



Title	数学の哲学におけるシャピロの構造主義
Author(s)	斉藤, 健
Citation	哲学, 40, 45-63
Issue Date	2004-07-18
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/35026
Type	departmental bulletin paper
File Information	40_LP45-63.pdf



数学の哲学における シャピロの構造主義

齊藤 健

本稿では、数学の哲学におけるステュワート・シャピロ (Stewart Shapiro, 1951-) の構造主義に内在する問題点を明確にする。彼の構造主義の基本用語は数学的構造に適用するには多義的すぎるという点、彼のアンテレム構造主義における存在観と、集合論を用いた構造理論における存在観は互いに相容れないという点を示す。

本稿の論述は以下のように進む。第1節で構造主義の種類を概観する。第2節でシャピロの構造主義を提示する。第3節ではその利点を明確にする。第4節以降で彼の立場を批判する。構造と体系、それらの間に成り立つ例化関係、位置の身分について彼の議論が数学上の具体例を扱うには不十分であり、そうした用語に決定的に依存している構造理論には難点があることを示す。さらに、彼の構造主義と構造理論の間において存在観上の齟齬が存することを示す。なお批判と検討の後で、構造主義に内在する困難を克服しようとするときに直面する問題状況を整理し展望を模索する。

1. 数学の哲学における構造主義

数学の主題は数学的対象というよりもむしろそれらの間の構造であると主張する立場は、数学の哲学における構造主義と呼ばれる。その立場は論理学と数学の形式化と公理化の発展から生じたと言える。デデキント (Dedekind) は自然数論

の公理化を試みた際、自然数構造に着目し、数の関係こそがその性質を規定すると主張した(デーデキント、86)¹。構造主義はベナセラフ以来、数学的対象の存在に関与することをできるだけ避けるために利用されてきた側面がある。ベナセラフは「数は対象ではない」(Benacerraf, 291)と主張し、数学的対象の存在への関与を避けようとする点で、彼に倣う構造主義は消去的(eliminative)構造主義と呼ばれる。またヘルマン(Hellman)は様相論理の道具立てを使って、数の存在に関与しないで数学を展開しようと試みている。彼が採る様相構造主義もその路線にあると言えよう。だが基本的に数学的实在論に立ちながらも構造主義を標榜する哲学者もいる。レスニクとシャピロがその代表者である。レスニク(Resnik)はベナセラフやヘルマンとは異なり一種の实在論を採用し、パタン(pattern)を基礎に据えた構造主義を展開している。本稿で考察するシャピロもある種の实在論に立ちつつ、構造主義を展開しようとしている点でレスニクに近い。

2. シャピロの構造主義

シャピロの基本的立場は「数学は構造の科学である」([P], 5)、「(純粹) 数学は諸構造それ自体の演繹的研究である」([P], 259)という主張において表現される。彼は数学的实在論を次のように特徴づける([P], 37)。存在論上の实在論とは、数学的対象が数学者・彼らの思考・言語等々から独立に存在するという立場である。真理値上の实在論とは、数学的言明が数学者たちの思考・言語・規約等々から独立に客観的真理値をもつという立場である。彼は存在論上の实在論と真理値上の实在論を採る([P], 72)。

次に彼の構造主義の枠組みを提示する。彼は体系(system)を、「特定の諸関係をもつ諸対象の集まり」([P], 73; [T], 259)と説明する。構造(structure)とは、ある体系の抽象的形式であって、抽象的形式は、その対象間の相互関係を際立たせ、諸対象がその体系における他の諸対象にいかに関係するかに関して影響を与えない(それら諸対象の)諸特徴を一切無視するものである([P], 74; [T], 259)。

そして「構造はそれが含む数学的諸対象に先立つ」([P],78)。構造と体系の関係はタイプとトークンの関係にたとえられる ([T],262)。この関係を彼は「構造は体系によって例化される(exemplified)」と表現する。構造は複数の体系によって例化されうる ([T],261)。構造と体系の関係は相対的である。つまりある構造は別の構造の体系としても、ある体系は別の体系の構造としても見なされうる。

数学的对象は構造における位置 (places) であると彼は主張する ([P],78,82) が、位置とはどういうものか。彼は位置に関する二つの観点を区別する ([P],82-3)。位置のオフィスの観点 (places-are-offices perspective) では、ある構造内の各位置はその位置を占める何らかの対象によって充填されたかたちで扱われる。彼はオフィスという語を、ある特定の役職のような意味で用いる。この観点は、数学について語られる言明あるいは数学と日常的事物との対応が語られる言明において現れる。例えば「 $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ is 2」という言明はこの観点から述べられたものである。 $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ は2という役職を占める、言い換えるなら2という性質をもつと理解されうる。この 'is' は「述定(オフィス占拠)の is」と呼ばれる。他方、位置の对象的観点 (places-are-objects perspective) では、位置はそれ自体として自立した対象、いわば真正な数学的对象と見なされる。その意味でこの観点は存在論上の実在論の背景をなすと言える。この観点は数学の言明によって表現するときに現れる。例えば「7は10より小さい最大の素数である」という言明がそうである。この観点からの言明における 'is' は「同一性の is」と呼ばれる。

ところで彼によると構造主義は代表的な幾つかの立場に分類される。アンテレム (*ante rem*) 構造主義は、個物に先立って構造が存在するという立場であり、いわば構造実在論と特徴づけられる。個物に内在して構造が存在するというインレ (*in re*) 構造主義と対比される。消去的構造主義は、数学的对象は存在しない、従って構造も実は存在しないとする立場である。そこで「構造なき構造主義」と呼ばれる。だがこの立場は、自然数構造の存在を認めないならば不合理に陥るというパーソンズ (Parsons) の批判を浴びた。様相構造主義は、様相の語法を用いて数学を書き換えることで、数学的对象が現実存在することに関与しないとす

る立場である。しかしシャピロの診断によるとこの立場は、数という抽象的存在を認めないために様相論理という抽象的な道具立てを必要としてしまうという循環に陥る([P],89; [T],275)。彼によるとインレ構造主義も消去的構造主義と同様に膨大な背景的存在論(background ontology)を必要としていて、構造と体系の無限後退を招く恐れがある([P],87; [T],273)。このことから彼はこれらの構造主義のうちアンテレム構造主義を最も好ましい構造主義と見なし、積極的に構造の存在を主張する。「アンテレムの選択肢は構造の理論を必要とする」([P],92)のは、構造の領域を与えて、上述の後退を止めるためなのである(ibid.)。

ところで構造理論において、体系はモデル理論の方法で集合から構成される。構造は体系の同値タイプで、位置の集まりと、それらの位置における有限個の関数と関係の集まりである([P],93)。構造間の同一性は同型(同値・合同)関係による。彼は構造の存在を形式的に保証するために、構造理論の公理化を試みる。それは2階論理を用いて集合論と類似したかたちで以下のように公理化される([P],93-5)。

構造理論の公理系

無限公理：無限個の位置をもつ少なくとも一つの構造が存在する。

減法公理：Sが体系で、RがSの関係ならば、Rを除くSの位置・関数・関係からなる体系と同型な構造S'が存在する。Sが体系で、fがSの関数ならば、fを除くSの位置・関係・関数からなる体系と同型な構造S''が存在する。

部分クラス公理：Sが構造で、cがSの位置の部分クラスならば、cからなるが関係と関数をもたない体系と同型な構造が存在する。

加法公理：Sが体系で、RがSの関係ならば、Rを加えたSの位置・関数・関係からなる体系と同型な構造S'が存在する。Sが体系で、fがSの関数ならば、fを加えたSの位置・関係・関数からなる体系と同型な構造S''が存在する。

冪構造公理：Sを構造とし、sをその位置の集まりとする。このとき、次のような構造Tと二項関係Rが存在する。sの各部分集合s'に対して、 $\forall z(z \in s' \equiv Rxz)$ を満たすTの位置xが存在する。

置換公理：Sとfをそれぞれ、Sの各位置xに対して f_x がある構造(これを S_x とする)の位置であるような構造と関数とする。このとき、諸構造 S_x における位

置の(少なくとも)和の大きさである構造 T が存在する。つまり、各 S_x における全ての位置に対して $gy = z$ であるような T における位置 y が存在するような関数 g が存在する。

整合性公理： Φ が 2 階言語における整合的な式ならば、 Φ を充足する構造が存在する。

反映公理： Φ ならば、構造理論の(他の)諸公理と Φ を充足する構造 S が存在する。

3. シャピロ構造主義の利点

シャピロ流構造主義の主な利点は以下の点に存する。①ある典型的な伝統的対象観が陥る問題を解消できる点、②数学的存在を最も基礎的な存在に還元しようと試みる立場よりも数学の実践により適っている点、③数学における対象の存在と定理の成立を殆ど認めることができる点が挙げられる²。

①我々は例えば自然数を集合論において二通りに記述できる。集合論では通常「 $0 = \emptyset$ 」が定義として導入される。ノイマン記法では「 $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 」と定義され、「 $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 」であるから、 0 は 2 に属する。他方ツェルメロ記法では「 $2 = \{\{\emptyset\}\}$ 」と定義され、「 $\emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$ 」であるから、 0 は 2 に属さない。個体としての数学的对象が我々の理論あるいは構造から独立に存在し、何らかの確定した本性をもつと考える立場を「プラトニズム」と名付けるならば、この立場は、自然数に関するノイマン流記法とツェルメロ流記法のどちらが自然数に内属する真正な本性を表現しているかを決定できないという困難に陥る。だが数学の實際上、それらの記法は同型な自然数構造を表現していれば十分と言える。数学者はいかなる理論や構造からも独立した数学的对象の本質ないしは本性を問題にするわけではない。彼らは構造を適切に設定し、構造間で同型を特徴づけられれば、それらを同一視し、同型な構造についてどのような性質をもつのかを、定理を導き出すことによって探究する。例えば 1 や 2 といった個体としての自然数が「本当は」何であるかというよりは、むしろそれらがある関係をもって配置される自然数列全体の構造、構造間の諸関係、そうした構造一

般で成り立つ諸事実を彼らは研究する。そこで数学において第一に考察すべき主題はこうした探究であると主張する構造主義は、数学の実践における重要な側面をうまく説明する。構造主義によると、0が2に属しているか否かを端的に決定できるわけではない。対象領域は構造ごとに相対化されるから、当該構造において初めてその問いが意味をもつ。従って構造主義は上述の事態に自然に対処でき、件のプラトニストが陥った窮境を回避できる。

②構造主義者は構造に優先権を与えることにより、相異なる記述方法に現れる存在者のうちどちらが真正な「実体」であるかを決定しなくてもよい。唯一の枠組みへの還元や基礎づけという考えから解放されているが故に、彼らは準同型や同型といった対応概念によって数学的知識の主要部をなす諸々の分野相互の諸連関を容易にかつ自然に説明しうる。究極の要素から数学的对象が構成されているという観点よりも、むしろ構造の同型性から逆に数学的对象を割り出し、考察を進めようという観点に親和性がある故に、構造主義は数学者の実践により適合していると言える。

③シャピロは実在論を採ることで、現在の数学諸理論における数学的对象がほぼ全て存在し、定理の大部分が成り立つと主張できる。これは直観主義と唯名論に対する利点である。

従って①②③より、実在論に与するシャピロ流構造主義には他の立場に対して利点があり、検討する価値があることが示された。

4. 構造と体系

以下の節ではシャピロの立場を批判的に検討する。たしかに彼の構造主義は、数学だけでなく日常的事物にも適用することを念頭においた立場ではある。しかし本稿では、実際の数学に適用したときに、それが妥当な装置を用意しているか否かという着眼点から論述したい。本節では「構造」と「体系」が、実際に数学に適用されるための観点から見て、少なくとも二通りの仕方で用いられているこ

とを示したい³。

第2節で彼の「構造」を大まかに特徴づけたが、それによって何が意味されているのか十分に明瞭でない。そこでまず構造と体系が数学においてどのように定義されているのかを簡単に確認しておきたい。少なくとも二通りの定義の仕方が存在する。

関係あるいは算法という基礎概念は幾つかの基礎集合から有限生成された集合⁴の元で表せる。基礎集合を表す記号 $X_1, \dots, X_m$ と基礎概念を表す記号 $\xi_1, \dots, \xi_n$ から、 Σ という型⁵ と、 $P_1(X_1, \dots, X_m, \xi_1, \dots, \xi_n)$ のような式の集合である Γ という公理系を考える。その型と公理系の組は数学的構造と呼ばれる。具体的な基礎集合と基礎概念を $X_1, \dots, X_m$ と $\xi_1, \dots, \xi_n$ に代入したとき、型における条件と公理とが満足される場合、この基礎集合と基礎概念の組はその数学的構造をもつ数学的体系と呼ばれる。個々の数学的体系をその構造(その公理系)のモデルという(『岩波数学辞典』121 B)。以上の定義を Def 1 と呼びたい。

群を例にとろう。基礎集合を G とし、基礎概念として $\circ \in \mathfrak{P}(G \times G \times G)$ を満たす算法⁶をとる。このとき型 Σ は $\Sigma = \{G, \circ\}$ となる。公理系に属する式として、 $P_1 \equiv \forall a, b, c \in G[(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)]$ 、 $P_2 \equiv \exists e \in G[\forall a \in G(e \circ a = a) \wedge \forall a \in G \exists x \in G(x \circ a = e)]$ と定義すると、公理系 Γ は $\Gamma = \{P_1, P_2\}$ である。この場合 $\langle \Sigma, \Gamma \rangle$ は数学的構造となる。そこでこの組を群構造と呼び、 $\mathbf{G}$ と表すことにしたい。次に、有理整数全体からなる集合 $\mathbf{Z}$ と算法として加法 $+$ をとると型の条件が満たされ、 $\forall a, b, c \in \mathbf{Z}, (a+b)+c = a+(b+c)$ であり、 $\exists 0 \in \mathbf{Z}[\forall a \in \mathbf{Z}(e+a = a) \wedge \forall a \in \mathbf{Z} \exists (-a) \in \mathbf{Z}((-a)+a = 0)]$ であるから公理系が満たされるので、有理整数の全体は加法に関して群となり、有理整数加法群 $(\mathbf{Z}, +)$ は群構造 $\mathbf{G}$ の一つの体系となる。0 を除く有理数全体 $\mathbf{Q}^*$ と乗法 $\cdot$ の組 $(\mathbf{Q}^*, \cdot)$ も同様に群構造 $\mathbf{G}$ の一つの体系となることが示される。従って体系 $(\mathbf{Z}, +)$ 、 $(\mathbf{Q}^*, \cdot)$ は群構造 $\mathbf{G}$ のモデルである。

他方、モデル理論では、構造は対象領域・諸関係・諸関数・諸定項の順序 n 組と定義される(これを Def 2 と呼びたい)。この流儀に従うと $(\mathbf{Z}, +)$ と $(\mathbf{Q}^*, \cdot)$

は構造と呼ばれる。この $\mathbf{Z}$ と $\mathbf{Q}^*$ は台集合と呼ばれる。

Def 1 の体系は Def 2 の構造に対応する。シャピロは体系が文脈に応じて構造として扱われうるということを認めるから、その限りで彼の構造主義は、上述の Def 1 と Def 2 とは矛盾しないであろう。従って、数学における構造と体系に関する限り、第 2 節で述べられた彼の特徴づけは実際の数学における用法をカバーできるものと考えられる。だが彼の言う構造はこうした実際の数学における構造よりも外延が広いと言うことができる。数学内外の「構造」を扱おうとしているからである。従って構造の外延を広くとることで内包を狭くとることになる。換言すると、彼の言う構造に対する条件は緩く、適用条件が幾分曖昧なものとなっている。そのことによって彼は、構造についてのより一般的な理論を目論んでいると言えるかもしれない。だが肝心の数学における構造に関して曖昧にしか規定できないならば、数学の哲学としては力が弱い。

5. 例化関係

本節では例化関係が、実際に数学に適用されるための観点から見て、彼の議論において多義的に用いられていることを示したい。そのために、数学への適用に際して見込みのある例化関係の候補として、同型関係とモデル関係を挙げる。そして彼にとってさらに悪いことに、双方ともうまくいかないことを示す。

シャピロは「例化」ということで何を意味しているかを十分に明確にしていない。彼は数学における例化と数学と日常的事物との間に成り立つ例化を幾つかの例を用いて何とか説明しようとしている。彼によると自然数構造は、偶数の自然数全体、負の整数体系、ノイマン有限順序数、ツェルメロ数字、アラビア数字、時間の離散的な瞬間列、辞書的順序の文字列、 $| \dots$ といった縦棒列等々によって例化される ([P], 6, 82-3; [T], 258)。従って、例化関係は数学的構造とそれ以外の間に成り立つ関係でもある。だがまず例化関係が、数学における構造と体系の間できちんと定義されるような関係なのかを検証してみなくてはならない。

シャピロが前述のように説明しても、依然として例化関係は明確ではないが、二つの候補があるとは少なくとも言えるであろう。一つは「同型」関係、もう一つは Def 1 における「モデル」関係である。まず同型関係が例化関係の一つの有望な候補になりうるということを論じたい。

N を自然数全体からなる集合、 S を後続者関数、 $2N$ を偶数全体からなる集合、 SS を二を足す関数とおく。シャピロの議論から、 (N, S) と $(2N, SS)$ は (N, S) を例化する、と以下の理由によって言うことができる。

彼は「偶数の自然数が自然数構造を例化する」($[P]$, 83) と述べている。そして彼は、体系が位置とそれら位置の上の関係や関数の集まりであると定義している($[P]$, 93-4)。このことから、偶数の自然数からなる体系 $(2N, SS)$ は自然数構造 (N, S) を例化しているということが帰結する。この例から判断して、さらにトリヴィアルな例として次の主張が含意される。つまり自然数体系即ち (N, S) は自然数構造即ち (N, S) を例化することになる。

さてこの場合に、例化関係を数学の言葉でどう定式化できるだろうか。 $(2N, SS)$ から (N, S) への同型写像が存在する。また、 $(N, +, \cdot)$ から $(Z, +, \cdot)$ への準同型写像（埋め込み）が存在するが、同型写像は存在しない。この場合は $(N, +, \cdot)$ は $(Z, +, \cdot)$ を例化しているとは見なせないであろう。そこで数学上の例化関係の候補として、同型写像の存在による同型関係を考えることができよう。その理由を述べたい。

同型関係が例化関係の一つの候補でありうることはシャピロのテキストから推測される。構造理論の公理系において「構造と体系が同型である」という表現を彼は何度も使っている($[P]$, 94)。このことは第 2 節で引用している通りである。その箇所を除けば、彼は自分の著作の中で、体系と構造との間の関係として例化関係くらいしか出していない。「構造と体系の同型性」の定義を彼が与えていない以上、構造と体系との間に成り立つ関係である例化関係を同型関係として解釈することは、彼の文献に基づいた解釈である。

しかしこの解釈には困難がある。例えば関数 $f(x) = \log x$ をとると、正の実数

全体 $\mathbf{R}^+$ のつくる乗法群 $(\mathbf{R}^+, \cdot)$ から実数全体の加法群 $(\mathbf{R}, +)$ への同型写像 f が得られるから、 $(\mathbf{R}^+, \cdot)$ は $(\mathbf{R}, +)$ と同型であるが、 $(\mathbf{R}^+, \cdot)$ または $(\mathbf{R}, +)$ が群構造 $\mathbf{G}$ と同型であると我々が主張することはまずないからである。そう主張することは、構造と同型に関する数学者の用法に反している。

そこで次にモデル関係を取り上げよう。例化関係の数学における表現の一候補として、モデル関係を選ぶことも同様に自然だからである。シャピロの言う「体系が構造を例化する」という関係は、Def 1 における「体系は構造のモデルである」という関係によって、通常の数学におけるかなりの部分を十分に記述できるからである。このことは本稿において取り上げた群の例などを見れば明らかである。ところが例化関係をモデル関係と解釈しても問題が残る。 $(\mathbf{N}, \mathbf{S})$ あるいは $(2\mathbf{N}, \mathbf{SS})$ は $(\mathbf{N}, \mathbf{S})$ を例化する、つまりそれらは $(\mathbf{N}, \mathbf{S})$ のモデルであるというシャピロの主張は、数学におけるモデル関係の用法に反しているからである。

シャピロの構造主義を数学に適用する上で、例化関係には同型関係とモデル関係という自然な候補が二つあるが、どちらもうまくいかない。よって数学の哲学における構造主義において例化関係が機能しうる余地は限られていると言える。

6. 位置の身分

本節では「位置」に関する問題点を指摘する。つまり、対象的観点をとったときにどのようなものを位置と見なすかに関して一つの構造についてさえ多義性が存在し、オフィスの観点をとると数学に属さない事柄を扱うことになるということを示したい。

シャピロは、数学的对象は構造における位置であると述べるが、彼は位置の存在の仕方を十分に明確なかたちで論じていない。そこでまず、位置の対象的観点とオフィスの観点という彼の区別に留意しながら、位置の身分の解明を試みたい。

シャピロは次のように論じる。構造の位置が少なくとも文法的に、それ自体の資格において対象として扱われるという文脈がある。つまり位置を指示するもの

が固有名といった単称名辞である場合がある。こうした文脈は位置の対象的観点と呼ばれる。この場合、「各自然数 n に対して、 $m > n$ であるような素数 m が存在する」といった言明は、各構造がもちうるどんな例化物からも独立している、構造それ自体についてのものである。この観点から見ると、算術は自然数構造についてのものであり、その対象領域はその構造の位置からなっていて、位置は対象的観点から扱われる。同じことは数学の他の分野でも成り立つ。ある程度数学を解する者は、少なくとも表層文法のレベルでは、数学的構造の位置を対象として扱うことがある。構造主義者は、これが数学言語の基底にある論理形式を与えると考える。つまり「 $7+9=16$ 」のような算術言語における文は、自然数構造の位置を指示すると文字通りに考えられる。数を表示するターム (terms) は位置の対象的観点において現れる。数学の中では、数学的構造の位置は正真正銘の対象なのである ([T], 268-9)。

このシャピロの議論から判断すると、位置の対象的観点は通常の数学を実践しているときの観点に近いと思われる。自然数構造を例にとるなら、初めの何かがあって、その次を指定する操作があって、帰納法原理を満たすようなものなら何でも、その位置を占めることができる。このときそれらの位置を $0, 1, 2, \dots, n, n+1, \dots$ と名付け、それらを対象として扱うことができる。こうして、位置の対象的観点における主張は数学内で記述可能であると思われる。ところが実はそうではない。その理由を以下で説明したい。

上のように捉えたとき位置はどうなるかを群の場合で考えてみよう。 $(\mathbf{Z}, +)$ は Def 2 の意味で構造である。その台集合 $\mathbf{Z}$ の要素である各整数 $\dots, -n, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, n, n+1, \dots$ は位置と見なしうる。他方 Def 1 により、 $\mathbf{G} = \langle \{G, \circ\}, \Gamma \rangle$ も群の構造である。 $\mathbf{G}$ の要素が位置であると見すならば、位置の候補として、 G と $\circ$ が挙げられるであろう。群の公理を満たせばそれらに何(それぞれ例えば $\mathbf{Z}$ と $+$) が来ても構わないからである。位置の別の候補はそれらの条件を満たす群の各元 ($g \in G$) であろう。条件さえ満たせば g に何が来ても構わないからである。シャピロは位置がこれら二つの候補のどちらなのかに関して明確にしてい

ない。従って、位置の対象的観点でさえも数学内の言葉だけを使って確定できるとは限らない。確定するためには、ある特定の観点を設定することが必要である。その設定の仕方には恣意性が存在する。よって位置には曖昧さが残る。

他方、位置のオフィスの観点から数学に関する例を考察してみよう。シャピロは、「ノイマンの2はツエルメロの2より一つ多い要素をもつ」([P],82)、「 $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ is 2」([P],83)という例を挙げる。このisは述定のisと呼ばれていた。そして「そのように解されるなら、構造の位置は対象よりもむしろ性質のようなものである」([T],268)と彼は述べる。よって彼によれば、「 $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ は2である」は「 $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ は性質2をもつ」を意味していると言いうる。更に言うと、位置は役職と見なされるから、「 $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ は2の役割を果たす」ということを意味しているということもできよう。我々はこれらの主張において、ある構造における各位置を、その位置を占める対象を使って扱っている。かくして、オフィスの観点では、当該構造の位置を満たす対象を補給する背景的存在論が前提されていることになる(ibid.)。その観点では構造や位置は自立したものとしては扱われていない。この観点における主張は数学の定理として導出されることはないという意味で、数学に属さない言明になる。

従って、我々はシャピロ構造主義で実際の数学の内側から述べる時、位置の対象的観点によるほかはない。しかしこの観点においてさえ、位置の存在の仕方が明確でないという点を指摘した。彼はオフィスの観点と対象的観点を区別したが、實在論者である以上、位置は客観的にどのようなものなのかについてももう少し答える必要があろう。しかも彼は位置を基礎に据えて構造理論を展開しているのであるから、尚更である。それとも彼は「位置」を原始語とでも考えているのだろうか。しかし上で示したように、観点によって変化し一つの観点においてさえ捕らえどころのないものについての語を、原始語としてよいのか問題が残る。

7. 構造理論に内在する問題

第4～6節の議論を通して、「構造」「体系」「例化」「位置」という基本用語は多重の多義性と困難を伴うことが示された。従ってそれらに基づくシャピロの構造理論は、数学の哲学における構造主義を支えるものとして十分に機能しないという致命的とも言える問題を内包している。本節ではそのことに由来する、構造理論に内在する問題点を指摘する。

彼が構造理論を作った理由は、十分豊富な構造の存在論を確保するためであった([P], 92)。構造の理論と銘打った公理系であり、構造の存在を確保するためにそれを提出したと言う以上、実際の数学で使われる全ての構造をその公理から演繹できないと公理系としての存在意義がない。それが全数学における構造の存在を演繹することによって確保するための装置として目論まれたならば、未定義語が少なく簡潔で既に現代数学の必須の基盤とも言える公理的集合論の方が優れているであろう。彼の動機が数学以外のより広義の構造の存在も確保するためだったとしても、数学外の構造・体系・例化・位置といった概念はさらに曖昧なので、具体的にどう適用してよいかわからない。

シャピロの構造主義からすると構造は位置に先立って与えられる(第2節)ので、位置は構造によって決まる。この立場からすると、何が構造・体系・位置であるかは文脈や観点に応じて変わる。ある条件を満たせば何が来てもよいような場所として位置を考えるなら、群の場合、 $\mathbf{Z}$ でも $+$ でも各有理整数でも、 G でも。でも g でも文脈に応じて位置と見なせるはずである。それに対して、そうした場所に何が来ても不変な形式を、構造として認められそうである。しかしこの意味での構造自体も Def 1 と Def 2 に応じて構造だったり体系だったりしてしまう。こうして数学内においても、文脈の違いで構造・体系・位置が様々な解釈されてしまう。ところが構造理論においては、構造は Def 2 方式でモデル理論風に位置によって定義される([P], 93)。いったんあるものが構造と認められたら、構造理論に則っている限り、構造を体系として相対化する操作は公理内で指定されていない

いので、それは特定の構造のままであろう。構造理論ではそれらの解釈にぶれがないはずである。しかし数学の理論としての構造理論には多義的な解釈を取り込まざるをえない。

8. 構造の存在

シャピロによると構造の存在は、構造を特徴づける理論の整合性によってまず保証される ([P], 133-6)。だが本節では、構造の存在が構造理論において的確に保証されないということを指摘したい。

そこで、構造の存在を保証するとされる構造理論の公理を検討してみよう。その公理に出現する「体系と構造との間の同型関係」がどのようなものであるか、彼は明示的に記述していない。しかるに彼が著作の中で両者の間の関係として言及する適切な関係は例化関係くらいである。だが同型関係を例化関係と解しても、そのような考えは既に第5節で否定されていた。よって「体系と構造との間の同型関係」をどのように理解したらよいか不明なままである。

次に構造の存在を確保するものとされる整合性公理について論じたい。ここでの整合性 (coherence) は、数学において定義される無矛盾性 (consistency) とは区別されねばならない。シャピロの議論を踏まえて、その理由を以下のように再構成できよう。

整合性を無矛盾性と定義すると仮定する。1階論理は構造の一意性を保証しないから除外しておく。そこで2階論理を用いるとしよう⁶。2階論理の標準的意味論では完全性は成り立たない。従って無矛盾性は構造の存在を保証しない。よって、2階論理において整合性を無矛盾性と定義すると、構造の存在を確保するという求める結果が得られない。次に整合性を2階論理における充足可能性と定義してみると、整合性が構造の存在を保証してくれそうに思われる。だがこの方策は循環している。構造の存在を確保するために整合性をもってきて、整合性を確保するために充足可能性をもってきている (充足可能性は構造の存在を前提とし

て定義される)からである。そこでシャピロの提案は整合性を原初的な概念として扱うということであった (cf. [T], 288)。「私は『整合性』を、何か形式的なものに還元されない原初的で直観的な概念と見なし、敢えて厳密な定義を与えない」([P], 135)。

構造理論は構造の領域を与える目的で提出された。よって数学のあらゆる構造の存在を確保できなければならない。そこで構造の存在を保証するために彼は整合性公理を導入したと言えよう。しかしこれは公理の身分をもつものとして一般に受け容れられるのかどうか疑問が生じる。少なくとも公理的集合論の各公理以上に明らかなとは言えない。しかも公理に出現する「整合的」という語を原初的な概念ととったとしても、それをどのように確かめるのか蒙昧としている。我々はどのように「整合的」と判定できるのか。そこで彼は、言語の整合的な理解・使用・伝達によって構造の存在が正当化されうると述べる。「……我々の理論によれば、ある構造について整合的に論じることができるということは、その構造が存在する証拠なのである」([P], 120)。

シャピロはこうして、我々が数学的構造を実際に矛盾なく理解・使用・伝達できるという事実に訴えることによって、原初的な概念としての整合性を説明しようとする。従って整合性を確保するためには、我々は公理系としての構造理論の外にある事実に訴えなければならない。よって少なくとも構造理論の中では構造の存在を保証できない⁷。

9. 存在観上の齟齬と困難解消への展望

本節では、シャピロ構造主義のもとでの数学的対象の在り方と、集合論によるアプローチを採る構造理論のもとでの数学的対象の在り方との間には齟齬があることを示す。さらにその齟齬の解消の方途を展望したい。

「2階 ZF 集合論の焼き直し」([P], 95)で「モデル理論の中心的枠組みの公理化」([P], 93)としての構造理論の公理系は「 $\in$ 」と「集合」を原始語として使用して

いる。よって集合論に依存している。たとえこれらの言葉が何らかの日常言語ないしは原初的な直観によって支えられているとシャピロが答えたとしても、少なくとも何らかの集合概念と要素関係概念を前提せざるをえない。すると、構造は要素としての集合から構成されているわけだから、第一義的に存在するのは要素であるという立場に関与してしまう。

他方、アンテレム構造主義者としての彼は構造を主題とし、存在論的に第一のものと見なす([T],258)。「我々は数学的構造が自立していてアンテレムであると考える」([P],132)と彼が述べていることから明らかなである。しかし集合論を構造理論に対するメタ理論として必要とすることで結局は、要素としての集合を存在論的に第一のものと見なさざるをえない(さらに利点②が損なわれる)。

従って構造理論を採用することは、諸々の構造を自立した存在者と見なすアンテレム構造主義本来の立場に適合しない。それ故、彼の構造主義のもとでの数学的対象の在り方と、集合論によるアプローチを採る構造理論のもとでの数学的対象の在り方との間には齟齬が存することになる。

以上の考察から、数学の哲学において、实在論と構造主義を採り、構造理論を集合論によって公理化しようとするシャピロの試みはうまくいかないことが示された。彼の立場を修正するためには、实在論、構造主義、構造理論、集合論によるアプローチのいずれかを放棄しなければならないであろう。いずれを放棄するかに応じて少なくとも四つの選択肢がある。a) 实在論を放棄するならば、ヘルマン流の様相構造主義へ向かうであろう。b) 構造主義を放棄するならば、集合のみが存在するという集合論的实在論へ向かうであろう。c) 構造理論を放棄するならば⁸、構造の理論を立てないレスニク流の構造主義へ向かうであろう。d) 集合論によるアプローチを放棄するならば、例えば圏論によるアプローチを採用することで構造を特徴づける道が残されていよう。实在論と構造主義を生かすとしたらc)とd)の道を選ぶことになる。その場合、「数学の主題は構造である」「数学は構造の科学である」という構造主義の出発点を尊重しつつ、実体としての要素の存在への関与に拘束されない新方向の模索が課題となろう。

10. 結論

シャピロの構造主義に関して次の(1)～(4)が示された。(1)構造と体系が数学への適用という観点から見て少なくとも二通りの仕方 で用いられている。(2)彼の構造主義を数学に適用する上で、例化関係には同型関係とモデル関係という自然な候補が二つあるが、どちらもうまくいかない。この二つの関係以外に数学の哲学として例化関係の自然な解釈を見つけるのは難しい。他の解釈が与えられたとしても、そのように解釈された例化関係が数学の哲学として機能しうるかどうかが問題が残る。(3)位置の対象的観点において何を位置と見なすかに関して一つの構造についてさえ多義的であり、オフィスの観点をとると数学に属さない事柄を扱うことになる。よって彼の基本用語である「構造」「体系」「例化」「位置」は数学において機能するには多義的すぎるし⁹、それぞれ問題が残る。さらに、(4)彼の構造主義のもとでの数学的対象の在り方と、集合論によるアプローチを採る構造理論のもとでの数学的対象の在り方との間には齟齬がある。シャピロの構造主義は、(1)～(4)に含まれる難点を抱えていることを考慮すれば、数学の哲学として成功するには余りにも多くの障害を含むと言わざるをえない。

文献

- Benacerraf, P., 'What Numbers Could not Be,' (1965), Benacerraf&Putnam eds., *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*. 2nd ed., 1983.
- デーデキント「数とは何か、何であるべきか」、『数について』河野伊三郎訳、岩波文庫、1961年。
- Hellman, G., *Mathematics without Numbers*, Oxford U.P., 1989.
- 日本数学会編集『岩波数学辞典』第3版、岩波書店、1985年。
- Parsons, C., 'A Structuralist View of Mathematics,' (1990), W. Hart ed., *The Philosophy of Mathematics*, Oxford U.P., 1996.
- Resnik, M., *Mathematics as a Science of Patterns*, Oxford U.P., 1997.
- Shapiro, S., [P], *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, Oxford U.P., 1997.
- , [T], *Thinking about Mathematics*, Oxford U.P., 2000.

註

- 1 著者名または角括弧内は文献中の著書の略記で、後に続く数字はその頁数を表す。
- 2 シャピロ構造主義は構造主義一般の利点①②を継承している。
- 3 シャピロにおける「構造」の解釈は他にもありうる。以下の説明は他の解釈を排除するものではない。だが数学における構造の定義に照らして、彼の構造を位置づけることは不可欠である。構造がそれら以外に解釈しようとすれば、その「構造」は数学から遠く隔たったものになろう。
- 4 有限生成された集合とは、直積操作 $\times$ と冪操作 $\wp$ を有限回施して得られた集合のことである。
- 5 Σ は $X_1, \dots, X_m, \xi_1, \dots, \xi_n$ からなる有限集合。 ξ_i は例えば $\xi_i \in \wp(X_{i_1} \times \dots \times X_{i_k})$ と書ける。
- 6 シャピロによると、構造の一意性に関して、2階論理の標準的意味論において特定の理論で範疇性が成り立つことによって、2階論理の方が1階論理よりも望ましいものとされる([P], 132-3)。だがこの論点に関して更なる検討が必要となろう。
- 7 「我々は数学を、数学それ自体よりも安定したいかなる領域あるいは理論においても基礎づけることができない。……基礎づけ主義は死んでいる」([P], 135) とシャピロは述べる。構造理論を我々の言語運用の事実に依拠させているから、たしかに彼の構造主義は基礎づけ主義とは言えないであろう。だが構造の領域を確保するために彼は構造理論を持ち出しているわけだから、基礎づけ主義の要素を完全に払拭できているとは言えない。よって、基礎づけ主義に否定的な彼の態度と、構造の領域を確保するという基礎づけを指向する彼の動機は相容れない可能性がある。いずれにせよ、彼は構造の存在を構造理論によって十分に保証しているとは言えない。
- 8 構造をより厳密に定義できる言葉として公理的集合論による方が、観点に一貫性がある分だけ望ましいとも言える。構造の領域を確保する構造理論の目的は、数学の実践において特に不都合なく公理的集合論で代用できるから、構造理論は不要であると言いうる。
- 9 それらを原始語として文脈的に定義されると見なしても、原始語が多すぎて、具体的な数学的諸構造に対して構造理論の適用の指針が欠けているから、実際の数学の諸理論に対して首尾よく機能しない。しかも「集合」「要素」も原始語として与えているので、公理的集合論より未定義語が多い。

Shapiro's Structuralism in Philosophy of Mathematics

Ken SAITO

The aim of this paper is to examine Shapiro's structuralism in philosophy of mathematics and to show several difficulties in his structuralism. He adopts *ante rem* structuralism which is based upon his realism. After delineating his arguments I will point out some advantages of his structuralism, which become apparent when it is compared especially with a traditional type of mathematical Platonism. Then I will show, by using examples taken from mathematics, that there are some ambiguities in his uses of the basic notions, such as structure, system, exemplification and place. Finally I criticize his axiomatic theory of structure mainly because it relies upon too many undefined terms, and show that in his ontological views there is an underlying discrepancy between his *ante rem* structuralism and his set-theoretic approach to structures.