HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Eine Bemerkung zur Ausstrahlung beim Zusammenstoss von zwei schnellen geladenen Teilchen I
Author(s)	Umeda, Kwai
Citation	北海道帝國大學理學部紀要, 1(10), 295-301
Issue Date	1937-10-31
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/34463
Type	departmental bulletin paper
File Information	1_P295-301.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

EINE BEMERKUNG ZUR AUSSTRAHLUNG BEIM ZUSAMMENSTOSS VON ZWEI SCHNELLEN GELADENEN TEILCHEN I.[1]

Von

Kwai UMEDA.

(Eingegangen am 9. September 1937.)

Es wird gezeigt, daß man den differentiellen Wirkungsquerschnitt für die Ausstrahlung beim Zusammenstoß von zwei schnellen geladenen Teilchen auch einfach und elementar nach der gewöhnlichen DIRAC-FERMIschen Strahlungstheorie erhalten kann.

1. EINLEITUNG.

Vom klassischen Standpunkte aus können die Zusammenstöße zwei freier Elektronen miteinander keine merkliche Absorptions- oder Emissionswirkung haben. Zwei stoßende Elektronen erfahren ja entgegengesetzt gleiche Beschleunigungen, weil sie dieselbe Ladung und Masse haben. Hierdurch wird das gesamte elektrische Moment der zwei Elektronen sehr nahe Null und kann also keine Ein- oder Ausstrahlung veranlassen[2]. Aber nach der Quantenmechanik ist dieser Effekt doch zu erwarten. Das vorläufige Ergebniß für den differentiellen Wirkungsquerschnitt bei diesem Effekt wurde von MØLLER[3] nach der Korrespondenz-Methode und dann nach der Quantenelektrodynamik in der FOCKschen Form angegeben. Zum selben Resultat kann man auch elementar nach der gewöhnlichen DIRAC-FERMIschen Strahlungstheorie ohne besondere Kunstgriffe gelangen, wie es im folgenden gezeigt wird.

(1) Die Arbeit ist im Institut von Prof. HEISENBERG in Leipzig im Jahre 1935 entstanden. Ihr Inhalt wurde im Seminar der Nishina-Abteilung des Rikagaku-Kenkyusho (The Institute of Physical and Chemical Research) zu Tokyo im Jahre 1935 vorgetragen. Aus technischen Gründen hat sich ihre Veröffentlichung verzögert.

(2) S. ROSSLAND: Astrophysik, Berlin 1931, S. 48. Darauf hat mich Herr Dr. MAJUMDAR im Jahre 1934 in Leipzig freundlicherweise hingewiesen.

(3) C. MØLLER: *Proc. Roy. Soc. London*, **152** (1935), 481.

2. ÜBERGANGSWEGE.

Es handelt sich um den differentiellen Wirkungsquerschnitt für den Prozeß, daß ein Lichtquant mit dem Impuls $\mathfrak{k}$[4] und einer bestimmten Polarisation $e_\mathfrak{k}$ beim Übergang zweier Teilchen vom Anfangszustand A ($\mathfrak{p}_1^0$, E_1^0; $\mathfrak{p}_2^0$, E_2^0) zum Endzustand E ($\mathfrak{p}_1$, E_1; $\mathfrak{p}_2$, E_2) ausgestrahlt wird. Zwischen Anfangs- und Endzustand des ganzen Systems sollen Impuls und Energie erhalten bleiben:

$$\mathfrak{p}_1^0 + \mathfrak{p}_2^0 = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{k}$$

und

$$E_1^0 + E_2^0 = E_1 + E_2 + k \,.$$

Es wird angenommen, daß zwei geladene Teilchen 1 und 2 der Diracschen Gleichung mit der Masse m_1 bezw. m_2 und mit der Ladung e_1 bezw. e_2 gehorchen. Der Zustand, der durch den Impuls $\mathfrak{p}_j$, die Spinvariable s_j und die Energie E_j charakterisiert ist, lässt sich beschreiben durch

$$\psi_{\mathfrak{p}_j, s_j}(\mathfrak{r}_j, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} u_{\mathfrak{p}_j, s_j} e^{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{(\mathfrak{p}_j \mathfrak{r}_j)}{c} - E_j t\right]} \qquad j = 1, 2.$$

$u_{\mathfrak{p}_j, s_j}$ soll auf 1 normiert angenommen werden:

$$u^*_{\mathfrak{p}_j, s_j} u_{\mathfrak{p}_j, s_j} = 1 \,.$$

Die Störungen rühren eigentlich von der Wechselwirkung der Teilchen mit dem Strahlungsfeld her. Die Wirkung der longitudinalen Wellen reduziert sich aber auf die Coulombsche Wechselwirkung zweier Teilchen. Die gesamte Störung W wird gegeben durch

$$W = H + V$$

$$H = -e_1(\boldsymbol{\alpha}^{(1)} \cdot \mathfrak{A}(\mathfrak{r}_1)) - e_2(\boldsymbol{\alpha}^{(2)} \cdot \mathfrak{A}(\mathfrak{r}_2))$$

$$V = \frac{e_1 e_2}{r_{12}} \,.$$

(4) Der Impuls z.B. $\mathfrak{k}$ ist in der Energieeinheit gemessen. In der gewöhnlichen Einheit wird er durch $\frac{\mathfrak{k}}{c}$ gegeben.

Das Problem ist der allgemeine Fall der Bremsstrahlung. Da die letzte an und für sich ein Prozeß dritter Ordnung ist[5], sollten drei Lichtquanten und daher zwei Zwischenzustände (I) und (II) auch in unserem Fall auftreten. Daß aber nur ein Lichtquant mit dem Impuls $\mathfrak{k}$ schließlich übrig bleiben soll, hat zur Folge, daß außerdem nur noch ein Lichtquant mit dem Impuls $\mathfrak{g}$ auftritt, das zunächst emittiert und später wieder absorbiert wird. Da Impulse bei der Emission oder Absorption eines Lichtquants durch ein freies Elektron erhalten werden, kommen folgende verschiedenen Übergangswege in Betracht.

(a) Emission $\mathfrak{g}$—Absorption $\mathfrak{g}$—Emission $\mathfrak{k}$

$$[1]\begin{cases} \mathrm{A}: & \mathfrak{p}_1^0 \\ \mathrm{I}: & \mathfrak{p}_1' \\ \mathrm{II}: & \mathfrak{p}_1' \\ \mathrm{E}: & \mathfrak{p}_1 \end{cases}\begin{matrix} \}\to \mathfrak{g} \\ \\ \}\to \mathfrak{k} \\ \end{matrix}\quad\begin{matrix} \mathfrak{p}_2^0 \\ \mathfrak{p}_2^0 \\ \mathfrak{p}_2 \\ \mathfrak{p}_2 \end{matrix}\begin{matrix} \\ \}\leftarrow \mathfrak{g} \\ \\ \end{matrix}$$

$$[2]\begin{cases} \mathrm{A}: & \mathfrak{p}_1^0 \\ \mathrm{I}: & \mathfrak{p}_1^0 \\ \mathrm{II}: & \mathfrak{p}_1' \\ \mathrm{E}: & \mathfrak{p}_1 \end{cases}\begin{matrix} \\ \}\leftarrow -\mathfrak{g} \\ \}\to \mathfrak{k} \\ \end{matrix}\quad\begin{matrix} \mathfrak{p}_0^2 \\ \mathfrak{p}_2 \\ \mathfrak{p}_2 \\ \mathfrak{p}_2 \end{matrix}\begin{matrix} \}\to -\mathfrak{g} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\mathfrak{g} \equiv \mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_2^0$$

$$\mathfrak{p}_1' + \mathfrak{g} = \mathfrak{p}_1^0$$

$$\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{k} = \mathfrak{p}_1'$$

$$\mathfrak{p}_1' + \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_1^0 + \mathfrak{p}_2^0 .$$

Zwischen (A) und (II) bleiben die Impulse der Teilchen unter sich erhalten, was auch einen direkten Übergang durch die statische Coulombsche Wechselwirkung zweier Teilchen ermöglicht, d.h.

$$[3]\begin{cases} \mathrm{A}: & \mathfrak{p}_1^0 \\ \mathrm{I}: & \cdots \\ \mathrm{II}: & \mathfrak{p}_1' \\ \mathrm{E}: & \mathfrak{p}_1 \end{cases}\begin{matrix} \} \\ \\ \}\to \mathfrak{k} \\ \\ \end{matrix}\ \mathrm{C}\ \begin{cases} \mathfrak{p}_2^0 \\ \cdots \\ \mathfrak{p}_2 \\ \mathfrak{p}_2 \end{cases}$$

(5) Z.B. W. HEITLER: The Quantum Theory of Radiation, Oxford 1936, S. 160.

(b) Emission $\mathfrak{f}$—Emission $\mathfrak{g}$—Absorption $\mathfrak{g}$

$$[4]\begin{cases} \mathbf{A}: & \mathfrak{p}_1^0 \\ \mathbf{I}: & \mathfrak{p}_1'' \\ \mathbf{II}: & \mathfrak{p}_1 \\ \mathbf{E}: & \mathfrak{p}_1 \end{cases}\begin{matrix}\}\rightarrow \mathfrak{f} \\ \}\rightarrow \mathfrak{g} \\ \\ \end{matrix}\begin{cases} \mathfrak{p}_2^0 \\ \mathfrak{p}_2^0 \\ \mathfrak{p}_2^0 \\ \mathfrak{p}_2 \end{cases}\begin{matrix}\\ \\ \}\leftarrow \mathfrak{g} \end{matrix} \qquad [5]\begin{cases} \mathbf{A}: & \mathfrak{p}_1^0 \\ \mathbf{I}: & \mathfrak{p}_1'' \\ \mathbf{II}: & \mathfrak{p}_1'' \\ \mathbf{E}: & \mathfrak{p}_1 \end{cases}\begin{matrix}\}\rightarrow \mathfrak{f} \\ \\ \}\leftarrow -\mathfrak{g} \\ \end{matrix}\begin{cases} \mathfrak{p}_2^0 \\ \mathfrak{p}_2^0 \\ \mathfrak{p}_2 \\ \mathfrak{p}_2 \end{cases}\begin{matrix}\\ \}\rightarrow -\mathfrak{g} \\ \\ \end{matrix}$$

$$\mathfrak{g} \equiv \mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_2^0$$

$$\mathfrak{p}_1'' + \mathfrak{f} = \mathfrak{p}_1^0$$

$$\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{g} = \mathfrak{p}_1''$$

$$\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_1'' + \mathfrak{p}_2^0 .$$

Von (I) zu (E) kann der Übergang auch direkt durch die statische Coulombsche Wechselwirkung zweier Teilchen stattfinden d.h.

$$[6]\begin{cases} \mathbf{A}: & \mathfrak{p}_1^0 \\ \mathbf{I}: & \mathfrak{p}_1'' \\ \mathbf{II}: & \cdots \\ \mathbf{E}: & \mathfrak{p}_1 \end{cases}\begin{matrix}\}\rightarrow \mathfrak{f} \\ \\ \\ \end{matrix}\begin{cases} \mathfrak{p}_2^0 \\ \\ \\ \mathfrak{p}_2 \end{cases} \quad \mathrm{C} \quad \begin{cases} \mathfrak{p}_2^0 \\ \cdots \\ \\ \mathfrak{p}_2 \end{cases}$$

(c) Emission $\mathfrak{g}$—Emission $\mathfrak{f}$—Absorption $\mathfrak{g}$[6]

$$[7]\begin{cases} \mathbf{A}: & \mathfrak{p}_1^0 \\ \mathbf{I}: & \mathfrak{p}_1' \\ \mathbf{II}: & \mathfrak{p}_1 \\ \mathbf{E}: & \mathfrak{p}_1 \end{cases}\begin{matrix}\}\rightarrow \mathfrak{g} \\ \}\rightarrow \mathfrak{f} \\ \\ \end{matrix}\begin{cases} \mathfrak{p}_2^0 \\ \mathfrak{p}_2^0 \\ \mathfrak{p}_2^0 \\ \mathfrak{p}_2 \end{cases}\begin{matrix}\\ \\ \}\leftarrow \mathfrak{g} \end{matrix} \qquad [8]\begin{cases} \mathbf{A}: & \mathfrak{p}_1^0 \\ \mathbf{I}: & \mathfrak{p}_1^0 \\ \mathbf{II}: & \mathfrak{p}_1'' \\ \mathbf{E}: & \mathfrak{p}_1 \end{cases}\begin{matrix}\\ \}\rightarrow \mathfrak{f} \\ \}\leftarrow -\mathfrak{g} \\ \end{matrix}\begin{cases} \mathfrak{p}_2^0 \\ \mathfrak{p}_2 \\ \mathfrak{p}_2 \\ \mathfrak{p}_2 \end{cases}\begin{matrix}\}\rightarrow -\mathfrak{g} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Dazu gibt es noch solche Übergangswege, bei denen die Rollen der Teilchen 1 und 2 vertauscht sind.

(6) Darauf, daß die Coulombsche Wechselwirkung bei diesen beiden Übergangswegen nicht in Frage kommt, hat mich Herr Prof. HEISENBERG freundlicherweise hingewiesen.

3. ÜBERGANGSWAHRSCHEINLICHKEIT.

Die Wahrscheinlichkeit pro Sekunde eines Überganges vom Anfangszustand (A) zum Endzustand (E) über die oben erwähnten verschiedenen möglichen Wege, d.h. teils über *zwei* Zwischenzustände (I) und (II) durch H allein und teils über *einen* Zwischenzustand durch H und V wird gegeben durch

$$\frac{2\pi}{\hbar}\frac{1}{\Delta E_E}\left|\begin{array}{l}\left(\dfrac{(A|H|I)(I|H|II)(II|H|E)}{(E_A-E_I)(E_A-E_{II})}\right)_{\text{auf [1] [2], [4] [5], [7] und [8]}}\\ +\left(\dfrac{(A|V|II)(II|H|E)}{E_A-E_{II}}\right)_{\text{auf [3]}}\\ +\left(\dfrac{(A|H|I)(I|V|E)}{E_A-E_I}\right)_{\text{auf [5]}}\\ +(1\text{ und }2\text{ vertauscht})\end{array}\right|^2.$$

Für jeden Zwischenzustand sind beide Spinrichtungen und positive sowie negative Energie zuzulassen. In der Theorie der Bremsstrahlung werden nur die Fälle [3] und [5] betrachtet. Bei den Elektronen muß man noch auf die Retardierung Rücksicht nehmen. Diese relativistische Verfeinerung erfolgt bekanntlich in der Weise, daß das eins von zwei wechselwirkenden Elektronen ein Lichtquant emittiert und dann das andere Elektron es absorbiert, wie es in der Theorie der Wechselwirkung zweier freien Elektronen von BETHE und FERMI[7] gezeigt wurde. [1] und [2] bezw. [4] und [5] stellen diese entsprechende Verfeinerung für [3] und [6] dar. Die Ausrechnung kann daher nach dem Vorbild von BETHE und FERMI leicht durchgeführt werden. Aber das genügt nicht. In unserem Problem kommen noch die Fälle [7] und [8] in Betracht.

Jedes Glied in der Summe wird nach den folgenden Musterformeln umgeschrieben:

für Emission des Lichtquants $\mathfrak{k}$ ($\mathfrak{p}_a = \mathfrak{p}_b + \mathfrak{k}$):

(7) H. BETHE und E. FERMI: *Z. Phys.*, **77** (1932), 296.

$$(\mathfrak{p}_a, 0\mathfrak{k} \,|\, H \,|\, \mathfrak{p}_b, 1\mathfrak{k}) = -e\frac{hc}{\sqrt{2\pi V}}\frac{1}{\sqrt{k}}(u_a^* \cdot \boldsymbol{\alpha}\mathfrak{e}_\mathfrak{k} \cdot u_b) ,$$

für Absorption des Lichtquants $\mathfrak{k}$ $(\mathfrak{p}_a + \mathfrak{k} = \mathfrak{p}_b)$:

$$(\mathfrak{p}_a, 1\mathfrak{k} \,|\, H \,|\, \mathfrak{p}_b, 0\mathfrak{k}) = -e\frac{hc}{\sqrt{2\pi V}}\frac{1}{\sqrt{k}}(u_a^* \cdot \boldsymbol{\alpha}\mathfrak{e}_\mathfrak{k} \cdot u_b) ,$$

für Coulombsche Wechselwirkung $(\mathfrak{p}_1^0 + \mathfrak{p}_2^0 = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2)$:

$$(\mathfrak{p}_1^0, \mathfrak{p}_2^0 \,|\, V_i \,|\, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = \frac{e_1 e_2 h^2 c^2}{\pi V}\frac{(u_1^{0*} u_1)(u_2^{0*} u_2)}{|\mathfrak{p}_1^0 - \mathfrak{p}_2^0|^2} .$$

In der Gruppe [1], [2], [3] und [7] werden zuerst [1] und [2] mit Hilfe der Formel

$$S(\boldsymbol{\alpha}^{(1)}\mathfrak{e}_\mathfrak{g}, \boldsymbol{\alpha}^{(2)}\mathfrak{e}_\mathfrak{g}) = (\boldsymbol{\alpha}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(2)}) - \frac{(\boldsymbol{\alpha}^{(1)} \cdot \mathfrak{g})(\boldsymbol{\alpha}^{(2)} \cdot \mathfrak{g})}{g^2} ,$$

die die Summation über alle Polarisationnen $\mathfrak{e}_\mathfrak{g}$ von Lichtquant $\mathfrak{g}$ bedeutet, zusammengesetzt, dann wird [3] dazu addiert und vereinfacht durch die Beziehung

$$(E_1' - E_1^0)(E_2 - E_2^0)(u_1'^* u_1^0)(u_2^* u_2^0) - (u_1'^* \boldsymbol{\alpha}^{(1)} u_1^0, \mathfrak{p}_1' - \mathfrak{p}_1^0)(u_2^* \boldsymbol{\alpha}^{(2)} u_2^0, \mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_2^0) = 0 .$$

Weiter wird [7] damit kombiniert.

Analog wird die andere Gruppe [4], [5], [6] und [8] zusammengesetzt. Jede Gruppe reduziert sich auf zwei Glieder, von denen das eine den Faktor $(u_1^{0*} u_1')(u_2^{0*} u_2) - (u_1^{0*} \boldsymbol{\alpha}^{(1)} u_1')(u_2^{0*} \boldsymbol{\alpha}^{(2)} u_2)$ oder $(u_1''^* u_1)(u_2^{0*} u_2) - (u_1''^* \boldsymbol{\alpha}^{(1)} u_1)(u_2^{0*} \boldsymbol{\alpha}^{(2)} u_2)$ hat und das andere den Faktor $(u_1^{0*} u_1')(u_2^{0*} u_2)$ bezw. $(u_1''^* u_1)(u_2^{0*} u_2)$. Die letzten heben sich gegeneinander auf.

4. ZUSTANDSDICHTE.

Wegen der Impulserhaltung ist der Endimpuls des einen Elektrons und der des Lichtquants frei wählbar. Die Anzahl der Zustände zwischen $d\mathfrak{p}_1(dE_1, d\Omega_e)$ und $d\mathfrak{k}(dk, d\Omega_s)$ beträgt

$$\underbrace{\frac{d\Omega_e \cdot V \cdot p_1 E_1 dE_1}{h^3 c^2}}_{\text{für Elektron}} \cdot \underbrace{\frac{d\Omega_s \cdot V \cdot k^2 dk}{h^3 c^3}}_{\text{für Lichtquant}} .$$

Wegen der Energieerhaltung vereinfacht sich obige Formel in folgender Weise:

$$\frac{1}{\Delta E_{\mathrm{E}}} = d\Omega_e d\Omega_s \frac{V^2 p_1 E_1 k^2 dE_1}{h^6 c^5} \quad \text{oder} \quad d\Omega_e d\Omega_s \frac{V^2 p_1 E_1 k^2 dk}{h^6 c^5} .$$

Um den Wirkungsquerschnitt zu bekommen, muß man die obige Übergangswahrscheinlichkeit noch durch $\frac{v_1^0}{V} = \frac{cp_1^0}{E_1^0 V}$ dividieren.

5. ENDFORMEL.

In der Weise bekommt man gerade die Formel für den differentiellen Wirkungsquerschnitt:

$$d\Phi = d\Omega_e d\Omega_s \frac{1}{\hbar c} \frac{p_1 E_1 E_1^0 k}{\pi^2 p_1^0} dE_1$$

$$\left| \frac{e_1^2 e_2}{|\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_2^0|^2 - (E_2 - E_2^0)^2} \left[\sum_{1'} \frac{(u_1^* \cdot \alpha^{(1)} \mathfrak{e}_{\mathfrak{f}} \cdot u_1') \left\{ (u_1'^* u_1^0)(u_2^* u_2^0) - (u_1'^* \alpha^{(1)} u_1^0)(u_2^* \alpha^{(2)} u_2^0) \right\}}{E_1^0 + E_2^0 - E_2 - E_1'} \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sum_{1''} \frac{\left\{ (u_1^* u_1'')(u_2^* u_2^0) - (u_1^* \alpha^{(1)} u_1'')(u_2^* \alpha^{(2)} u_2^0) \right\} (u_1''^* \cdot \alpha^{(1)} \mathfrak{e}_{\mathfrak{f}} \cdot u_1^0)}{E_1 + E_2 - E_2^0 - E_1''} \right] \right|^2 ,$$

$$+ (1 \text{ und } 2 \text{ vertauscht})$$

zu der MØLLER auf den anderen Wegen gelangt ist. Die Ausrechnung der Matrixelements ist noch nicht beendet und soll in einer folgenden Arbeit mitgeteilt werden.

Physikalisches Institut der Kaiserlichen Universität zu Hokkaido.