B_{13} = -\nu 0,26 - \mu 0,203 ,$$

$$B_{15} = -\nu 0,058 - \mu 0,052 ,$$

$$B_{17} = -\nu 0,017 - \mu 0,016 ,$$

$$C_{10} = A_{10} + \mu^2 0,24 + \mu\nu 0,2 ,$$

$$C_{12} = A_{12} - \mu^2 0,21 - \mu\nu 0,65 ,$$

$$C_{14} = A_{14} - \mu^2 0,0225 - \mu\nu 0,03 ,$$

$$C_{16} = A_{16} - \mu^2 0,004 - \mu\nu 0,002 ,$$

$$A_{20} = 1 + \nu^2 0,0482 + \mu\nu 0,95 - \mu^2 0,36 ,$$

$$A_{22} = \nu^2 0,0207 + \mu\nu 0,154 - \mu^2 0,435 ,$$

$$A_{24} = \nu^2 0,04 - \mu\nu 0,119 - \mu^2 0,097 ,$$

$$A_{26} = \nu^2 0,017 - \mu\nu 0,08 - \mu^2 0,032 ,$$

$$B_{22} = -(\nu 0,43 + \mu 0,68) ,$$

$$B_{24} = -(\nu 0,09 + \mu 0,107) ,$$

$$B_{26} = -(\nu 0,026 + \mu 0,0285) ,$$

$$B_{28} = -(\nu 0,008 + \mu 0,007) ,$$

$$A_{21} = 1 + \mu^2 0,0586 + \mu\nu 1,51 - \nu^2 0,87 ,$$

$$A_{23} = -\mu^2 0,0097 - \mu\nu 0,264 - \nu^2 0,177 ,$$

$$A_{25} = -\mu^2 0,026 - \mu\nu 0,085 - \nu^2 0,056 ,$$

$$A_{27} = -\mu^2 0,012 - \mu\nu 0,045 - \nu^2 0,021 ,$$

$$B_{21} = -\mu 0,215 - \nu 1,43 ,$$

$$B_{23} = -\mu 0,26 - \nu 0,203 ,$$

$$B_{25} = -\mu 0,058 - \nu 0,052 ,$$

$$B_{27} = -\mu 0,017 - \nu 0,016 ,$$

$$C_{20} = A_{21} + \mu^2 0,14 + \mu\nu 1,4$$

$$C_{22} = A_{13} - \mu^2 0,115 - \nu\mu 0, \dots ,$$

$$C_{24} = A_{15} - \mu^2 0,01 - \mu\nu 0,01 .$$

Führen wir nun die Substitution $\mu = 0,27$, $\nu = 0,5$, $\mu\nu = 0,135$, $\nu^2 = 0,25$, $\mu^2 = 0,071$ ein, so ergibt sich das Konstantensystem.

TABELLE II.

A_{10}	1,04	A_{11}	1,16	C_{10}	0,97	A_{21}	0,99	A_{20}	1,12	C_{21}	0,82
A_{12}	-0,09	A_{13}	-0,05	C_{12}	-0,19	A_{23}	-0,08	A_{22}	-0,00	C_{23}	-0,10
A_{14}	-0,04	A_{15}	-0,02	C_{14}	-0,04	A_{25}	-0,03	A_{24}	-0,01	C_{25}	-0,03
A_{16}	-0,02	A_{17}	-0,01	C_{16}	-0,02	A_{27}	-0,01	A_{26}	-0,01	C_{27}	-0,01
B_{12}	-0,46	B_{11}	-0,49	B_{12}	-0,46	B_{21}	-0,77	B_{22}	-0,40	B_{21}	-0,77
B_{14}	-0,08	B_{13}	-0,18	B_{14}	-0,08	B_{23}	-0,17	B_{24}	-0,07	B_{23}	-0,17
B_{16}	-0,02	B_{15}	-0,04	B_{16}	-0,02	B_{25}	-0,04	B_{26}	-0,02	B_{25}	-0,04
B_{18}	-0,01	B_{17}	-0,01	B_{18}	-0,01	B_{27}	-0,01	B_{28}	-0,01	B_{27}	-0,01

Daraus und aus Paragraph III

TABELLE III.

a_{10}	0,99	a_{11}	1,63	c_{10}	0,88	a_{21}	1,35	a_{20}	1,12	c_{21}	1,12
a_{12}	0,75	a_{13}	0,65	c_{12}	0,61	a_{23}	0,50	a_{22}	0,94	c_{23}	0,37
a_{14}	0,29	a_{15}	0,26	c_{14}	0,20	a_{25}	0,20	a_{24}	0,40	c_{25}	0,14
a_{16}	0,11	a_{17}	0,08	c_{16}	0,09	a_{27}	0,05	a_{26}	0,16	c_{27}	0,05
a_{18}	0,04	a_{19}	0,03	c_{18}	0,03	a_{29}	0,02	a_{28}	0,06	c_{29}	0,01
b_{12}	-0,42	b_{21}	-0,33	b_{12}	-0,42	b_{21}	-0,49		-0,37	b_{21}	-0,49
b_{14}	-0,24	b_{23}	-0,31	b_{14}	-0,24	b_{23}			0,21	b_{23}	-0,37
b_{16}	-0,12	b_{25}	-0,16	b_{16}	-0,12	b_{25}			0,10	b_{25}	-0,19
b_{18}	-0,05	b_{27}	-0,07	b_{18}	-0,05	b_{27}	-0,09	b_{28}	-0,04	b_{27}	-0,09
										b_{29}	-0,04

V. VERGLEICH MIT DEM OSZILLOGRAMM

Hier soll gezeigt werden, dass die oben gewonnenen Resultate mit den Oszillogrammen genau übereinstimmen. Wenn die magnetische Sättigung bemerkbar ist, sind die fundamentalen Differentialgleichungen nicht brauchbar. Deswegen haben wir nur den Fall untersucht, wo der Feldstrom hinreichend klein ist.

Die Maschine, die wir gebraucht haben, war ein 5 K.V.A. dreiphasen Generator der Oana Seisakujo, Tokyo, 110-220 Volt verkettete Spannung, 1500-1600 Umdr. i.d., Min. 59-60 Perioden.

Die Induktivitäten wurden in dem Falle, wo der Feldstrom nicht gross ist, gemessen

$$L_1 = 7,4 \text{ henry ,}$$

$$L_2 = 0,0083 \text{ henry ,}$$

$$M_0 = 0,277 \text{ henry .}$$

Daraus

$$(165) \quad m = \frac{M_0^2 \omega^2}{L_1 \omega L_2 \omega} = 0,84, \quad \frac{M_0}{L_2} = 27.$$

Zuerst haben wir den Fall untersucht, wo die Widerstände

$$R_1 = 300 \text{ ohm},$$

$$R_2 = 0,25 \text{ ohm}$$

sind.

Daraus

$$(167) \quad \mu = \frac{R_1}{\omega L_1 \sqrt{1-m}} = 0,27, \quad \nu = \frac{R_2}{\omega L_2 \sqrt{1-m}} = 0,20,$$

$$(168) \quad \mu^2 = 0,07, \quad \nu^2 = 0,04, \quad \mu\nu = 0,05.$$

In diesem Falle brauchen wir nur die erste Ordnung des kleinen Parameter zu berücksichtigen und können unmittelbar durch die Formel die Kurzschlußströme berechnen.

Fig. I, *a* zeigt das Oszillogramm der Ströme, die in dem Moment, wo $\varphi=0$ d.h. im Nullwert der Spannung, kurzgeschlossen wurden. Fig. I *b* und *c* zeigen die berechneten Kurzschlußströme der Feld- und der Ankerwicklung. Fig. II *a* zeigt das Oszillogramm der Ströme, welche in dem Moment wo $\varphi=75^\circ$ kurzgeschlossen wurden. Fig. II *b* und *c* zeigen die berechneten Kurzschlußströme der Feld- und der Ankerwicklung. Fig. III *a*, zeigt das Oszillogramm des Kurzschlußstroms der Feldwicklung, der Spannung der nicht kurzgeschlossenen Ankerwicklung, welche in dem Moment $\varphi=105^\circ$ kurzgeschlossen wurden. Fig. III *b* zeigt den berechneten Kurzschlußstrom der Feldwicklung, Fig. III *c* die Spannung der nicht kurzgeschlossenen Ankerwicklung und Fig. III *d* den berechneten Ankerstrom.

Weiter haben wir den Fall untersucht, wo

$$\mu = 0,27, \quad \nu = 0,50.$$

In diesem Falle haben wir schon in dem vorigen Paragraphen die Fourierschen Konstanten berechnet. Die Kurven des Kurzschlußstromverlaufs und der Spannung sind in Fig. IV *a*, *b*, *c* und *d* dargestellt und mit dem Oszillogramm verglichen.

In der Tat ist bemerkbar, dass der Kurzschlußstrom durch den Einfluss der Widerstände vermindert wird.

VI. INDUKTIVE BELAS' G

Als letztes Beispiel betrachten wir der sich bei induktiver Belastung der Synchronmaschine abspielt. Es ist bekannt, dass sich der Kurzschlußstrom erheblich vermindert, wenn man die induktive Spule in der Wickelung einsetzt. Die Spule, die wir gebraucht haben, besaß die Induktivität 0.0045 henry und den Widerstand 0.76 Ohm.

Die ganze Induktivität der Ankerwicklung ist also gleich 0.0128 henry und der ganze Widerstand der Wickelung ist gleich 0.97 Ohm. Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}
 m &= 0,55, & \mu &= 0,15, & \nu &= 0,30, \\
 a_1 &= 1,20, & a_2 &= 0,40, & a_3 &= 0,24, & a_4 &= 0,08, \\
 a_5 &= 0,04, & a_6 &= 0,01, \\
 -\chi(0) &= 1,23, & -\psi(0) &= 0,10, \\
 \phi_1 &= 0,97, & \phi_3 &= 0,09, & \phi_5 &= 0,01, \\
 L_0 &= 0,02, & L_4 &= -0,02, \\
 K_0 &= 0,72, & K_2 &= -0,62, & K_4 &= -0,08, & K_6 &= 0,01, \\
 M_1 &= 0,13, & M_3 &= -0,11, & M_5 &= -0,02.
 \end{aligned}$$

$$A_{10}=1+\mu^2 0,05+\mu\nu 0,95-\nu^2 0,36,$$

$$A_{12}=\mu^2 0,02+\mu\nu 0,15-\nu^2 0,44,$$

$$A_{14}=\mu^2 0,04-\mu\nu 0,12-\nu^2 0,10,$$

$$A_{16}=\mu^2 0,02-\mu\nu 0,08-\nu^2 0,03,$$

$$B_{12}=-\mu 0,43-\nu 0,68,$$

$$B_{14}=-\mu 0,09-\nu 0,11,$$

$$B_{16}=-\mu 0,03-\nu 0,03,$$

$$B_{18}=-\mu 0,01-\nu 0,01,$$

$$A_{11}=1+\nu^2 0,06+\mu\nu 1,51-\mu^2 0,87,$$

$$A_{13}=-\nu^2 0,01-\mu\nu 0,26-\mu^2 0,18,$$

$$A_{15}=-\nu^2 0,03-\mu\nu 0,08-\mu^2 0,06,$$

$$A_{17}=-\nu^2 0,01-\mu\nu 0,04-\mu^2 0,02,$$

$$B_{11}=-\nu^2 0,22-\mu 1,43,$$

$$B_{13}=-\nu 0,26-\mu 0,20,$$

$$B_{15}=-\nu 0,06-\mu 0,05,$$

$$B_{17}=-\nu 0,02-\mu 0,02,$$

$$C_{10}=A_{10}+\mu^2 0,24-\mu\nu 0,62,$$

$$C_{12}=A_{12}-\mu^2 0,21-\mu\nu 0,65,$$

$$C_{14}=A_{14}-\mu^2 0,02-\mu\nu 0,03,$$

$$C_{16}=A_{16}.$$

$$A_{21} = 1 + \mu^2 0,06 + \mu\nu 1,51 - \nu^2 0,87 ,$$

$$A_{23} = -\mu^2 0,01 - \mu\nu 0,26 - \nu^2 0,18 ,$$

$$A_{25} = -\mu^2 0,03 - \mu\nu 0,08 - \nu^2 0,06 ,$$

$$A_{27} = -\mu^2 0,01 - \mu\nu 0,04 - \nu^2 0,02 ,$$

$$B_{21} = -\mu 0,22 - \nu 1,43 ,$$

$$B_{23} = -\mu 0,26 - \nu 0,20 ,$$

$$B_{25} = -\mu 0,06 - \nu 0,05 ,$$

$$B_{27} = -\mu 0,02 - \nu 0,02 ,$$

$$A_{20} = 1 + \nu^2 0,05 + \mu\nu 0,95 - \mu^2 0,36 ,$$

$$A_{22} = \nu^2 0,02 + \mu\nu 0,15 - \mu^2 0,44 ,$$

$$A_{24} = \nu^2 0,04 - \mu\nu 0,12 - \mu^2 0,10 ,$$

$$A_{26} = \nu^2 0,02 - \mu\nu 0,08 - \mu^2 0,03 ,$$

$$B_{22} = -\nu 0,43 - \mu 0,68 ,$$

$$B_{24} = -\nu 0,09 - \mu 0,11 ,$$

$$B_{26} = -\nu 0,03 - \mu 0,03 ,$$

$$B_{28} = -\nu 0,01 - \mu 0,01 ,$$

$$C_{21} = A_{21} + \mu^2 0,14 - \mu\nu 1,43 ,$$

$$C_{23} = A_{23} - \mu^2 0,12 - \mu\nu 0,07 ,$$

$$C_{25} = A_{25} - \mu^2 0,01 - \mu\nu 0,01 .$$

Wie schon gezeigt, wird das System der Fourierschen Konstanten berechnet und in den folgenden Tabellen zusammengestellt.

TABELLE IV.

A_{10}	1,00	A_{11}	1,04	C_{10}	0,98	A_{21}	1,97	A_{20}	1,02	C_{21}	0,92
A_{12}	0,03	A_{13}	0,00	C_{12}	0,01	A_{23}	0,000	A_{22}	0,00	C_{23}	0,00
A_{14}	-0,02	A_{15}	0,00	C_{14}	-0,01						
B_{12}	-0,14	B_{11}	-0,21	B_{12}	-0,14	B_{21}	-	B_{22}	-0,11	B_{21}	-0,38
B_{14}	-0,01	B_{13}	-0,04	B_{14}	-0,0			B_{24}	-0,01	B_{23}	-0,04

TABELLE V.

a_{10}	1,00	a_{11}	1,25	c_{10}	0,98	a_{21}	1,17	a_{20}	1,02	c_{21}	1,10
a_{12}	0,43	a_{13}	0,25	c_{12}	0,40	a_{23}	0,23	a_{22}	0,40	c_{23}	0,22
a_{14}	0,07	a_{15}	0,05	c_{14}	-0,00	a_{25}	0,04	a_{24}	0,08	c_{25}	0,04
b_{12}	-0,14	b_{11}	-0,18	b_{12}	-0,14	b_{21}	0,30	b_{22}	-0,11	b_{21}	-0,30
b_{14}	-0,03	b_{13}	-0,08	b_{14}	-0,03	b_{23}	0,10	b_{24}	-0,04	b_{23}	-0,10
						b_{25}	-0,02			b_{25}	-0,02

Aus den Tabellen ist klar, dass die Fouriersche Reihe schnell konvergiert. Daher können wir in dem Falle die Ströme leicht durch trigonometrische Polynome abschätzen. Die Oszillogramm und die Kurven des Kurzschlussverlaufs werden in den Fig. V *a*, *b*, *c*, und VI *a*, *b*, *c* gezeigt.

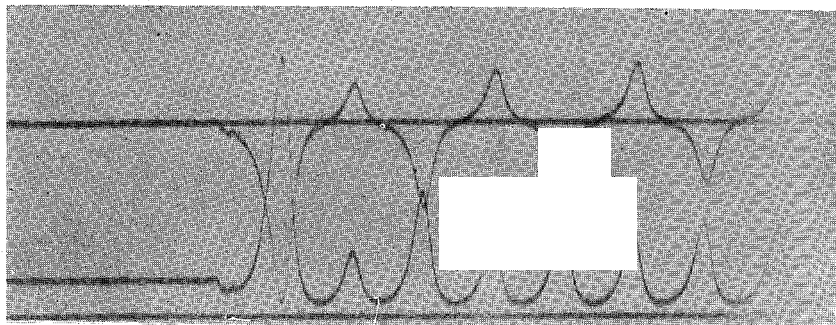


Fig. I a.

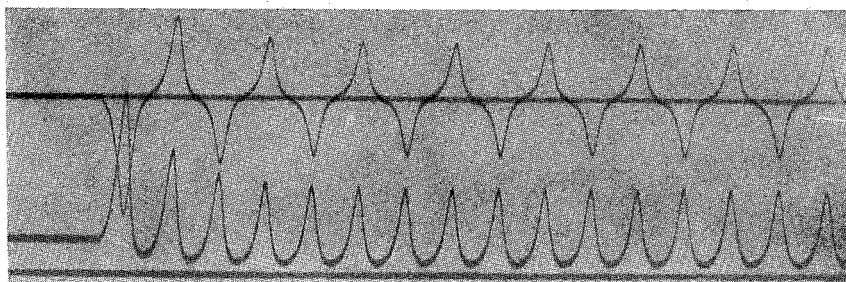


Fig. II a.

Y. Ikeda u. M. Mori : Einphasiger Kurzschluss der Synchronmaschine.

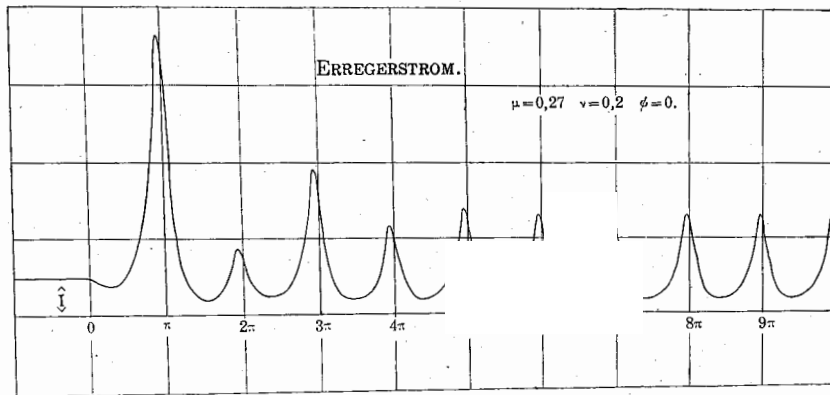


Fig. I b.

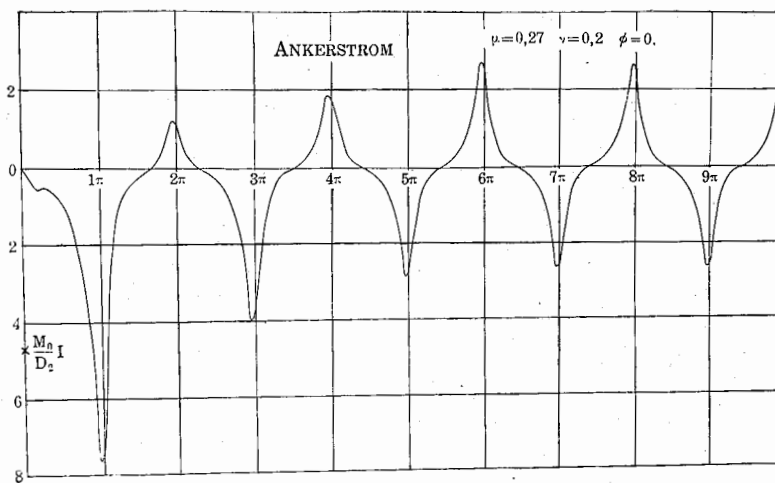


Fig. I c.

Y. Ikeda u. M. Mori : *Einphasiger Kurzschluss der Synchronmaschine.*

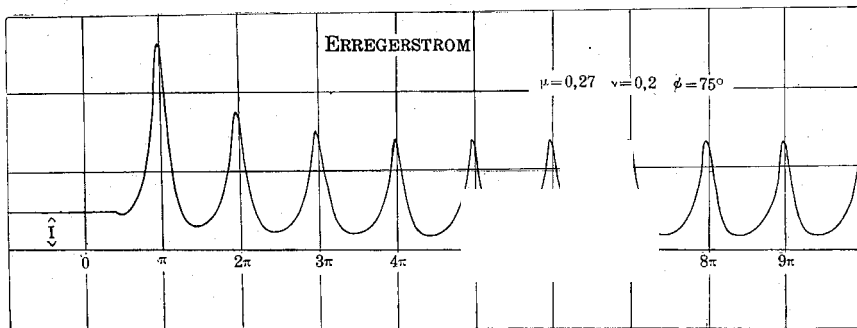


Fig. II b.

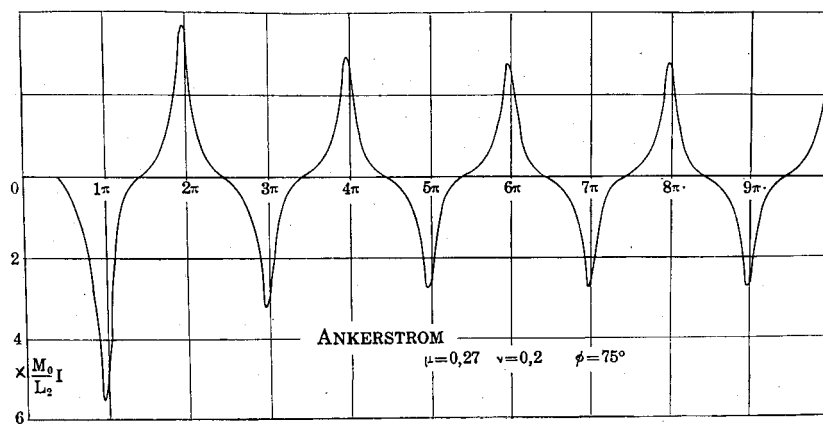


Fig. II c.

Y. Ikeda u. M. Mori: Einphasiger Kurzschluss der Synchronmaschine.



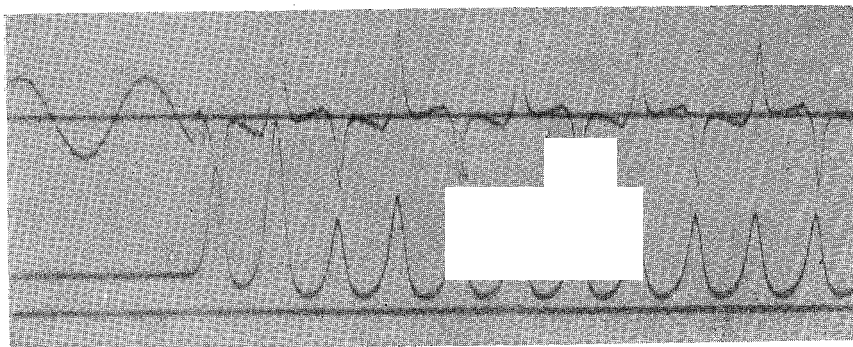


Fig. III a.

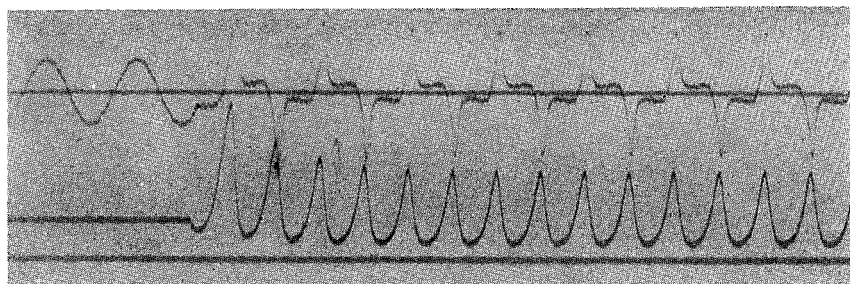


Fig. IV a.

Y. Ikeda u. M. Mori: *Einphasiger Kurzschluss der Synchronmaschine.*

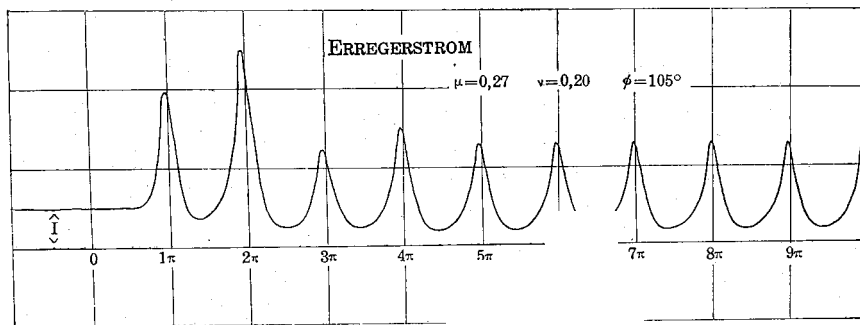


Fig. III b.

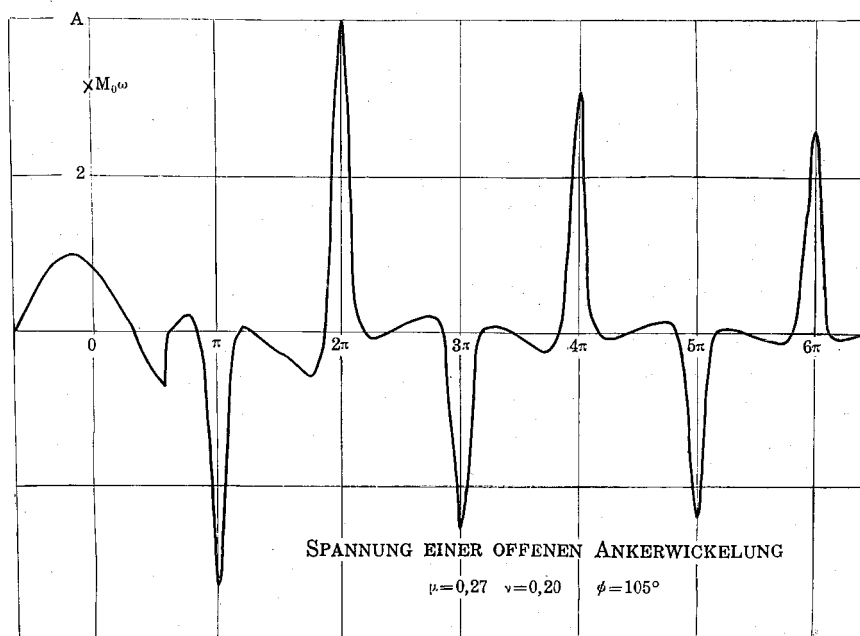


Fig. III c.

Y. Ikeda u. M. Mori: Einphasiger Kurzschluss der Synchronmaschine.



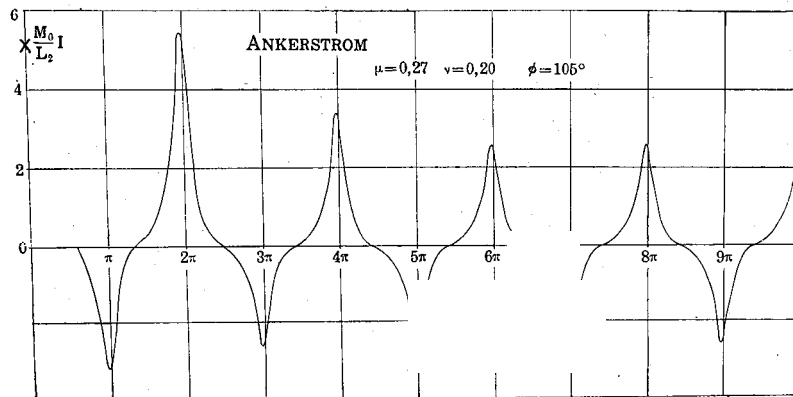


Fig. III d.

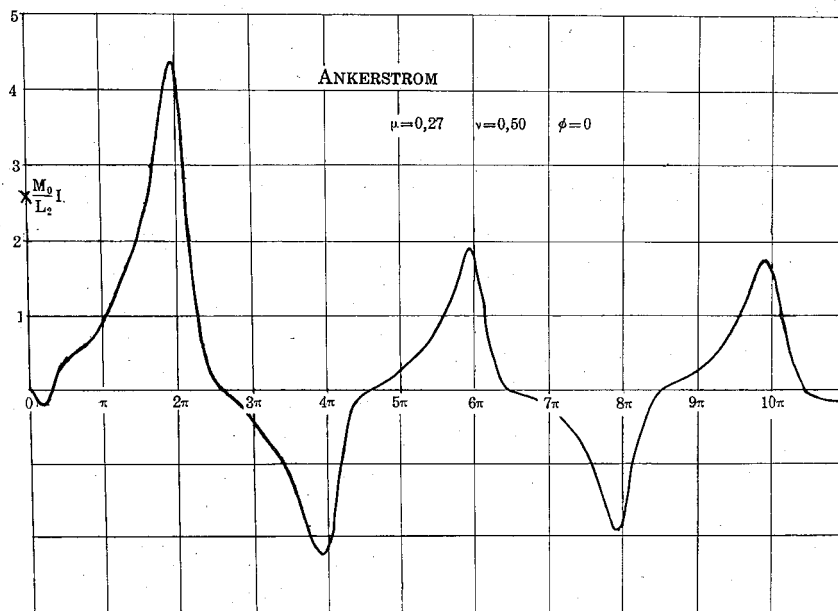


Fig. IV d.

Y. Ikeda u. M. Mori: Einphasiger Kurzschluss der Synchronmaschine.



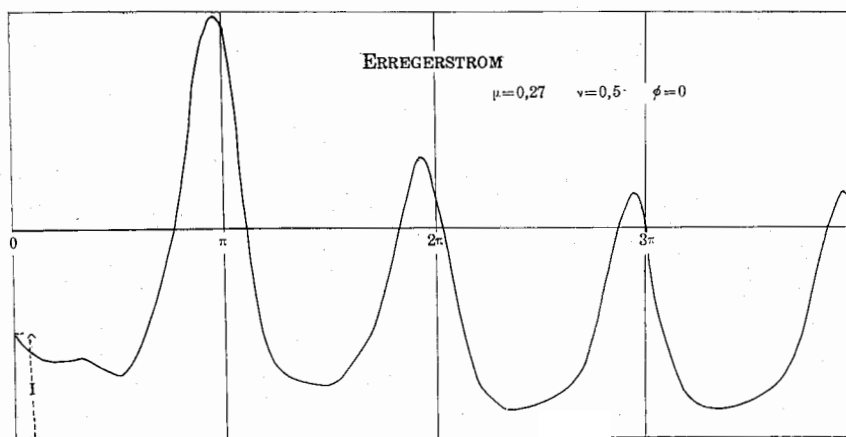


Fig. 1

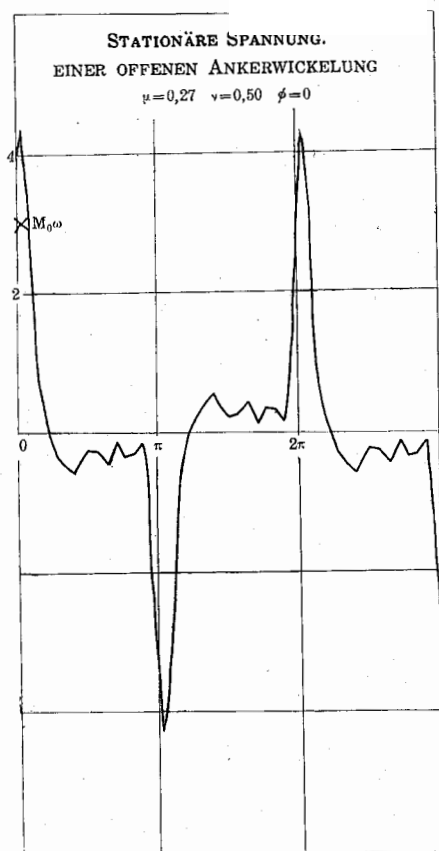


Fig. IV c.

Y. Ikeda u. M. Mori: Einphasiger Kurzschluss der Synchronmaschine.

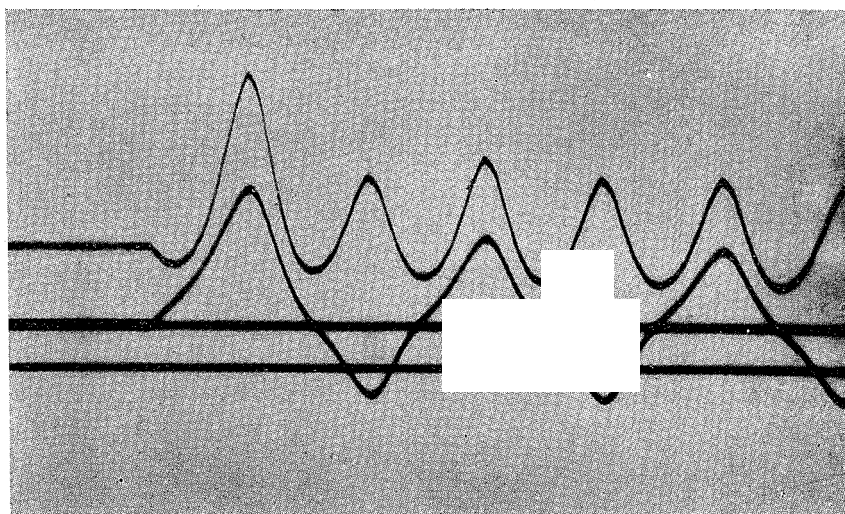


Fig. V a.

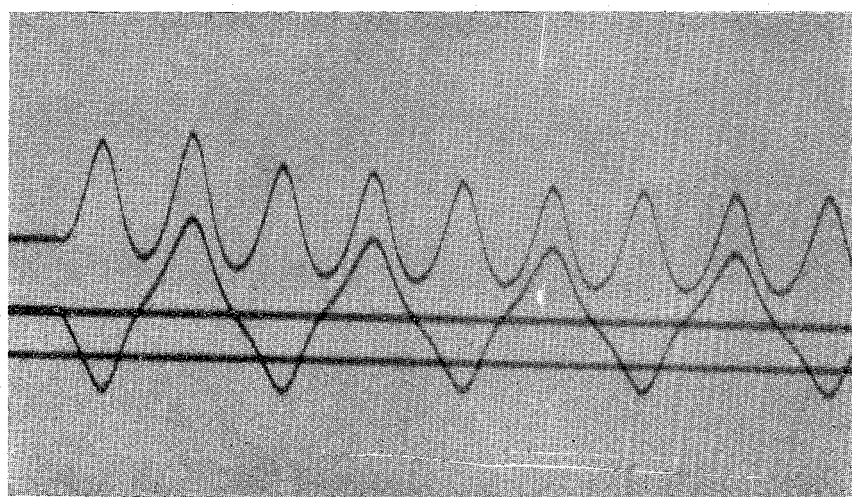


Fig. VI a.

Y. Ikeda u. M. Mori: Einphasiger Kurzschluss der Synchronmaschine.



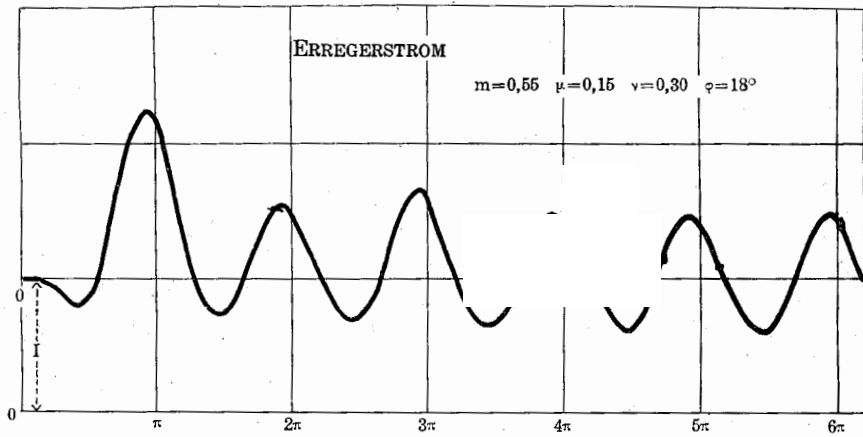


Fig. V b.

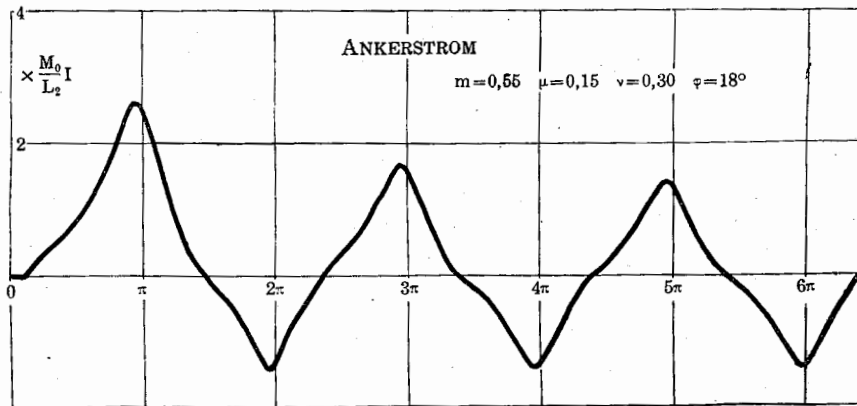


Fig. V c.

Y. Ikeda u. M. Mori: *Einphasiger Kurzschluss der Synchronmaschine.*



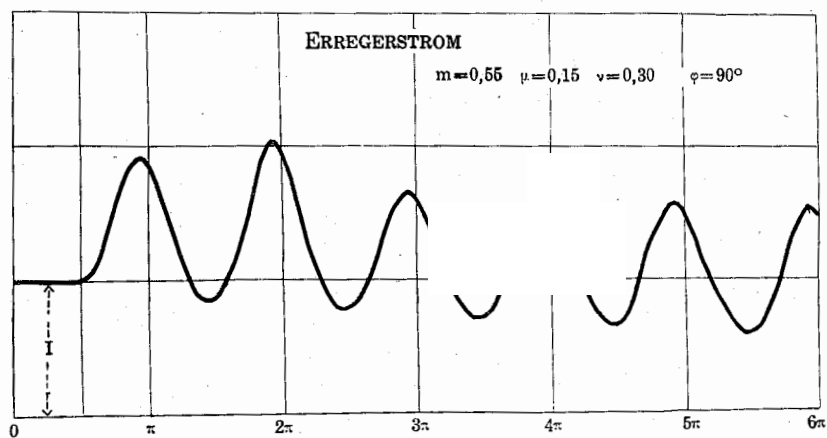


Fig. VI b.

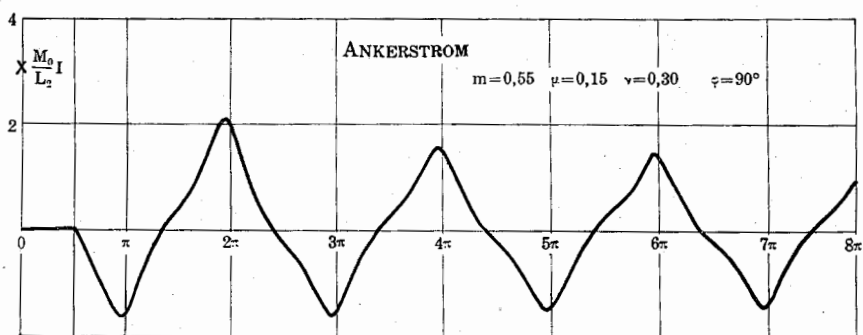


Fig. VI c.

Y. Ikeda u. M. Mori: *Einphasiger Kurzschluss der Synchronmaschine.*

