HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	サヴェジ基礎論における期待値作用素について
Author(s)	園, 信太郎
Citation	經濟學研究, 58(2), 57-59
Issue Date	2008-09-11
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/34659
Type	departmental bulletin paper
File Information	57-59.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

経済学研究 58−2
北海道大学 2008. 9

サヴェジ基礎論における期待値作用素について

園　　信太郎

1．はじめに

サヴェジ氏の「基礎論」においては個人的期待効用を導入する際に，ある種の期待値作用素が利用されている。しかしこの作用素の定義は明白には述べられてはいない。これは，わざわざ「定義」しなくとも，文脈や付録 1 からその内容は明らかであるとして，かまわないとサヴェジ氏が判断したに相違ない。しかしここでは，その「定義」とそれに関る幾つかの数学的事柄とを確認しておくこととする。

サヴェジ氏が彼の公準系を導入することによって，その一意的存在を示している個人的確率 P は，「世界」S の「任意の」部分集合に対して実数値を対応させる，「有限加法的な」確率測度である。これは「世界」に対する「その個人」のオピニオンに他ならない。一方，存在と「実質的な一意性」とが示される個人的効用 U は，「結果の全体」F 上で定義されている有界な実数値関数である。また，「行為」とは，S から F への写像であり，そこで，行為 $\mathbf{f}$ と U との合成関数 $U(\mathbf{f})$ の P に関する「積分」が，$\mathbf{f}$ の期待値 $E(U(\mathbf{f}))$ となるのである。つまり，

$$E(U(\mathbf{f})) = \int_S U(f(s))P(ds),$$

である。

2．「積分」

有界な実数値関数の P に関する「積分」は，Lebesgue 積分の「古典的な」定義を真似て，導入できる。この「古典的な定義」は，例えば辻 正次 (1962) の第 5 章にある。つまり，「値域の分割」に基づく Lebesgue 式の近似和の「極限」として，「積分」が定義されるのである。但し，辻 (1962) では，その 116 頁にあるように，等式 $\int(-f) = -\int f$ を，多次元 Lebesgue 測度に関する可積分性に依存して証明しているが，これは，同書の 110 頁での「分割」の取り方を，$[l_i, l_{i+1})$ から $(l_i, l_{i+1}]$ に変更したとしても，定義される「積分」の値は変化しないことを確認すれば，(定義域の Lebesgue測度が有限である) 有界な実数値関数に対して，問題の等式が従うことが容易にわかるので，そこで，平行的な議論によって，P についても同様の等式が従う。このようにして，有界な実数値関数 X に対して，有限の期待値，$E(X) = \int XdP$ を対応させる作用素 $E(\cdot)$ が導入できる。この作用素は実際「積分」であり，線形性や非負性を満たし，任意の事象 A に対して，$E(I_A) = P(A)$ を満たす。

なお，Fishburn (1970) では，その第 10.3 節の 135 頁，定義 10.11 に見られるように，問題の作用素の類似物を，一様収束する単関数の列を利用して，定義している。但し，Fishburn は，通常の数学の流儀に従って，「可測な，measurable」関数を「定義」して，それらに対する期待値のみを導入している。

3．Banach (1932) への言及

サヴェジ氏は,「基礎論」の 41 頁及び 78 頁で,古典 Banach (1932) に言及している。これは,「単位区間に含まれる任意の集合に対して実数値を対応させる有限加法的な確率測度で,Lebesgue 測度の拡張であり，合同な集合に対しては同じ値を付加するものが存在する」こと,及び,「正整数の全体の任意の部分集合に対して実数値を対応させる有限加法的な確率測度で,正の整数 n までに含まれるその部分集合の要素の比率 $r(n)$ の（n に関する）極限が存在する場合には，その極限 $\lim r(n)$ はその部分集合の「確率」に等しくなるものが存在する」ことを，保証するための言及である。

サヴェジ氏の「合理的な個人」は,「任意の」事象を,(「自己」の立場から)「測り得る」存在なので,「その確率」の数学的模型として，上述のような「物」を提示しているのである。サヴェジ氏は「基礎論」の第 3 章第 4 節，40 頁，2 番目の段落で,「可測な」集合のみに「確率」を配分する通常の流儀に「譲歩する」気配を見せているのだが，結局のところ，自身では,「強力な個人論的合理性」の方を採用している。また,今日からすれば，Banach (1932) に言及するよりは，やはり古典の，Royden (1988) に言及する方が得策であるだろう。その訳を次に述べる。

4．H. L. Roydenの拡張定理

この拡張定理は，解析学の基本原理の一つとして広く知られている，Hahn-Banach の拡張定理の「精密化」である。但し，ここでの Hahn-Banach の拡張定理とは，次の様式のものである。「p を(実数を係数とする) ベクトル空間 X 上の実数値を取る関数とし，しかも劣加法性，即ち $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$ を満たし，さらに正斉次性，即ち任意の非負の実数 a に対して $p(ax) = ap(x)$ を満たすものとする。一方，f を部分空間 S 上で定義されている線形汎関数で，S の各要素 s に対して $f(s) \leq p(s)$ を満たすものとする。すると，X 上のある線形汎関数 F が存在して，各 x に対して $F(x) \leq p(x)$ かつ S の各要素 s に対して $F(s) = f(s)$ を満たす。」

H. L. Royden による「精密化」は，Royden (1988) の第 10 章第 3 節，224 頁から225 頁，に提示されている。それは，Abelian semigroup of linear operators on X を用いるもので，これは X からそれ自身への線形作用素を要素とする集合で，恒等作用素を要素として含み，写像の合成に関して閉じていて，しかもこの合成が可換であるものを言う。すると問題の拡張定理は次のようになる。「X, S, p, f を上の拡張定理と同様とし，しかも G を，Abelian semigroup of linear operators on X とし，G の任意の要素 A に対して，$p(Ax) \leq p(x)$ $\forall x \in X$, $f(As) = f(s) \forall s \in S$ が成立するとする。すると，f の X 上への拡張である線形汎関数 F が存在して，$F(x) \leq p(x), F(Ax) = F(x), \forall x \in X \forall A \in G$, を満たす。」これは Hahn-Banach-Royden の拡張定理とでも呼ぶべきものである。

5．拡張定理の応用

上掲の拡張定理の応用例が，Royden (1988) の 228 頁の Problems の問 20 及び問 21 に提示されている。つまり,「有界な実数列の全体である l^{∞} 上で定義されている線形汎関数 F で,

$$\underline{\lim}\, \xi_n \leq F(\langle \xi_n \rangle) \leq \overline{\lim}\, \xi_n,$$
$$F(\langle \xi_n + \eta_n \rangle) = F(\langle \xi_n \rangle) + F(\langle \eta_n \rangle),$$
$$F(\langle \alpha \xi_n \rangle) = \alpha F(\langle \xi_n \rangle),$$
$$\eta_n = \xi_{n+1} \forall n \Rightarrow F(\langle \eta_n \rangle) = F(\langle \xi_n \rangle),$$

を満たすものが存在する。」この F は Banach limit として広く知られており，Lim と表記されたりもする。

次に,「実数系 $\mathbb{R}$ に含まれる任意の有界集合に対して実数を対応させる集合関数 μ で,

$A \cap B = \phi \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$,
$\mu([A+t]) = \mu(A)$,
$A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$,

A が Lebesgue 可測ならば $\mu(A)$ は A の Lebesgue 測度に等しい，を満たすものが存在する。」が従う。H. L. Royden は，この集合関数 μ の存在を示す際には，「積分」で考える方がやりやすいとのヒントを付けている。

この二つの命題を，サヴェジ氏は，Banach (1932) に言及して利用しているのである。

6．注意

上の第 3 節で言及した，「正整数の全体」上の有限加法的確率測度だが，「散漫な，diffuse」と形容される場合がある。これを P とすると，$P(\{n\}) = 0 \forall n$, $P(\{1,2,3,\cdots\}) = 1$, であり，各 n に $1/n$ を対応させる写像を X とすると，$X(n) > 0 \forall n$, $E(X) = 0$, である。また各 n に $n/(1+n)$ を対応させる写像を Y とすると，$E(YI_{\{1,\cdots,n\}}) = 0 \forall n$, $E(Y) = 1$, であり，単調収束定理が成立しない。従って，サヴェジ氏の期待値作用素に「快適な極限操作」を期待する訳には行かない。

2008 年 4 月 7 日 (月)

参考文献

Banach, Stefan, *Théorie des opérations linéaires*, Subwencji Fundusz Kultury Narodowej, Warszawa, 1932. この広く知られている (フランス語の) 古典の第 2 版は，1963年に New York から出ており，一方その第 2 版の再版が，1978年にChelsea Publishing Company, New York, より出ている。また F. Jellett による英訳，Theory of linear operations が，1987 年に，North-Holland, Amsterdam, より出ている。Banach 自身は 1892 年に生まれて 1945 年に没している。

Fishburn, Peter C., *Utility theory for decision making*, John Wiley & Sons, New York, 1970. Fishburn は，サヴェジ氏の「世界」S は非可算としているが，実際には「散漫な」P の場合もある。

Royden, Halsey Lawrence, *Real analysis, Third edition*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1988. この古典の初版は 1963 年であり，第 2 版は 1968 年である。

Savage, Leonard Jimmie, *The foundations of statistics, Second revised edition*, Dover Publications, 1972. 初版は 1954 年に John Wiley & Sons より出ている。「統計学の基礎」に深く関る古典であり，サヴェジ氏の「基礎論」である。この「基礎論」への一つの「読み」として，園 (2001) があり，またサヴェジ氏の思索については，園 (2007) がある。

園 信太郎，『サヴェジ基礎論覚書』，岩波出版サービスセンター，東京，2001 年 12 月 20 日。

園 信太郎，『サヴェジ氏の思索』，岩波出版サービスセンター，東京，2007 年 8 月 31 日。

辻 正次，『実函数論』，槇書店，東京，1962 年 10 月 1 日。辻 正次 教授は，1894 年に生まれて 1960 年に没している。この書物は弟子の小松勇作 教授らの尽力により，出版に至ったのである。