HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	スキーマによるインレ構造主義
Author(s)	斉藤, 健
Citation	哲学, 42, 15-33
Issue Date	2006-07-18
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/35042
Type	departmental bulletin paper
File Information	42_LP15-33.pdf



Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

北海道大学哲学会『哲学』42号（2006年7月）

スキーマによるインレ構造主義

斉藤　健

数学におけるものどもはどのように存在するのだろうか。この哲学の問題は、数学の通常の営みと区別されながらも、密接な関係をもちつつ論じられてきた。この問題に対して、数学の哲学における構造主義は、構造を中心に据えて、数学的対象の一般的性格を明らかにしようとする。ここでの構造主義はすなわち、数学の主題(重要なもの)が、個別の対象というよりは、むしろそれらが関係づけられる構造である、という立場である[1]。

P. ベナセラフ(Benacerraf 1965)以降、構造主義は数学の哲学において主要な研究領域の一つとして確立された。M. レスニク(Resnik 1997)はパタン(pattern)による構造主義を提示し、S. シャピロ(Shapiro 1997)は構造の存在を主張するアンテレム(*ante rem*)構造主義を展開した。ところが彼らの構造主義は基本的に集合論に依拠しており、圏論に現れる構造を的確に扱えない(斉藤 2004)。圏論も数学の一分野である以上、構造主義は圏論における構造も扱えなければ不十分であろう。

1990年代以降 G. ヘルマン(Hellman 2003)ら中心的論者が圏論に関して論及するようになり、現在 S. アウォディ(Awodey 1996, 2004)、E. ランドリ(Landry 1999)、J-P. マルキ(Marquis 1997)、C. マクラーティ(McLarty 2004)らが、構造主義は圏論に現れる構造を適切に扱えるかどうか、圏論は構造主義の枠組を提供しうるかどうかに関して議論を展開している。2005年ランドリとマルキはスキーマ(schema)という概念[2]に基づいて**圏における**構造を扱うインレ(*in re*)構造主義を提出した(Landry & Marquis 2005)。我々は、彼らのいうスキーマを**圏論**だけでなく**集合論**における構造をも扱えるように拡張して、新たなスキーマによるインレ構造主義を提示できる。本稿の

目的は、構造主義をとるならば、拡張されたスキーマによるインレ構造主義が最も広範囲の構造を扱え、利点を備えた立場であることを示すことである。

本稿の構成は以下の通りである。第1節ではスキーマによるインレ構造主義という立場を提示する。第2節では構造主義をとる場合に考えられる意義を述べる。第3節ではインレ構造主義の意義を考察する。第4節ではスキーマによるインレ構造主義の特徴とその意義を論じる。第5節では本稿の考察をまとめる。

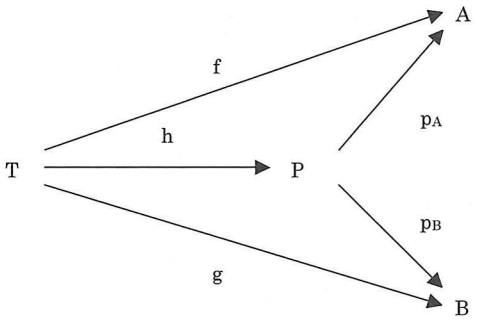
1．スキーマによるインレ構造主義とは

まず集合論で記述される構造について考えよう。群は次のように定められる。Gを集合とし、$\circ$をG×GからGへの2項演算(関数)とする。この演算に関して結合律が成り立ち、単位元と逆元が存在するとき、$(G,\circ)$を群という。群の性質は公理によって定められる。群の公理系に属する式を、$P_1 \equiv \forall a \forall b \forall c(a,b,c \in G \rightarrow (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c))$, $P_2 \equiv \exists e(e \in G \wedge (\forall a(a \in G \rightarrow e \circ a = a) \wedge \forall a(a \in G \rightarrow \exists x(x \in G \wedge x \circ a = e))))$と定義する。公理$P_1$, P_2を満たす各$(G,\circ)$によって共有される型を群構造と呼び、**G**と表したい。Zを整数全体の集合とし、Qを有理数全体の集合とする。＋を加法演算、・を乗法演算とする。このとき$(Z,+)$, $(Q\setminus\{0\},\cdot)$は群をなすが、これら個々の群は群構造**G**を共有している。**G**は個別の群によって共有される構造である。

ここで、アンテレム構造主義を、構造がその個別例(体系)から独立に(先立って)存在しているという立場とし、インレ構造主義を、構造がその個別例(体系)にいわば内在しているという立場とする。群の場合、アンテレム構造主義では、**G**がその個別例$(Z,+)$, $(Q\setminus\{0\},\cdot)$などから独立して存在していると解釈され、インレ構造主義では、**G**が$(Z,+)$, $(Q\setminus\{0\},\cdot)$などにいわば内在すると解釈される。

圏論[3]で記述される構造も考えられる。圏における二つの対象の積の定義を

取りあげる。任意の圏 C における任意の対象 A と B の積は、次の条件を満たす対象 P と射 $p_A : P \to A$ と $p_B : P \to B$ からなる。すなわち、C における任意の対象 T と任意の射 $f : T \to A$ と $g : T \to B$ に対して、$f = p_A \circ h$ かつ $g = p_B \circ h$ を満たす唯一の射 $h : T \to P$ が存在するという条件である。(このとき $P = A \times B$, $h = \langle f,g \rangle$ と書かれる。)この積の普遍写像性は、以下の図式を可換にする唯一の射 h が存在することを意味する。

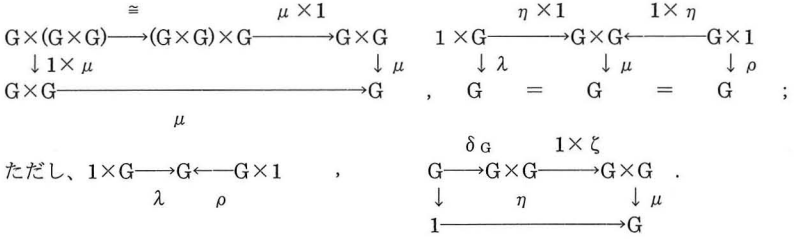


図式(π)

集合の積・群の積・位相空間の積といった個別の積は、上記の積の定義を満たすという意味で、圏における対象の積に関する構造を共有していると言える。この構造を Π と呼びたい。構造 Π は例えば、積に関する図式(π)を通して表現されうる。アンテレム構造主義では、構造 Π が個別の積から独立して存在すると解釈される。インレ構造主義では、構造 Π が個別の積の例に内在していると解釈される。

別の例を挙げよう。圏の中の群(group in a category)は次のように定められる。終対象と有限積をもつ任意の圏 C の中で群は特徴づけられる[4]。C の中の群は次のような対象 G と射 μ,η,ζ からなる。すなわち、$\mu : G \times G \to G$, $\eta : 1 \to G$, $\zeta : G \to G$ であって、δ_G は対角射(diagonal map)[5]であり、以下の可換図式を満たす。

このように、圏の中の群を対象と射からなる図式(γ)によって表現できる。



図式(γ)

圏 C の中の群の型は図式(γ)による特徴づけによって定められる。言い換えると、圏の中の群の構造が図式(γ)において表現されていると言えよう。この構造を Γ と呼びたい。

図式(π), (γ)がそれぞれ表す Π と Γ は一種の型であるが、その型に当てはまれば、その対象と射には何が来てもよい。この型を構造と解釈できる。アンテレム構造主義では、その型が個別例に先立って存在すると解釈される。インレ構造主義では、その型が個別例に内在していると解釈される。

さて我々は任意の数学的対象に関する定義にその対象を定める公理を含めることができる。例えば群の公理は群の定義に含まれるものとする。そこで本稿ではスキーマを、数学における定義によって定められる型として特徴づける。このようなスキーマを構造と見なすインレ構造主義を、スキーマによるインレ構造主義と呼びたい。

本稿で規定するスキーマは、ランドリとマルキ(Landry & Marquis 2005)のいうスキーマの拡張である。彼らのいうスキーマは、基本的に公理によって特徴づけられた圏を介して扱えるけれども、例えば随伴関係(adjunction)自体をスキーマとして扱えない。これを扱えるように、「構造は、圏に対する公理によって定められるスキーマである」という規定を、我々は次のように拡張できる。公理によって特徴づけられた圏だけではなく、圏論や集合論を含む数学における諸々の概念の定義に基づくスキーマの規定を明示的に導入すればよい。つまり「構造は、数学における定義によって定められるスキーマである」という規定を新たに与えることにしたい。

圏論に関して言うと、例えば圏における対象の積の定義や圏の中の群の定義によって定められるスキーマは構造として扱える。先ほどの例で言うと、圏における対象の積の定義によって定められる型Πや、圏の中の群の定義によって定められる型Γが、スキーマに相当する。

もちろん集合論におけるスキーマも扱える。先ほどの例に関して、$(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}\setminus\{0\}, \cdot)$といった個別の群としての具体的な構造と、それらがその例となる群一般としての抽象的な構造$\mathbf{G}$に分けるとしよう。スキーマによるインレ構造主義によれば、抽象的構造$\mathbf{G}$は通常の集合論に基づく群の定義で定められるスキーマである。スキーマ$\mathbf{G}$の個別例は$(\mathbb{Z}, +)$や$(\mathbb{Q}\setminus\{0\}, \cdot)$である[6]。

先に述べたが、アンテレム構造主義は、抽象的構造がまず存在して、具体的構造がそれに従うとする立場である。他方、インレ構造主義では、具体的構造がまず存在して、抽象的構造が具体的構造から抽象されると説かれる。抽象的構造は定義によって定められるスキーマとして導入される。このように、拡張されたスキーマによって、圏論でも集合論でも記述される諸構造に適用できるインレ構造主義が提示されうる。

2．構造主義をとることの意義

本節では、構造主義をとるとすれば、どのような意義が考えられるのか、二つの点から論じたい。2.1項では、数学が何かに基礎づけられるとは主張しがたい点から見て、構造を何かに還元せずそのまま考察することもできるという(消極的な)意義を述べる。2.2項では、構造主義は数学の実践に適っているという(いくぶん積極的な)意義を述べる。

2.1　基礎づけ主義の困難

本項では以下のことを論じる。少なくとも現在においては、数学に関する基礎づけ主義(foundationalism)は維持しがたい。従って、何かを基礎に置

かなければ数学的対象の在り方について語れない、という主張には困難がある。このことから、構造をより単純な構成要素に還元することなく、構造のレベルにおいてその在り方を第一に考察する構造主義のアプローチに一つの意義が与えられうることを論じたい。

たしかに次のような疑問が生じるのも当然であろう。数学がより根源的な何かによって基礎づけられているということを重視すべきではないか。基礎づけの在り方を考察することで、「真正なる」数学的対象の在り方を見極められるのではないか。

だがマルキが詳細に論じているように(cf. Marquis 1995)、何をもって数学の基礎づけとするかは「基礎づけ」に関する観点の相違に依存する。従来の数学の哲学は、どのように数学が基礎づけられているかに大きな関心を抱いてきた側面がある。その基礎こそが数学的対象の本質を表すと考えられるからであろう。とりわけ集合論や圏論は数学を基礎づけるのかどうかがしばしば問題とされてきた。マルキは数学の「基礎づけ」という表現は多義的であり、(大きく分けて)少なくとも以下の6通りの意味を含むと分析している。以下でSとTは何らかの理論体系を表すものとする。

(1) SがTの論理的基礎であるのは、SからTの定理をすべて演繹できる場合をいう。例えばZF集合論は数学諸理論の論理的基礎である。(2) SがTの認知的基礎であるのは、Sなくして Tを理解できない場合をいう。この条件は強い認知的解釈と呼ばれる。また弱い認知的解釈として次の2種類がある。SがTの教育的基礎であるのは、Sに依拠してTを学ぶことができる場合をいう。SがTの発見法的基礎であるのは、SがTについての諸事実を発見するための手助けとなる場合をいう。(3) SがTの認識論的基礎であるのは、Tの確実性(あるいは必然性または分析性など望ましい認識論的性質)はSに由来する場合をいう。(4) SがTの意味論的基礎であるのは、SはTに必要な対象領域を与え、意味論を展開できる場合をいう。(5) SがTの存在論的基礎であるのは、TはSにおけるもの(存在者)どもからできている場合をいう。(6) SがTの方法論的基礎(あるいはプラグマティックな基礎)であ

るのは、S の概念は、T の対象に関する事実を創造する／明確にする／証明するための道具として使用される場合をいう(cf. Marquis 1995, p. 431)。

集合論は数学の「存在論的」「論理的」「意味論的」「方法論的」「発見法的」基礎を与える。だが「(強い) 認知的」「認識論的」基礎を与えるとは言えない。というのも、集合論が建設される前から数学における諸事実は発見され理解され蓄積されてきたし、数学の確実性が集合論(の公理)に由来するわけではないからである。また、公理的集合論にはいくつもの体系があるし、それらの体系の間で互いに相反する公理を採用する場合があるからである。同様に、圏論は「存在論的」「論理的」「意味論的」「方法論的」「発見法的」基礎を与えると言える。だが「(強い) 認知的」「認識論的」基礎を与えるとは言えない。というのも、圏論がなくても通常の数学は理解できるし、数学の確実性が圏論(の公理)に由来するわけではないからである。このように、どの立場をとるかによって、集合論あるいは圏論が数学の基礎づけと見なされるか否かが決定される。つまり、集合論あるいは圏論が数学を基礎づけるか否かは、基礎づけに関する我々の観点に依存する。

たしかに数学における諸事実は集合論を基にして通常記述され、記述された言明は、公理と定義を適切に設定して推論規則を使うことによって論理的に厳密に導出されうる。しかし公理的集合論に限っていえば ZF 集合論でも BG 集合論でも記述してよい。そしてこれら集合論は万能ではない。例えば巨大基数の諸事実に関する言明は、ZF 集合論の通常の諸公理から導出できない。また圏論は、数学の諸分野に跨る、様々な構造間の関係を簡明に記述するのに特に優れている。しかし圏論に対してもいくつかの記述のされ方や構成の仕方がある[7]。このように、基礎づけの方法はいくつかあって、どの方法が最良かを判断することは容易でない。言い換えると、還元のされ方が複数あり、どれが正しいとも判断しがたい(どれも正しいとも言える)。そうである以上、還元される前の対象の在り方を、還元先によってすべて決めてしまうことには無理がある。唯一正当な還元法が存在するかどうかも自明ではない。このように、唯一の基礎の存在を主張し、そこへすべてが還元される

という基礎づけ主義は、少なくとも現在は採用するのは困難だと考えられる。

要するに、数学を基礎づける方法は様々にあり、どれも特権的な枠組になってはいない。それに対して、数学において構造をそのまま扱い考察する構造主義は、圏論や集合論さらには数学における構造をすべて還元せずに扱う点で利点をもつ。

2.2 数学の実践

構造を主題に置くことは、数学において主要な実践に適っている。数学では公理あるいは定義を適切に設定して、それによって定められる構造を中心的に用いて、数学に関する諸事実が導かれ説明される。構造主義はその意味で、数学的対象を最も基礎的な存在に還元しようと試みる立場に劣らず、数学の実践に適っている。構造主義者は構造に優先権を与えることにより、相異なる記述方法に現れる存在者のうち、どちらが「真正な実体」であるかを決定しなくてもよい。唯一の枠組への還元や基礎づけという考えに拘泥しないために、彼らは準同型写像や同型写像といった対応づけによって、数学的知識の主要部をなす、各分野における諸々の関連及び分野相互の諸連関を簡明な仕方で説明できる。数学者の多くは、例えば加群や可換環といった対象とその諸性質を一般的に考察する際に、それらを、その構成要素に分解されたものとして捉えているわけではないであろう。むしろ彼らは多くの場合、構造及び、構造を保存する準同型写像という脈絡において当該の対象を扱い、その諸性質を探究していると考える方が実状に近いのではないか。そうであれば、構造の観点を重視する構造主義は、要素還元主義的な観点をとる立場よりも、数学者の実践に近いと言える。

3．インレ構造主義の意義

本節ではインレ構造主義の意義を述べる。インレ構造主義には存在論に関

して以下の利点があると考えられる。インレ構造主義は、より抽象的な構造の存在を前提にしない。群の例では、$(\mathbb{Z}, +)$や$(\mathbb{Q}\setminus\{0\}, \cdot)$といった個別の群の存在を認めれば十分なのであって、それらによって共有される構造**G**の存在を前提にしなくてよい。数学では実際、個々の群あるいはそれらに共通する性質が論じられるのであって、その際**G**そのものの存在を前提しているわけではないと考えられる。このようにインレ構造主義は、抽象的構造の存在を第一に認めるアンテレム構造主義と比較して、過多な存在者を認めなくてよい。よってインレ構造主義はいわば慎ましい存在論で十分であり、存在論において負荷の少ない立場である。

インレ構造主義において、数学的対象に関する認識論は以下の過程を経るものとして説明できる。まず我々は数学に関する言語活動から具体例を理解する。次に、それらに共通する性質を抽き出し、その性質を満たす対象を措定する。そしてその新たな対象を一般的に体系的に扱うために、その性質を特徴づける定義(あるいは公理)を設定し体系化する。我々はそれらの定義によって定められる型としてスキーマを立てることができる。言い換えると、インレ構造主義では、具体例から、それらの共有する構造が抽象され、認識・理解されるという観点がとられる。抽象的な構造の存在から始める必要はない。個々の例の理解が前提されたうえで、それらに共通な性質をもつ構造があとで取り出されると考えられる。このように、インレ構造主義では、我々の数学における対象ないしは構造の認識や理解に基づく観点から考察される。言い換えると、数学における諸対象を具体例から把握し理解していくという我々の認識の在り方が中心に据えられている。

他方、理論化し公理化したあとの反省的観点において、理論体系を整序する場合には、定理の導出関係(論理関係)や一般と特殊の関係について理解するうえで、アンテレム構造主義の観点は有効である。アンテレム構造主義は、数学的存在が構成される仕方や順序の観点からみると、自然な立場であると考えられる。

4．スキーマによるインレ構造主義の特徴と意義

本節では、スキーマは我々の言語活動を介して把握され理解されるという点を論じ、スキーマによるインレ構造主義をとるならば、その利点としてその汎通性が挙げられることを述べる。そしてスキーマの在り方を考察し、スキーマによるインレ構造主義の意義は、数学的対象一般に関する我々の哲学的理解に資する点にあることを指摘したい。最後に、圏論において特別な圏の対象もスキーマとしての構造の観点から捉えられることを論じる。

4.1　スキーマとしての構造の把握と理解

本項では前節との関連で、スキーマによるインレ構造主義では、スキーマとしての構造がどのように把握され理解されるのかを論じたい。さて群のスキーマとしての構造**G**は、群の定義を満たす型として想定されていた。**G**は、群の定義が与えられてはじめて定められ、群がどのようなものであるかという我々の言語による規定に依存して定められる。このようにスキーマとしての構造は、数学で通常使用されているメタ言語に依存している。従って当該の構造は言語使用に依存して理解されることになる。数学に関する言語活動における整合的な使用と伝達によって、我々は数学の当該分野における諸構造を把握し理解すると言える。当座は、直観的な意味で(局所的であれ)整合性を保って、使用と伝達がされればよい。

ところで、スキーマとしての構造に全数学が論理的な意味で基礎づけられると考えるべきではない。スキーマに全数学を論理的に還元しようとするならば、循環に陥ってしまうからである。というのも、スキーマは通常の数学の定義があってはじめて規定されるものであり、定義の方がスキーマよりも論理的に先立っているからである。

ここで構成的観点と記述的観点を区別したい。構成的観点を、数学的対象の構成要素と構成のされ方を明確にする観点とする。この観点によれば、対象が何からできていて、またどのように構成されているかを明確にする必要

がある。他方、記述的観点を、数学的対象やそれらの間の対応づけを記述することを目的とする観点とする。この観点によれば、数学的対象やその対応づけがどのように振舞うのかを記述できれば十分なのであって、その構成要素や構成のされ方を問う必要はない。

上述のスキーマとしての構造を把握する仕方は、構成的観点から見れば、たしかに不十分である。スキーマをそれ自体として分解しないで考えるからである。だが記述的観点から見れば十分である。というのも、我々が構造を把握する最初の段階や、構造の一般的性質や振舞いまたは諸構造の関わり合いを理解する際には、それらが何からできているのかを明確にする必要はないからである。構成法が問われた場合には、必要に応じてあとから構成的観点を導入すればよい。構成的観点は、数学の営みを反省していく態度と関連し、多くの基礎論研究とその関心を共有する。だが2.1項で論じたように、基礎づけ主義(あるいは還元主義)は(少なくとも現在では)維持しがたいので、我々は構成的観点をとる必要はない。スキーマによるインレ構造主義はスキーマによって数学を基礎づけるわけではないのである。

4.2 スキーマの汎通性

スキーマによる構造主義は、数学で定められるあらゆる構造をスキーマとして扱える。つまり、集合論によってであれ圏論によってであれ、数学におけるすべての構造を扱える。数学において定義されさえすれば、構造はスキーマとして捉えられるからである。よってスキーマによる構造主義は、構造主義の中では、扱える構造に関して最も汎通性がある。

スキーマによる構造主義は、数学における定義によって定められる型として構造を説明する。この構造主義によって、集合論における構造だけではなく、圏における対象の積の型、自然数対象の型、随伴関係の型などを含めて、圏論において定義されるすべての型をスキーマとして捉え、構造として扱うことができる。集合論であれ圏論であれ、数学における定義によってスキーマが与えられるから、スキーマとしての構造は、構造主義の観点からすると、

扱える構造に関して最も汎通性がある。

数学では、群の構造 **G** や圏における対象の積に関わる型 Π などは(明示的にではないにせよ)普通に扱われているが、それらはスキーマとしての構造と考えられる。このようにスキーマとしての構造は、数学に現れる構造を最も広汎に捉えられる。スキーマによる構造主義は、定義によって定められる(例えば群なら **G** という)スキーマを中心に据え、それについて論じていく。この点で、数学者の実践において重要な観点から、構造を分解せずそのまま把握し、その在り方を考察していくことができると言える。

4.3 スキーマの在り方とその意義

第3節に関連して次のように論じられる。スキーマによるインレ構造主義によれば、構造はその在り方に関して、その具体例に先立っているわけではなく、具体例にいわば内在している。実際の数学では、スキーマとしての構造があたかも直接扱われていると思われるかもしれないが、むしろその具体例について当てはまる一般的な性質を研究していると考えられる。インレ構造主義は、過剰な抽象的対象の存在を前提しなくてもよい立場であった。

それでは、数学においても哲学においてもスキーマとしての構造が予め存在するものとして主張しないとすれば、スキーマによるインレ構造主義はどのような意味で構造主義なのかと問われるかもしれない。その問いに対して、スキーマとしての構造は哲学的理解の場面で有効である、と答えることができる[8]。数学では、構造という概念を直観的に用いて、数学における諸対象やそれらの関係がしばしば説明される。構造が数学の理論体系の正式な用語として定義されていないような場合であっても、例えば図式によって何らかの構造を提示すると言われる場合のように、我々は構造を把握できると考えられる。スキーマによるインレ構造主義の意義は、哲学の観点からスキーマという概念を用いて、上述の素朴だが自然な見方を統一的に展開できる点にある。

たしかに、数学における定義によって定められる型にスキーマという名を

与えたからといって、それがどのような形をしているか、またそれが具体的にどのような構造なのか、何から構成されているのか、という問いに直ちに答えられるわけではない。スキーマによるインレ構造主義では、それらの事柄は認識し難いという側面をもつことは否めない。しかし構造のような抽象的な対象あるいは型は感覚的に認知しなければ無意味になるものではない。我々はそれらを感覚的にではなく言語活動を介して把握すればよいし、実際、数学における大部分の対象や構造あるいはその構造を保存する対応づけなどをそのように把握しているからである。

4.4 定集合と可変集合に関するスキーマとしての構造

本節の最後に、スキーマとしての構造をさらに理解する上で考察すべき例に関して論じたい。本項では、スキーマによるインレ構造主義において、F. W. ローヴェア(Lawvere)のいう定集合(constant set)と可変集合(variable set)の在り方がどう考えられるかを論じたい。圏論において特別な圏であるトポスの対象としての定集合と可変集合の在り方を、スキーマによるインレ構造主義の観点から捉えられる。というのもトポスとその対象は圏論において定義されるからである。特に可変集合の構造は、それ自体で独立に抽象的に存在すると考える必要はないという点でインレ構造主義に適合する。以下そのことを論じる。

ローヴェアによるETCS公理系[9]は、(ただしETCS公理系を満たす圏がXであるという条件下で)以下のS. マクレインの定式(MacLane 1986, pp. 399-402)と同値である。次に後者を参考に公理系を提示する[10]。

公理Ⅰ：Xは圏をなす[11]。公理Ⅱ：Xには終対象1と引き戻しが存在する。公理Ⅲ：Xには任意の二つの対象に対して冪が存在する。公理Ⅳ：Xには部分対象分類子(subobject classifier)が存在する。公理Ⅴ：Xには自然数対象が存在する。公理Ⅵ：Xでは任意のエピックがsectionをもつ(選択公理)。公理Ⅶ：Xでは1がseparatorで、始対象0と1は同型でない(well-pointed性)。

これらの公理は集合論を前提せずに定式化される[12]。公理Ⅰ～Ⅶを満たす圏は、自然数対象をもち選択公理を満たすwell-pointedトポスと呼ぶことができる。この圏をSと表記する。Sの対象は定集合または抽象集合(abstract set)と呼ばれる。他方、公理Ⅰ～Ⅳを満たす圏は初等トポス(elementary topos)と呼ばれる。可変集合は初等トポスの対象と考えてよい(Lawvere 1976, p. 102)。

Tを任意の小さな圏[13]とし、Eを任意のトポスとすると、TからEへの関手を対象とする関手圏E^{T}はトポスになる。Sはトポスであるから、関手圏S^{T}もトポスになる。よってS^{T}の対象はトポスの対象であるから、可変集合である。そこでS^{T}の具体例を挙げよう。2を、対象U, 1と、射$\mathrm{U}\to 1$, id_{U}, id_{1}からなる圏とする。2の双対圏2^{op}をとり、2^{op}からSへの関手圏を考える。この関手圏を$S^{2^{\mathrm{op}}}$と表示する。$S^{2^{\mathrm{op}}}$は2段階可変集合(two-stage variable sets)の圏と呼ばれ、$S^{2^{\mathrm{op}}}$はトポスになる。$S^{2^{\mathrm{op}}}$の対象は2^{op}からSへの関手であり、可変集合である。

また、Mを圏としてのモノイドとし、関手$\mathrm{M}\to S$を対象とすれば、関手圏S^{M}ができる。S^{M}は離散力学系の圏である。この圏も可変集合を対象とするトポスである。つまり離散力学系自体が可変集合である。

それでは、こうした定集合と可変集合にどのような構造が見出され、その構造はどのような在り方をしているのだろうか。スキーマによるインレ構造主義の観点から定集合に関する構造と可変集合に関する構造を探ってみたい。まず圏をスキーマとして考えてみよう。圏としての初等トポスの構造は、先述の公理Ⅰ～Ⅳによって定められるスキーマである。自然数対象をもち選択公理を満たすwell-pointedトポスSの構造は、公理Ⅰ～Ⅶによって定められるスキーマである(cf. Landry & Marquis 2005, p. 34)。可変集合と定集合は各々の圏の対象であるから、これらの構造は圏としてのスキーマとは異なる。そこで次に別の観点から考えてみよう。可変集合の構造は、公理Ⅰ～Ⅳを満たす圏の対象によって定められるスキーマとして捉えられる。定集合の構造は、公理Ⅰ～Ⅶを満たす圏の対象によって定められるスキーマとし

て捉えられる。これらの対象は圏論で定義されるので、スキーマに必要な型を形成するからである。

可変集合を対象とする関手圏のトポス(先のS^{T}としよう)の場合、圏Tの種類に応じて可変集合の構造の種類が決まると考えられる[14]。Tに(基本的に)どの圏が来てもよいという意味で、S^{T}という圏自体もある種のスキーマと捉えられうる[15]。

ローヴェアによると、これらの可変集合は我々の実生活に現れ、それゆえ具体的なものでもある。時間ごとに変化する一軒当りの人口の例が挙げられる(Lawvere & Rosebrugh 2003, p. 17)。またビリヤード台の球の個数変化は、2段階可変集合の圏の例として考えられうる。ある生態系の時間ごとの変化を記述すれば、離散力学系の圏の例になりうる。これらの具体例は現実世界に現れ変化するという在り方をしている。これらの例から判断すると、可変集合がそれ自体としてある特定のアンテレム構造をもつというよりも、むしろ具体例の中にその構造が内在していると考える方が自然であろう。上述のスキーマに関する議論と総合すると、可変集合はスキーマによるインレ構造主義におけるスキーマとしての構造の典型例と考えることもできる。それに対して定集合は、いわば具体的である可変集合を何らかの仕方で抽象してできた集合であり、現実の変化や運動に関わらず一定の在り方をしている。例えば物事の個数はそれ自体として固定化され抽き出されれば、それは抽象的であって、基数として一定の在り方をしている。つまり定集合はそれ自体を切り離すなら、実生活にそのまま現れるわけではない。この状況は、定集合が抽象集合と呼ばれる理由の一つを与えると考えられる。公理に基づく規定から明らかなように、定集合は可変集合の特殊例であり、またスキーマとしての構造としても捉えられるけれども、以上の点で可変集合の在り方とは異なっていると言える。

5．結　　語

集合論でも圏論でもすべての数学を基礎づけるという考えは現段階では確定的でない。数学全体を何か不動の土台の上に基礎づけるよりも、様々な構造とそれらの相互連関を重視する考え方が、数学の実状から見て、自然な見方であろう。その意味で、構造を構成要素に還元せずに統一的に扱う構造主義をとることには意義がある。

数学における存在者は定義によって定められる。当該の定義によって定められる型はスキーマと見なされる。スキーマによる構造主義によれば、集合論や圏論で記述されるすべての構造はスキーマとして扱える。つまり数学に現れる構造すべてをスキーマとして考えることができる。こうしたスキーマはインレ構造主義の枠内で扱える。インレ構造主義はアンテレム構造主義よりも、存在論において負荷の少ない立場である。従って、スキーマによるインレ構造主義は汎通性と存在論上の利点をもつ立場であり、数学の哲学において、数学的対象の在り方に関して一つの見込みのある観方を提供できると言える。

注

[1] 本稿で扱う構造は、集合論で定義される構造に限定しない。数学に現れる様々な形式を広く指すために「構造」を使用する。

[2] 代数幾何学におけるスキーム(scheme)とは別の概念である。

[3] 圏論の用語については例えばMacLane 1998を参照。

[4] 圏 C における対象のすべての対に関して積が得られるなら、C は「積をもつ」という。そして有限個の対象の積を有限積という。

[5] 対角射は、図式(π)でいうと、BとTをAで例化し、fとgを1_Aで例化したときの、射$h=\langle 1_A , 1_A\rangle$のことをいう。

[6] 我々は**G**とΓをスキーマと見なしたとき、二つが同一であるか否かを判定する共通の基準をもつわけではない。ただし圏論と集合論の間で**G**からΓ、Γから**G**へ翻訳する仕方が与えられている。**G**は**集合としての群**のスキーマであり、Γは**圏の中の群**のスキーマ

であり、両者は各々の文脈で同様に振舞うと言える。

[7] 集合論に基づいて圏論を展開する方法、圏論で集合論と等価な部分を展開する方法、圏と関手から圏論を展開する方法がある。

[8] この考え方はレスニク(Resnik 1997)やランドリとマルキ(Landry & Marquis 2005)の考え方に近い。

[9] Lawvere 1964 における公理系は ETCS 公理系と呼ばれる。

[10] 別の同値な公理系として例えば Lawvere & Rosebrugh 2003, chs. 6, 9を参照。

[11] 公理Ⅰは集合論に依存せず述べられる。例えば MacLane 1998, pp. 9, 289を参照。

[12] 圏論において構造を論じる際に、集合や関数を持ち出すことがあるが、それらは集合論に依拠せずに、上記の仕方で圏論の言葉だけから定められる。従ってそのような文脈では、集合と関数はそれぞれ S の対象と射のことであり、論述を複雑にしないために用いられるにすぎない。

[13] 圏 C が小さい(small)と呼ばれるのは、C の対象すべての集まりと C の射すべての集まりが共に集合である場合をいう。

[14] あるいは、T に様々な図式(これらの図式は圏と見なされる)を当て嵌めることによって、それに応じて T に各構造が示されていると言える。例えば T に$\circlearrowright$と$\rightrightarrows$いった図式をおくことができる。T=$\circlearrowright$のとき関手 T→S は離散力学系となり、T=$\rightrightarrows$のとき関手 T→S はグラフとなる。このように、T のタイプに応じて、S には様々な構造が現れ、特に内的図式(internal diagram)において各構造が現れると考えられる(cf. Lawvere & Schanuel 1997, partⅢ)。

[15] この観点は、T を代数的理論(algebraic theory)と考えると、普遍代数(universal algebra)のアイデアと密接に関わる。

文　献

Awodey, S. 1996. 'Structure in Mathematics and Logic : A Categorical Perspective,' *Philosophia Mathematica III, 4,* 209-37.

Awodey, S. 2004. 'An Answer to Hellman's Question : "Does Category Theory Provide a Framework for Mathematical Structuralism ?",' *Philosophia Mathematica III, 12,* 54-64.

Benacerraf, P. 1965. 'What Numbers Could not Be,' *Philosophical Review, 74*(1), 47-73.

Hellman, G. 2003. 'Does Category Theory Provide a Framework for Mathematical Structuralism ?' *Philosophia Mathematica III, 11,* 129-57.

Landry, E. 1999. 'Category Theory : The Language of Mathematics,' *Philosophy of Science, 66,* Proceedings, S14-S27.

Landry, E., & Marquis, J-P. 2005. 'Categories in Context : Historical, Foundational and Philosophical,' *Philosophia Mathematica III, 13* (1), 1-43.

Lawvere, F. W. 1964. 'An Elementary Theory of the Category of Sets,' *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 52*(6), 1506-11.

Lawvere, F. W. 1976. 'Variable Quantities and Variable Structures in Topoi,' *Algebra, Topology, and Category Theory,* Academic Press, 101-31.

Lawvere, F. W., & Schanuel, S. H. 1997. *Conceptual Mathematics : A First Introduction to Categories,* Cambridge University Press.

Lawvere, F. W., & Rosebrugh, R. 2003. *Sets for Mathematics,* Cambridge University Press.

Mac Lane, S. 1986. *Mathematics : Form and Function.* Springer-Verlag.
(S. マックレーン『数学—その形式と機能』, 赤尾和男・岡本周一訳, 森北出版, 1992年)

Mac Lane, S. 1998. *Categories for the Working Mathematician* (2nd ed.), Springer. (S. マックレーン『圏論の基礎』, 三好博之・高木理訳, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2005年)

Marquis, J-P. 1995. 'Category Theory and the Foundations of Mathematics : Philosophical Excavations,' *Synthese, 103,* 421-47.

Marquis, J-P. 1997. 'Category Theory and Structuralism in Mathematics : Syntactical consideration,' *Philosophy of Mathematics Today,* Agazzi & Darvas (eds.), Kluwer, 123-36.

McLarty, C. 1992. *Elementary Categories, Elementary Toposes,* Clarendon Press, Oxford.

McLarty, C. 2004. 'Exploring Categorical Structuralism,' *Philosophia Mathematica III, 12,* 37-53.

Resnik, M. 1997. *Mathematics as a Science of Patterns,* Oxford University Press.

斉藤　健. 2004.「数学の哲学におけるレスニクの実在論と構造主義」,『科学哲学』第37巻2号, 日本科学哲学会編, 149-62.

Shapiro, S. 1997. *Philosophy of Mathematics : Structure and Ontology,* Oxford University Press.

In Re Structuralism by Schema

Ken SAITO

abstract

Structuralism considers structures to be principal. According to *in re* structuralism, a structure resides in particular systems exemplifying the former. I characterize a schema for any mathematical entity as a pattern framed by its definition including its axioms in mathematics, no matter how described by set theory or category theory. The aim of this paper is to present *in re* structuralism by schema and to argue for it. *In re* structuralism commits less abstract entities than *ante rem* structuralism. From the presented position we can regard all the structures (including variable sets) as schemas framed by definitions in mathematics. Such schemas can be comprehended through mathematicians' communication in metalanguage.