HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Farkasの補題について
Author(s)	田中, 嘉浩
Citation	經濟學研究, 58(2), 107-111
Issue Date	2008-09-11
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/34663
Type	departmental bulletin paper
File Information	107-111.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

経 済 学 研 究　*58−2*
北 海 道 大 学　2008. 9

＜研究ノート＞

Farkas の補題について

田　中　嘉　浩

1　はじめに

２０世紀初めに Farkas [4] は，同次線形不等式に対する基本定理を導いた。線形不等式系に関する Farkas の補題 (基本定理の特殊形) は多くの類似の結果が知られている二者択一の定理 (e.g., [6]) の端緒となる重要な結果であり，Kuhn and Tucker [5] が非線形計画の最適性の必要条件を導出するのに用いて脚光を浴びたが，線形計画 の双対定理の証明にも使われることは数理計画の標準的な教科書に載っている。金融分野で裁定 (arbitrage) が存在しない条件 (無裁定条件) を導出する目的にも二者択一の定理が使われることも周知の事実である。

本稿では類似の多くの結果が知られている二者択一の定理について， それらの関係を調べ，その代表的な結果である Farkas の補題の導出についての最近の結果を示す。

2　二者択一の定理

Farkas は線形不等式に対して先ず次の関係を示した。

定理 1 *(Farkas の補題)[4]*　行列 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ と列ベクトル $b \in \mathbb{R}^m$ に対して，

(a) $\exists x \geq 0, \quad Ax = b,$

(b) $\exists y, \quad A^T y \leq 0$ かつ $b^T y > 0,$

のどちらか一方のみが成立する。

定理 1 は $A = (a_1, ..., a_n)$ に対して b がその非負結合が生成する錘に入るか，その錘の支持超平面の法線方向と逆の開半空間に入るかのどちらかであることを示している。

類似かつ重要な結果を示す。

定理 2 *(Motzkin の定理)*　行列 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 行列 $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ に対して，

(a) $\exists x \in \mathbb{R}^n, \quad Ax > 0, Bx \geq 0,$

(b) $\exists y \geq \mathbb{R}^m, y \neq 0, \exists z \geq 0, A^T y + B^T z = 0,$

のどちらか一方のみが成立する。

Motzkin の定理の系として Gale の定理が得られることが知られている。

定理 3 *(Tucker の定理)*　行列 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 行列 $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ に対して，

(a) $\exists x \in \mathbb{R}^n, \quad Ax \geq 0, Ax \neq 0, Bx \geq 0,$

(b) $\exists y > 0, \exists z \geq 0, \quad A^T y + B^T z = 0,$

のどちらか一方のみが成立する。

Tucker の定理の系として Stiemke の定理が得られることが知られている。

二者択一の定理は，Broyden [2] に依れば，

「高原に位置する都市に似ている。それらの間の旅行は難しくなく下の平原からの最初の登頂が難しい」

という関係になっており，相互間の導出は比較的簡単なので，本質的に重要な部分は何か一つの定理を独立に証明する所にある。

次節では，Farkas の定理の最近なされた代数的証明と幾何的証明を紹介する。

3　Farkas の補題の証明

3．1　代数的証明

Broyden は次の主定理を証明した。

定理 4 *(Broyden の定理)[2]*　任意の直交行列 $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ に対して, 唯一の符号行列（対角成分が 1 または -1 の対角行列）$S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ が存在して,

$$\exists x > 0, \quad Qx = Sx$$

を満たす。

［証　明］　数学的帰納法で示される。直交行列 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ に対して成立するとし，$Q \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ を,

$$Q = \begin{pmatrix} P & r \\ q^T & \rho \end{pmatrix} \tag{1}$$

の形の直交行列とする。$|\rho| < 1$ でなければ $r = q = 0$ となって帰納法は自明に成立するので, $|\rho| < 1$ とする。$Q^TQ = I$ を計算して，直交行列は,

$$\begin{aligned} Q_1 &= P - \frac{rq^T}{\rho - 1}, \\ Q_2 &= P - \frac{rq^T}{\rho + 1} \end{aligned} \tag{2}$$

の形になり，その積は,

$$Q_2^TQ_1 = I - \frac{2}{1-\rho^2}qq^T \tag{3}$$

となるので, 帰納法からの仮定から正ベクトル x_1, x_2，符号行列 S_1, S_2 が存在して，$Q_1x_1 = S_1x_1$, $Q_2x_2 = S_2x_2$ となるので，(3) から,

$$\begin{aligned} x_2^TS_2S_1x_1 &= x_2^TQ_2^TQ_1x_1 \\ &= x_2^Tx_1 - \frac{2}{1-\rho^2}(q^Tx_1)(q^Tx_2) \end{aligned} \tag{4}$$

となる。

1．$S_1 \neq S_2$ の場合。　x_1, x_2 は狭義に正なので，$x_2^TS_2S_1x_1 < x_2^Tx_1$ となるから，(4) から q^Tx_1, q^Tx_2 の両方が 0 となることはなく，同じ符号にならなければならない。今，ξ_1, ξ_2 を,

$$\xi_1 = \frac{-q^Tx_1}{\rho - 1}, \quad \xi_2 = \frac{-q^Tx_2}{\rho + 1}$$

で定義する。$z_1 = (x_1^T\ \xi_1)^T$, $z_2 = (x_2^T\ \xi_2)^T$ に対して,

$$Qz_1 = \begin{pmatrix} S_1x_1 \\ \xi_1 \end{pmatrix}, \quad Qz_2 = \begin{pmatrix} S_2x_2 \\ -\xi_2 \end{pmatrix}$$

となる。今 $|\rho| < 1$ なので, $\rho - 1 < 0$, $\rho + 1 > 0$ となる。だから，q^Tx_1 と q^Tx_2 が同じ符号なので，ξ_1 か ξ_2 の 1 つは正であり，z_1 か z_2 の 1 つは題意を 満たす正ベクトルとなる。

2．$S_1 = S_2$ の場合。　$x_2^TS_2S_1x_1 = x_2^Tx_1$ となるから，(4) から　q^Tx_1 か q^Tx_2 の少なくとも 1 つが 0 となる。一般性を失うことなく $q^Tx_1 = 0$ と仮定できるので，(2) から $Px_1 = S_1x_1$ となり,

$$\begin{pmatrix} P & r \\ q^T & \rho \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1x_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

$z_1 = (x_1^T\ 0)^T$ ならば，(5) は，(1) から $Qz_1 = \hat{S}_1z_1$，但し $S_1 = \mathrm{diag}(S_1, \sigma_1)$, $\sigma_1 = \pm 1$ は z_1, Qz_1 の最終の要素が両方とも 0 なので未定，と書ける。今 Q の別の分割を,

$$Q = \begin{pmatrix} \rho_1 & q_1^T \\ r_1 & P_1 \end{pmatrix},$$

但し $P_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ として今迄の議論を続ける。1 の場合は帰納法を確立できる。2 の場合は (5) と同様に正ベクトル x_2 と符号行列 S_2 が存在して,

$$\begin{pmatrix} \rho_1 & q_1^T \\ r_1 & P_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ S_2x_2 \end{pmatrix}$$

を満たし，z_2 を $z_2 = (0\ x_2^T)^T$, $\hat{S}_2 = \mathrm{diag}(\sigma_2, S_2)$ と定義すれば，$Qz_2 = \hat{S}_2 z_2$，但し $\sigma_2 = \pm 1$ は z_2, Qz_2 の最初の要素が両方とも 0 なので未定，と書ける。この式を $Qz_1 = \hat{S}_1 z_1$ に加えて，

$$Q(z_1 + z_2) = \hat{S}_1 z_1 + \hat{S}_2 z_2 \qquad (6)$$

となる。今 z_1 と z_2 の両方の第 j 要素 $(2 \le j \le n)$ が狭義の正であるので，これらのどれかの要素に対して，$\hat{S}_1, \hat{S}_2$ の対応する対角要素が異なっているならば，$\| \hat{S}_1 z_1 + \hat{S}_2 z_2 \| < \| z_1 + z_2 \|$。これは (6) と Q の直交性から矛盾する。よって $\hat{S}_1, \hat{S}_2$ の対応する対角要素は 同じでなければならず，$\hat{S}_1 = \hat{S}_2$ となる様に σ_1, σ_2 を選ぶ。(6) は $Q(z_1 + z_2) = \hat{S}_1(z_1 + z_2)$ となり，$z_1 + z_2$ は狭義の正ベクトルで $\hat{S}_1$ は符号行列であるから，$S_1 = S_2$ の場合に帰納法を満たす。$n = 1$ に対しては題意は自明に成立する (Q, S は両方とも 1 か -1 になる) ので，帰納法により全ての $n \ge 1$ に対して成立し，正ベクトル x と符号行列 S の存在証明が為された。

S が唯一であることを示す為に，$Qx_1 = S_1 x_1$, $Qx_2 = S_2 x_2$ となる 2 つの正ベクトル x_1, x_2 と符号行列 S_1, S_2（$S_1 \ne S_2$）が存在すると仮定する。その時 $x_2^T x_1 = x_2^T Q^T Q x_1 = x_2^T S_2 S_1 x_1$ となるが，$S_1 \ne S_2$ ならば $x_2^T S_2 S_1 x_1 < x_2^T x_1$ となり矛盾である。よって，$S_1 = S_2$ となるので，ある特定の直交行列に対応する 符号行列は唯一になる。 ∎

Broyden の定理 (定理 4) から次の定理が得られる。

定理 5 *(Tucker の交代行列定理)[2]*　$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ を任意の交代行列 *($A^T = -A$; 実数を要素にする エルミート行列 である; 対角成分は 0)* とする。その時，

$$\exists u \ge 0, \quad Au \ge 0 \text{ かつ } u + Au > 0$$

を満たす。

［証　明］　A は交代行列なので，Cayley 変換 $(I + A)^{-1}(I - A)$ に対して直交行列になる。定理 4 から $x > 0$ と符号行列 S が存在して，

$$(I + A)^{-1}(I - A)x = Sx$$

を満たす。整理して $Au = v$, $u = x + Sx$, $v = x - Sx$ だから，$u + v = 2x > 0$ となり，題意は成立する。 ∎

Farkas の補題が証明される。

［Farkas の補題の証明］　交代行列を，

$$\begin{pmatrix} O & O & A & -b \\ O & O & -A & b \\ -A^T & A^T & O & 0 \\ b^T & -b^T & 0^T & 0 \end{pmatrix}$$

非負ベクトルを $u = (y_1^T\ y_2^T\ x^T\ t)^T$, $y = y_1 - y_2$ として，定理 5 を適用する。$t > 0$ の時には正規化したものを改めて $u = (y_1^T\ y_2^T\ x^T\ 1)^T$ とすると，(a) $Ax = b, x \ge 0$ が成立する。$t = 0$ の時には (b) $-A^T y \ge 0, b^T y > 0$ が成立する。 ∎

Broyden [2] には，定理 5 から同様にして Gale の定理 や Motzkin の定理が導出されることや，Gale の定理の系として Gordan の定理が得られることが示されている。

定理 5 は [8] Theorem 5 そのものであるが，一般には Tucker の定理は一般行列 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ に対する 結果 (主要定理; [8] Theorem 1) 等から導出された 定理 3 ([8] Corollary 2A(i) の場合) を指すのが普通 である。ちなみに [8] Corollary 2A(ii) の場合は Motzkin の定理 (定理 2) になる。

3．2　幾何的証明

Farkas の補題に関して次の最小 2 乗問題を考える。

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && \| b - Ax \|^2 \\ &\text{subject to} && x \ge 0. \end{aligned} \qquad (7)$$

今，$x^* = (x_1^*, ..., x_n^*) \in \mathbb{R}^n$ を与えられた点，対応する点の残差を $r^* = b - Ax^*$ とする。この分節の結果は Dax [3] に基いている。

補題 1　x^* を *(1)* の解，r^* を対応する残差ベクトルとする。その時 x^* が *(7)* の最小解である為の必要十分条件は，x^* と r^* が，

$$x^* \geq 0,\ A^T r^* \leq 0, \text{かつ } x^{*T} A^T r^* = 0 \quad (8)$$

を満たすことである。

［証 明］　x^* が (7) の解であると仮定し，θ の 2 次関数

$$\begin{aligned} f_i(\theta) &= \| b - A(x^* + \theta e_i) \|^2 \\ &= \| r^* - \theta a_i \|^2, \quad i = 1, ..., m, \end{aligned}$$

但し a_i は A の第 i 列, $\theta \in \mathbb{R}$, e_i は第 i 単位ベクトルとする。その時明らかに $\theta = 0$ は，

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad f_i(\theta) \\ &\text{subject to} \quad x_i^* + \theta \geq 0 \end{aligned}$$

の解である。それ故に，$f_i'(0) = -2a_i^T r^*$ であるから，$x_i^* > 0$ ならば $a_i^T r^* = 0$; $x_i^* = 0$ ならば $-a_i^T r^* \geq 0$, となり (8) が成立する。

逆に (8) が成立すると仮定し，$\forall x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0$ とする。$u = (u_1, ..., u_n)^T \in \mathbb{R}^n$ は x から $u = x - x^*$ で得られるとする。その時 $x_i^* = 0$ ならば $u_i \geq 0$ であるので，(8) から，

$$u^T A^T r^* \leq 0$$

となる。だから，

$$\| b - Ax \|^2 = \| b - Ax^* \|^2 - 2u^T A^T r^* + \| Au \|^2$$

となるので，

$$\| b - Ax \|^2 \geq \| b - Ax^* \|^2 .$$

即ち x^* は (7) の解である。　∎

次の定理はこの問題の残差 2 乗和に依って Farkas の補題のどちらの場合が成立するかを示す。

定理 6　x^* を *(7)* の解，$r^* = b - Ax^*$ を対応する 残差ベクトルとする。その時 $r^* = 0$ ならば x^* は定理 1 *(a)* の解であり，さもなければ，r^* は定理 1 *(b)* の解であり，$b^T y^* = b^T r^* = \| r^* \|^2 > 0$ である。

［証 明］　r^* の定義と (8) から，

$$\begin{aligned} b^T y^* = b^T r^* &= (Ax^* + r^*)^T r^* = x^* A^T r^* + r^{*T} r^* \\ &= \| r^* \|^2 > 0 \end{aligned}$$

が成立する。　∎

最小 2 乗問題 (7) の解 x^* の存在について述べる。

$$Z = \{Ax \mid x \geq 0\}$$

は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。

$$B = \{z \mid z \in Z,\ \| b - z \| \leq \| b \|\}$$

は $\mathbb{R}^n$ の非空の有界閉集合 であり、$\varphi(y) = \| b - y \|^2$ は y の連続関数である。それ故に，よく知られた Weierstrass の定理により，$\varphi(y)$ は B 上で最小値を取るので、$z^* \in B$ を最小解とする。$B \subseteq Z$ ならば，$x^* \in \mathbb{R}^n$ が存在して $x^* \geq 0$, $z^* = Ax^*$ となる； それ故に x^* が存在して (7) の解になる。

4　Farkas の補題の一般化

今迄には有限次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ に於ける Farkas の補題について述べたが，この節ではより一般的な無限次元の場合を含むベクトル空間，線形順序ベクトル空間に拡張された結果を示す。

F を体 (または斜体) とする。次の結果が成立する。

定理 7　F を体（または斜体）とし，W を体 F 上のあるベクトル空間とする。 $A:\ W \longrightarrow F^n$ を線形写像とし，$b \in F^n$ を列ベクトルとする。その時,

(a) $Ax = b$,

(b) $\exists y \in F^n, \quad y^T A = o, \quad y^T b \neq 0$,

但し $o:\ W \longrightarrow F$ は零線形変換， のどちらか一方のみが成立する。

［証　明］　[1] Theorem 3.2 (Fredholm の定理) により従う。 ∎

さて，V を F 上の線形順序の導入されたベクトル空間とし， その要素間の二項関係を $u \succeq v \Longleftrightarrow u - v \succeq v\ (u, v \in V)$ によって与える。 一般化された Farkas の補題は次の様になる。

定理 8　F を線形順序の導入された体（または斜体）とし，W を体 F 上のあるベクトル空間，V を体 F 上の線形順序の導入されたベクトル空間とする。 更に $A = (\alpha_i)_{i=1}^n:\ W \longrightarrow F^n$, $\beta:\ W \longrightarrow V$ を２つの線形写像とする。その時,

(a) $\exists x \in V, \quad \exists x_1, ..., x_n \succeq 0,$

$x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta,$

(b) $\alpha_1(y) \leq 0, ..., \alpha_n(y) \leq 0, \quad \beta(y) \succ 0,$

のどちらか一方のみが成立する。

［証　明］　[1] Lemma 4.1 により従う。 ∎

5　おわりに

歴史的には Fourier によって提案された，ポテンシャル存在下での力学上の均衡を表す不等式制約問題 [7] に対する均衡条件を表す目的で生まれた Farkas の補題だが，本質的結果であり， 彼自身の証明のみならず，何通りかの証明法が考えられてきた。 一見直観的に明らかに思われるその結果が，代数的には直交行列に対する実固有ベクトルの性質に関する定理に帰着できる証明や，幾何的には最小２乗問題の残差２乗和が 0 かどうかに帰着できるという証明は特に印象的である。無限次元空間への拡張も他の類似の結果と合わせて発展が望まれる方向に思える。

参考文献

[1] Bartl, D., “Farkas’s lemma, other theorems of the alternative, and linear programming in infinite-dimensional spaces: a purely linear-algebraic approach,” *Linear and Multilinear Algebra* 55, 327–353 (2007).

[2] Broyden, C.G., “A simple algebraic proof of Farkas’s lemma and related theorems,” *Optimization Methods and Software* 8, 185–199 (1998).

[3] Dax, A., “An elementary proof of Farkas’s lemma,” *SIAM Review* 39, 503–507 (1997).

[4] Farkas, J., “Über die theorie der einfachen ungleichungen,” *J. Reine Angew. Math.* 124, 1–24 (1902).

[5] Kuhn, H.W., Tucker, A.W., “Nonlinear programming,” in: Neyman, J. ed, *Proc. of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Univ. Calif. Press, Berkeley, 481–492 (1951).

[6] Mangasarian, O.L., *Nonlinear Programming*, SIAM, Philadelphia, (1994).

[7] Prékopa, A., “On the development of optimization theory,” *The American Mathematical Monthly* 87, 527–542 (1980).

[8] Tucker, A.W., “Dual systems of homogeneous linear relations,” in: Kuhn, H.W. and Tucker, A.W. eds., *Annals of Mathematics Studies* 38, Princeton Univ. Press, Princeton, 3–18 (1956).