HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	周期構造をめぐって ： 泡筏・ポリマー・Turingパターン
Author(s)	西浦, 廉政
Description	非線形数理・秋の学校 パターン形成の数理とその周辺 反応拡散方程式理論による時･空間パターンの解析を中心に. 平成19年9月25日～平成19年9月27日. 東京都. （科学研究費補助金基盤研究（S）「非線形非平衡反応拡散系理論の確立」の若手研究者育成の一環として開催されたもの）
Relation	講義ノート 非線形数理秋の学校「パターン形成の数理とその周辺」ー反応拡散方程式理論による時･空間パターンの解析を中心にー. pp.91-109
Issue Date	2007-09-25
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/35218
Type	conference paper
File Information	nishiura-2.pdf



Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

周期構造をめぐって
-泡筏・ポリマー・Turing パターン-

北海道大学・電子科学研究所
西浦廉政

1　はじめに

化学反応系の渦巻きパターン、流体系のベナール対流、さらに神経伝播パルスや形態形成パターンなど散逸系のパターンダイナミクスは実に多様である。これらが興味を集めるのは、他の多くの非線形系でも見られるように、ルールは局所的であるにも拘らず、全体としてはデザイナーがいるかのように美しい動的秩序が自発的に現れることである。その仕組みを理解し、さらに予測や制御ができるようにするのがパターン形成理論の大きな目標となる。
空間周期パターンの生成といえば、いわゆる Turing による「拡散不安定性」に基づく生成原理が最もよく知られている（最後の補遺の章参照）。それは一様な状態が種による拡散の速さの違いにより不安定化がおこり、ある特定の波数モードが立ち上がるというものであった。化学反応系の実験においてこの事実が確認されたのはわりと最近のことである。その後、近藤滋氏の講演でも紹介されたように生命科学における実験でも Turing の視点は重要であることがわかってきている。しかし一般的には周期パターンは必ずしも一様な状態の不安定化から生じるわけではなく、全く別の機構から生まれることも多い。歴史的にも反応拡散系という枠組みではなく、例えば結晶構造や周期的極小曲面などで多様な周期構造が研究されてきた。にもかかわらずこれらの間に深い関係があることが最近わかりつつある.
本講演では Turing の拡散不安定性及びポリマーの周期構造に簡単に触れた後, 周期構造の 1 ユニットの自発的生成原理のいくつかの例を示すことで周期パターン生成の新たな視点を提示したい。ここでの議論はある意味で Turing の生成原理と相補的なものであり、全体として周期パターンに関

わるダイナミクスの理解が深まれば幸いである。文献等については全く網羅的ではなく, 本予稿を作成するに用いた教科書的なもの ([1, 2, 3, 4, 5, 6]) のみを中心に記載したので重要なものが多々抜けていると思われる. どうかご容赦願いたい.

2　周期構造-泡筏-

「はん」で押したようなという言葉があるが、周期構造を作るには「鋳型」を用いるのが簡単である。鋳型にものを流し込み、それを並べていけばよい。このようなものとしては図１のような「泡筏」（あわいかだ）がひとつの例となる。-ファインマン物理講義録「電磁波と物性」岩波書店参照 -

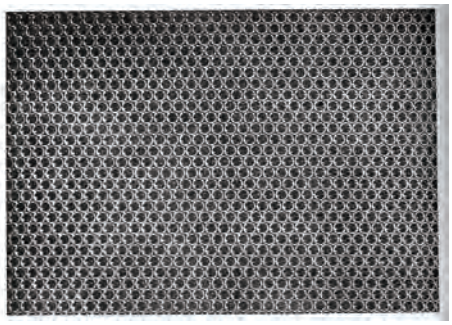


図 1: 泡筏

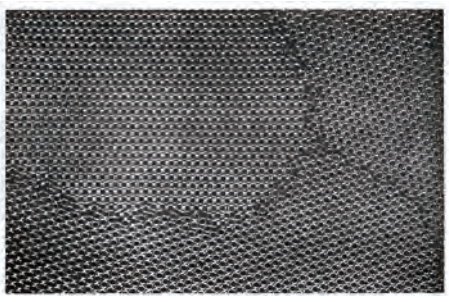


図 2: 泡の不整合パターン

規則正しい泡筏を「実際に」作るには次のような問題を解決せねばならない。

- 規則的な泡はどうして作るのか？
- 六角状の蜂の巣パターンはどうして選ばれるのか？
- パターンの不整合 (defect, dislocation　図２参照) は排除可能か？

規則的に作られた泡がたくさんあるとして２番目以降の問題を考えるのが数学としては普通の設定となるが、ここでは最初の生成原理も問題としたい。むろん実際の実験で使用する泡製造機は既に存在するが、ここでは数理的な意味で「自発的な規則パターン生成原理」はあるのかを考えたい。話の順序として講演ではまず２番目のパターン選択問題を変分法（エネルギー）の観点から議論し、その後１番の泡生成の問題を議論する。３番目の不整合一般についてはおそらく最も難しくまた実際上も重要な問題であるがここでは割愛する．しかし不均一性由来の不整合による自発的パターン生成に関連して最後に少し述べることにする．

3　表面積最小原理

石鹸を入れることで、膜の表面張力が弱くなり、結果として内圧と表面張力のバランスから決まる泡の半径が石鹸がない場合と比べて, はるかに大きくなる。そのお陰で大きな泡を作ることができ、かつそれは長持ちする。泡のサイズが均一な球になるのは、Young-Laplace の法則と一定体積を包む最小面積の形は球であることによる。「界面の面積は最小にしたい」が中に空気があり, いくらでも縮むことはできず、内外圧差と表面張力からそのサイズが決まることになる．泡が単独であればこれで終わりであるが、たくさんある場合には泡の集合はどのような形状をとるであろうか．実際に実験してみると、図１のように蜂の巣状の六角構造をとる．これは円盤や球の最密充填問題とも関連するであろう．一般に２つの異なる物質が接して界面を形成するとき、その界面の占める面積を最小にするというのは数学的にどのように定式化すればよいのであろうか？次の節のエネルギー最小化原理がこれに答えるものとなる．

4　相反する力とのバランスにより生み出される多彩な周期構造 -ブロックコポリマーを題材にして-

表面張力は局所的力であり、そこでの曲率に比例して働く。一方物理的には弾性力のような長距離力もある。そのような長距離力は短距離力とは異なる効果をもち、結果として多彩なパターンを生み出す力となる。以下ではそのような例として共重合ポリマー系 (diblock copolymer) をとり上げ、短距離力と長距離力のバランスにより特徴的長さの決定、ダブルジャイロイドをはじめとする３次元モルフォロジーがいかにして生まれるか議論しよう.

共重合コポリマーとは２種の異なるホモポリマーA及びBが結合したものであり, 典型的にはそれらAとBは反発的である。したがってA同士あるいはB同士で集まりやすくなる. それらが結合されていなければ、互いに離れ、最終的にはマクロ相分離となる (パンダ模様). しかし離れたくともそれらが結合されているならば、マクロ相分離は不可能である。それでは何が起きるのであろうか？図２の模式図を見てみよう. このとき鎖長が短い方（仮にこれをAポリマーとしよう）が丸く集まり、それらを鎖長の長いBポリマーが取り囲むという状況が起きている. AとBはつながっているので、丸いAポリマーの塊の間の距離はAとBの鎖長の和を越えることはない。結果として周期は高々それらの鎖長の和以下である。この長さは分子オーダーよりはるかに大きいが（通常何十万以上という分子鎖である）, 目に見えるマクロスケールよりはうんと小さいいわゆるメソスケールとなっている.

コポリマーの形態は次のエネルギー $\mathcal{F}^{\epsilon,\sigma}$ を最小にする minimizer として決定される。

$$\mathcal{F}^{\epsilon,\sigma} = \int_\Omega \Big\{ \frac{\epsilon^2}{2}|\nabla u|^2 + W(u) + \frac{\sigma}{2}\big((-\Delta_N)^{-1/2}(u-m)\big)^2 \Big\} dx \tag{1}$$

$$\text{ここで}\ \ u \in H^1(\Omega) \quad \text{及び} \quad m = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u dx,$$

ここで $W(u)$ は $u = \pm 1$ で最小値をもつ２重井戸ポテンシャルとよばれているものであり, m $(-1 < m < 1)$ は２種類のポリマーの重量比を表すパラメータである。第３項は **空間非局所項** であり、AポリマーとBポリマーの結合を表す. この非局所性はここではラプラシアンの逆作用素

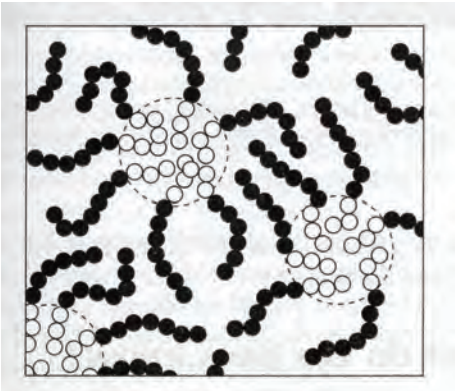


図 3: コポリマー:白丸（Aポリマー）と黒丸（Bポリマー）はつながっており, A同士、B同士は集まりやすい. 少数派のAは丸い形状をとる.

（反射境界条件の下での）の分数冪 $(-\Delta_N)^{-1}$ で表現されている。空間平均 $u-m$ は常に 0 となることに注意しよう. パラメータ $\sigma>0$ ポリマーの鎖長に関わるものである。このような定式化の詳細は [1], [6] を参照されたい. このエネルギーから導かれる Euler-Lagrange 方程式はポリマー粒子の保存を考慮すると $H^{-1}(\Omega)$ での勾配をとることが必要となり, 結果として次のようになる. ここで $f=-W'$ と書いた.

$$\begin{cases} u_t &= -\Delta\{\epsilon^2\Delta u+f(u)-\sigma(-\Delta_N)^{-1}(u-m)\} \\ &= -\Delta\{\epsilon^2\Delta u+f(u)\}-\sigma(u-m), \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} &= \dfrac{\partial(\Delta u)}{\partial n}=0, \\ u(x,0) &= u_0(x), \qquad \overline{u_0}=m. \end{cases} \tag{2}$$

相分離でよく知られた Cahn-Hilliard 方程式との違いは右辺の線形の反応項だけであり、一見すると状態 $u=m$ を安定化するだけのように見えるが, 実際はそれが非局所項を担っており, 大きな違いを生む. まず 1 次元の場合を考えよう.

$$\min_{u\in A_m}\mathcal{F}^{\epsilon,\sigma}(u) \tag{3}$$

$$\text{with}\ \ A_m:=\Big\{u\ \Big|\ u\in H^1(0,1),\ \int_0^1 u dx=m\ \Big\}.$$

大西ー西浦, Ren-Wei などにより次の結果が知られている（[1] も参照）.

定理 4.1 仮定 $m=0$ と $W(z)=W(-z)$ の下で. ある $\epsilon_0>0$ が存在して, 問題 (4.20) は $0<\epsilon<\epsilon_0$ の範囲で次の性質を満たす最小解 $u^{\epsilon,\sigma}$ をもつ.

(i) 最小解 $u^{\epsilon,\sigma}$ は一意に決まり, その周期 $P^{\epsilon,\sigma}$ は次で特徴付けられる.

$$P^{\epsilon,\sigma} = 2\Big(3\sqrt{2}\,A\frac{\epsilon}{\sigma}\Big)^{\frac{1}{3}} + O(\epsilon^{\frac{2}{3}}).$$

(ii) 最小解でのエネルギー値は次のようになる.

$$\mathcal{F}^{\epsilon,\sigma}(u^{\epsilon,\sigma}) = \frac{\sigma}{8}\Big(3\sqrt{2}\,A\frac{\epsilon}{\sigma}\Big)^{\frac{2}{3}} + O(\epsilon^{\frac{4}{3}}).$$

ここで

$$A = 4\int_{-1}^{1}\sqrt{W(s)}\,ds.$$

である.

注意 4.1 最小解の周期 $(= O(\epsilon^{\frac{1}{3}}))$ は２種のポリマー間の遷移層の厚さ $(= O(\epsilon))$ とマクロスケール $(= O(1))$ との中間（メソ）スケールとなっている． その周期は $\epsilon \to 0$ のときに 0 へ収束するので、この最小解は**微細構造**を反映したものとなっている.

さて上の最小解はなぜ微細構造をとるのであろうか. 界面（１次元の場合は遷移層の個数）を最小にするという原理からはこれは一見矛盾するようにも見える. 実際第３項の非局所項がない場合, つまり Cahn-Hilliard 方程式の場合, 界面はただ１点となり, これは前節の最小化原理と合致する. しかし第３項が存在する場合, そのようなマクロ相分離解は $\mathcal{F}^{\epsilon,\sigma}$ を最小にするものとはなりえない. 実際そのようなものは簡単な計算により第３項を $O(1)$ とするので, 最小解からはほど遠い. 逆に $u = m$ の周りで激しく振動する解はこの項を小さくする. それは作用素 $(-\Delta_N)^{-1/2}$ はコンパクト作用素であり, 激しく振動して 0 に弱収束するとこれは 0 に強収束する. 一方であまり激しく振動すると第１項, 第２項の寄与が無視できなくなる. 結果として丁度うまくバランスする振動周期があり, それはすべての項が同等に寄与する $O(\epsilon^{1/3})$ というスケールとなるのである.

上の結果の２次元への拡張は Chen-大下らにより与えられ、それによると**六角構造**が確かにエネルギー最小を与えることがわかっている. しかし空間３次元においてはこの問題は単純ではない. 注意深い数値計算によれば、ラメラや柱状構造以外にもダブルジャイロイドなどの複雑な３重周期構造をもつ解が確認されており、そのいずれもがエネルギー最小

となるパラメータ領域をもつことが確かめられている ([7, 8] 参照). この方向への厳密理論の展開は大きな課題の一つである.

多峰型エネルギー形状

空間非局所項は微細構造を生み出すのみならず、非常に多数の local minimizer も作り出すことも知られている.

定理 4.2 ([1]) 今 $\epsilon \to 0$ とすると, コポリマー汎関数 (4.18) の *local minimizer* の個数は無限大となる.

ポリマーパターンと Turing パターン

これまではあるエネルギー汎関数の minimizer の特徴付けという観点からそのスケールや形状を議論してきたが, それらは反応拡散系の定常解（いわゆる Turing パターン）とどのように関連しているのであろうか？　次の新たな変数 v を導入することで、上の問題は以下のように書き換えられることにまず注意しよう。

$$v = -\epsilon^2 \Delta u - f(u),$$

$$\begin{cases} 0 = \epsilon^2 \Delta u + f(u) + v, \\ 0 = \Delta v - \sigma(u - m) - u_t, \end{cases}$$

u が時間依存しない場合, これは典型的な 2 変数反応拡散系の定常問題であり, 多くの数学的手法によりその解の存在や安定性の議論が可能となる。一方でこれまでに議論してきたように変分問題の minimizer として多様な解が存在することもわかってきた. したがって自然な発想は **Turing パターンを変分問題の解として捉えなおす**こととなる. 実験的にも数多く確認されたコポリマーの解の多様性が (とりわけ空間 3 次元における) Turing パターンの解の多様性を導くこととなる. 既に太田ー昌治ー上山ー山田らにより数値的にこの方向の結果は得られつつある. しかしより広い反応拡散方程式系の定常解に対して「擬変分構造」のような立場から包括的に捉えることはまだできていない.

5　自発的パターン生成原理

これまでの議論では周期構造がどのように生み出されるのかについてはほとんど議論してこなかった. そのようなものが存在するとして、そ

れがどのような構造や周期をもつのかを中心に述べてきた.　最初の例にあげた泡筏においても「個々の泡をどのように作るのか？」という生成原理は重要である。それでは周期構造の単位をなすユニットは作る際の指針になる考えはあるであろうか。いくつかの機構が発見されているが、ここでは細胞分裂型と不均一型について簡単に説明しよう。共にある種の不安定性がもたらす現象である.

5.1　自己複製ダイナミクス（細胞分裂型)

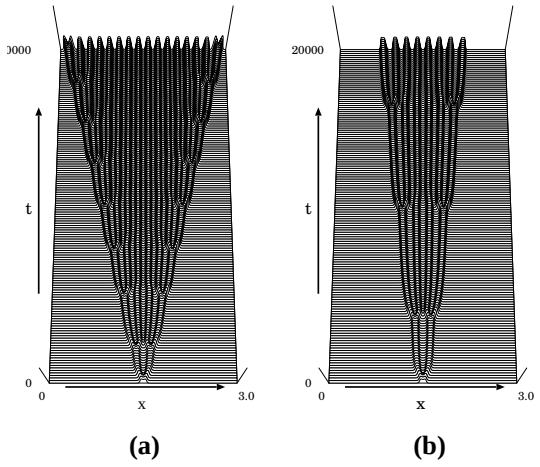


図 4: 自己複製パターン

定常パルスがサドルノード型の不安定性により、自分と同じパルスを図 4 のように複製することが可能となる [9, 1, 4, 5]. 区間が有限であれば最終的には周期パターンが得られる. 着目すべきは単独パルスは安定には存在できないが、周期パルスは存在できるという点である。その意味でも細胞と似たところがある。図 4 は Gray-Scott モデルという反応拡散系を解いたものであるが、そこでは自明な平衡解は漸近安定で拡散不安定性は起こらない. 講演ではもう少し詳しく説明したい.

5.2　不均一性から自動生成されるパルス

場が不均一であると、そこが新たな構造が出現する起源となることがある [10]. 図 5 はある 3 種反応拡散系において, 反応項の係数がある点で

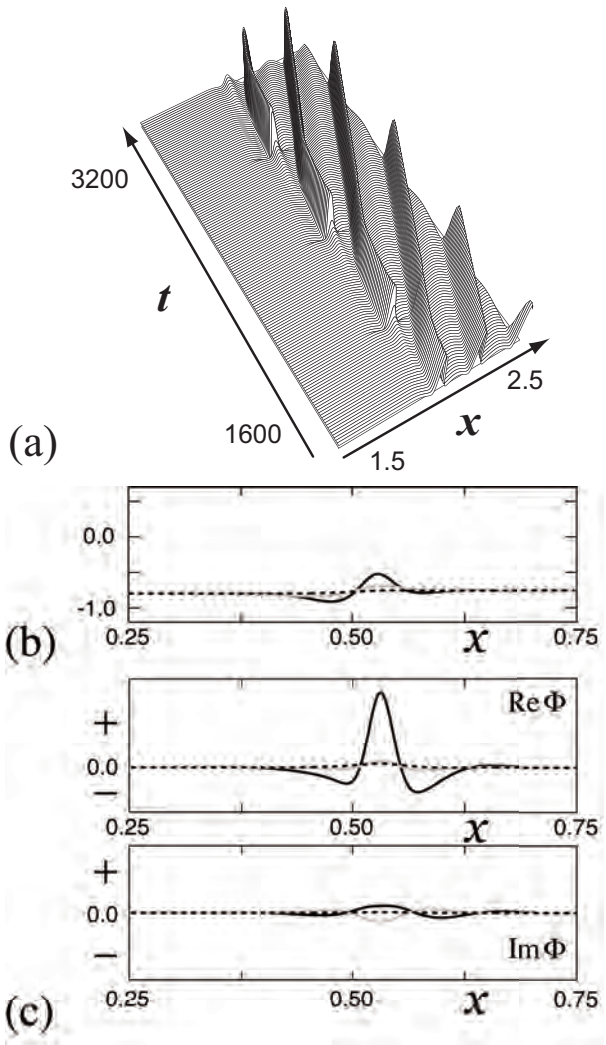


図 5: 不均一性から生じるパルス生成 (a) パルス生成の時空プロット (b) 不均一性をつなぐヘテロクリニック解　(c) 不安定固有関数（複素固有値) の形状. 出展は [10]

不連続性をもつ場合の例を示している. 横は空間 1 次元の軸, 縦は時間軸である. そのような不均一性が不安定解の存在を可能とし、その不安定解が安定周期進行パルスを生み出す機構を保持している. これについても講演にて少し詳しく述べたい.

6　補遺ー拡散誘導不安定性

いま 2 つの物質 $U = (u, v)$ の反応が次の常微分方程式 (以下**反応系**とよぶ) で書かれるとしよう。

$$\begin{array}{l} \frac{du}{dt} = f(u, v) \\ \frac{dv}{dt} = g(u, v) \end{array} \tag{4}$$

これが安定な平衡点 $U^* = (u^*, v^*)$ をもつとする。従って U^* で線形化して得られる右辺の線形化行列の固有値の実部はすべて負である。これに拡散効果を加えた次の方程式 -**反応拡散系**- において何が起きるかが問題となる。

$$\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = D_u \Delta u + f(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = D_v \Delta v + g(u, v) \end{array} \tag{5}$$

ここで Δ は N-次元ラプラシアン、D_u, D_v は拡散係数であり、境界条件は周期条件を採用する。また必要なら平行移動して平衡点は $U^* = (0, 0)$ として構わない。具体的には非線形性をフィッツフ・南雲型とよばれる次の場合

$$f(u, v) = u(1 - u)(1 + u) - v, \quad g(u, v) = \epsilon(u - \gamma v) \tag{6}$$

を頭において以下の計算をみていけばよい (ϵ, γ は正定数)。そこでの線形化行列の符号は非線形項 (6) の場合次のようになる。

$$\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}$$

U^* の (4) の解としての安定性は

$$f_u g_v - f_v g_u > 0 \quad f_u + g_v < 0 \tag{7}$$

の２条件により保証される。一般に線形化行列が上の符号をとるとき (u,v)-系は**活性-抑制系** (activator-inhibitor system) とよばれる。それは $f_u > 0$ は活性化因子 u の自己増殖を、$f_v < 0$ は v による抑制効果を、$g_u > 0$ は u の存在が抑制化因子 v の増大を促し、$g_v < 0$ は抑制化因子だけでは減衰していくことを意味することによる。これはむろん平衡点の近傍のみで有効であり、大域的には３次非線形性は u の飽和効果も与える。ここで注目すべきは、平衡点 $(0,0)$ は漸近安定であるが、$v =$ 定数と**固定**し、u のみの方程式と考えれば $(0,0)$ から離れていく。最終的には３次曲線 $f(u,v)=0$ の右あるいは左の枝に到達する。従ってもし v の拡散が u に比べて非常に速く平坦になれば、この隠れた不安定性を引き出せるかもしれない。実際これは可能であり、後出の必要条件 (20) の直感的意味もここにある。それを見るために、反応拡散方程式 (5) の一様解 $U^* = (0,0)$ における次の線形化方程式を考えよう。

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_u & 0 \\ 0 & D_v \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

次の形で解を求めればよい。

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \Phi_k \exp(\omega_k t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \tag{9}$$

(17) に代入すればわかるように、これは波数ベクトル $\mathbf{k} \in \mathbf{R}^N$ のフーリエモードに対して時間的変動を表わす ω_k という固有値をさがすことになる。実際 ω_k と k に関する特性方程式は次のようになる。

$$\omega_k^2 - T\omega_k + S = 0 \tag{10}$$

ここで

$$\begin{aligned} &T = T(k^2) = f_u + g_v - k^2(D_u + D_v), \\ &S = S(k^2) = f_u g_v - f_v g_u - (D_v f_u + D_u g_v)k^2 + D_u D_v k^4 \end{aligned} \tag{11}$$

である。拡散は等方的であり、反応項は回転不変であるので、$T,\ S$ は $h = k^2$ のみに依存する。条件 (7) 及び拡散係数は正なので、常に $T < 0$ である。まずスカラー拡散行列 $D_u = D_v$ のときは不安定性は起こらないことを見ておこう。条件 (7) より $S > 0$ となり、$T < 0$ と合わせて (10) は実部正の解はもち得ず、不安定化は起こらないことがわかる。従って以下では $D_u \neq D_v$ の場合のみ考える。また常に $T(h) < 0$ なので、ω_k は純虚

数値をとることはありえず、従ってホップ分岐はおこらない。よって実解すなわち $S=0$ となる場合のみ考えればよい。そこで拡散係数 (D_u, D_v) にどのような条件をつければ、ある波数 k に対応するモードの固有値 ω_k が原点を通り、正になるかを計算しよう。まず $f_u g_v - f_v g_u > 0$ なので、$S=0$ が正の h で成り立つには

$$D_v f_u + D_u g_v > 0 \tag{12}$$

が必要条件となる。さらにそれが最初の不安定化であるためには $dS/dh = 0$、すなわち重解条件

$$(D_v f_u + D_u g_v)^2 - 4(f_u g_v - f_v g_u) D_u D_v = 0 \tag{13}$$

が必要となる。このときの不安定波数 k_c（重解の値）は

$$k_c = \left\{ \frac{f_u g_v - f_v g_u}{D_u D_v} \right\}^{\frac{1}{4}} \tag{14}$$

で与えられる。注目すべきはこの値は U と V の拡散長の幾何平均に比例し、境界条件などによらない系の固有の波長

$$L = \frac{2\pi}{k_c} \tag{15}$$

をもつことである。これはベナ-ル対流のセルの大きさが外部要因で決定される場合と対照的である。これはナビエ・ストークス方程式が流速零の熱伝導状態での線形化方程式が上のような線形部分をもたないことに起因する。

上の不安定化条件をよくみれば、U^* での線形化行列の符号は必ずしも $\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}$ である必要はない。実際 (7) と (12) より f_u と g_v は同符号ではあり得ない。従って

$$f_u g_v < 0 \text{ かつ } f_v g_u < 0 \tag{16}$$

となる。ここまでは u と v の役割分担については対称であった。必要なら u と v を入れ替えれば、

$$f_u > 0 \text{ かつ } g_v < 0 \tag{17}$$

と固定してよい。f_v の符号は任意にとれるが、

$$f_v < 0 \quad g_u > 0 \tag{18}$$

を採用すれば上の活性・抑制系となる。一方

$$f_v > 0 \quad g_u < 0 \tag{19}$$

という選択肢を採用すれば**基質・消費系** (substrate-depleted 系) と呼ばれるものになり、符号は $\begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix}$ となる。このとき v の存在は u を増大 ($f_v > 0$) させる。v は反応基質（substrate）とも言うべきもので、u は温度、v は消費される燃料のようなものに例えられる。グレイ・スコットモデル (**??**) はこの基質・消費系の 1 例である（パラメータ (k, F) を適当にとれば双安定系となり、$(1, 0)$ ではない安定平衡点で線形化すればよい)。線形化行列の転置を考えれば、基質・消費系と活性・抑制系は互いに共役な系となっているといえる。(7) 及び (12) より、チューリング不安定性がおきるときは

$$D_v > D_u \tag{20}$$

でなければならない。すなわち**抑制 (基質) 因子の拡散速度が活性 (消費) 因子のそれより速い**ときにのみこの不安定性がおきる。

さてなぜこのようなことが起こるのかを幾何的直感に訴える形で説明しよう。以下にお見せする数値実験は非線形項は (15) の形を採用する ($\epsilon = 3, \gamma = 2/3$)。空間変数 x を媒介変数とみて、(u, v)-空間で (5) の解をプロットすると、周期境界条件なので、ある閉曲線が得られる（x が増大するとき、閉曲線内部を左に見るようにとる。一般にはこの曲線は自分自身と交わり、形状も複雑となるが、ここでは単純閉曲線となるように初期値をとっている)。解の時間変化はこの閉曲線の動きを追うことになる。反応項は (u, v)-平面の (13) のベクトル場に沿ってこの曲線を動かすように働く。拡散の役割は 2 階微分ゆえ、粗っぽくいえば**曲率に比例した収縮力**となる。さらに拡散係数の違いは縮み方の **異方性**をもたらす。これらを用いて、なぜ拡散誘導不安定性が起きるか考えよう。$U^* = (0, 0)$ の近くに図 6 のような初期値をとろう。これは (u, v)-平面では $(0, 0)$ を囲む円周となる。以下の 2 つの場合を比較することで拡散の役割が明確になる。 図 6 はスカラー拡散 $(D_u, D_v) = (10, 10)$ の場合、そして図 7　は拡散不安定性条件をみたし、従って抑制因子の拡散が速い $D_u < D_v$ 場合で

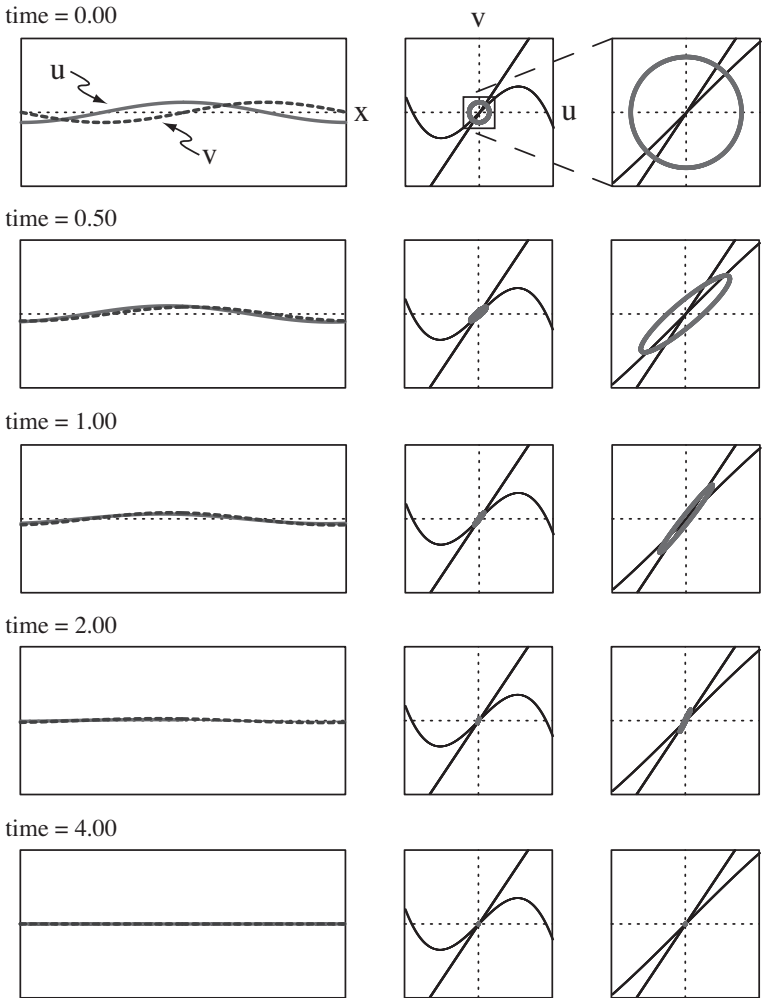


図 6: 等拡散の場合:$D_u = 10, D_v = 10$. 円状の初期値から出発したときの時間発展を (u, v)-空間でプロットしたもの。右はその拡大図であり、左は解のグラフ表示である。右斜めに楕円状に変形するのは、反応系のダイナミクスによる（安定結節点)。その後はすばやく輪が縮み、平衡点に収束する。

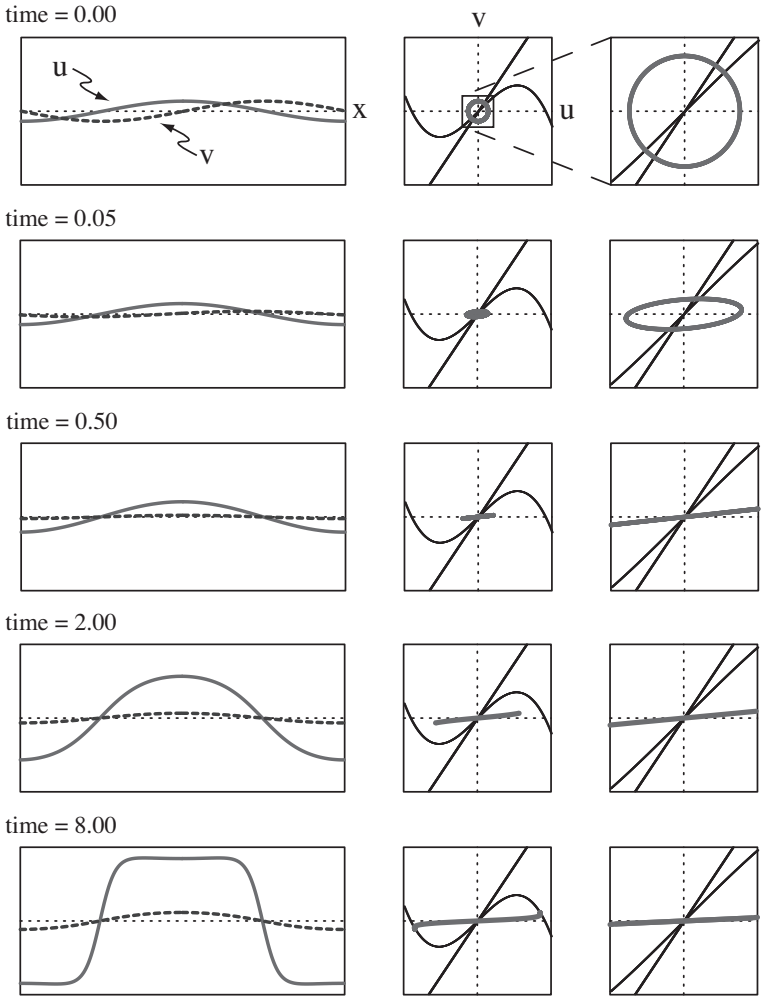


図 7: 異なる拡散の場合：$D_u = 0.4, D_v = 250.$ v-方向が圧倒的に速く縮むため、輪は扁平となりほとんど u-軸に平行な線分となる。この制限された方向では u は増大し、平衡点から離れて行く。

ある。仮定より $(0,0)$ は安定結節点ではあるが、その線形化行列の符号から円上の第 2(4) 象限から出発した軌道は一旦左下（右上）に行ってから原点に収束する。これに均等な拡散効果が入ると図 6 のようにこの動きが最初見られるが、その後一様にこの閉曲線は縮み、$(0,0)$ に漸近していく。不安定化する図 7 の場合を詳しくみてみよう。わかりやすいように $D_u = 0.4, D_v = 250$ とかなり極端にとったので、まず v-方向の縮みが急速に進み、その結果、閉曲線は横長の扁平な楕円に変形する。前に注意したように反応項のベクトル場は v を固定したとき、$a > 0$ であるから、$(0,0)$ から離れ、３次曲線の右あるいは左のヌルクラインに向かって動くことになる。よってこの扁平楕円は $(0,0)$ に近づかず離れてゆき - これが拡散誘導不安定化 -、あるところで拡散の曲率による縮みと反応項のベクトル場がバランスするところで止まる。一言でいえば、「拡散誘導不安定化」とは**拡散係数の違いが異方的縮みをもたらす**ことにより反応項のベクトル場に内在していた不安定化を引き出した結果であると言える。抑制種がより速い拡散により分散され、活性種の内包していた増殖力を抑えきれなくなって現れ出た不安定化といえる。図 7 の場合にはかなりこの比を大きくとったため、最終状態の空間非一様な定常解はそのグラフからわかるように、$f(u,v) = 0$ の左右の枝に大部分乗っており、それらをつなぐ急峻な内部遷移層が形成されている。このような解は特異摂動法により厳密に構成されることが知られている。
最後にこのようなチューリング不安定性を持つ時、ランダムな初期値から出発するとどのようなパターンが得られるであろうか？　１次元の場合は図 8 のような結果となる。ある特徴的な波長が選ばれていることがわかる。

最後に次のことを注意しよう。**任意の安定平衡点からいつも拡散誘導不安定性を起こせるわけではない**。f_u と g_v が異符号であるという要請から、これらが共に負であるような安定平衡点では拡散不安定性はおこせない。これはどの方向に限定しても不安定方向は存在せず、異方的縮みが機能しないからである。

参考文献

[1] 西浦 廉政:「非線形問題 I - パターン形成の数理 - 」岩波講座・現代数学の展開 7, 岩波書店 (1999).

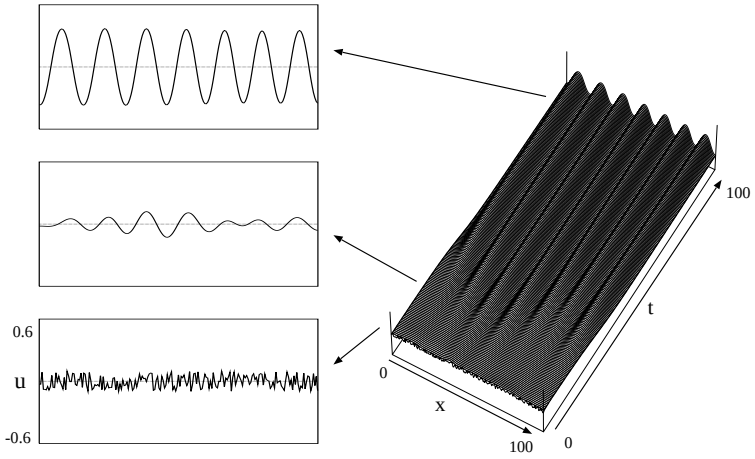


図 8: ランダムな初期値から生成される１次元チューリングパターン

[2] 西浦 廉政, 数学と化学・生物学 ー自己複製と自己崩壊のダイナミクスをめぐってー, 数学 52(4)(2000)404-416.

[3] Y. Nishiura, Far-from-equilibrium Dynamics, AMS, (2002).

[4] 西浦 廉政:「自己複製と自己崩壊のパターンダイナミクス」岩波講座・物理の世界, 岩波書店 (2003).

[5] 上山大信, 西浦廉政:「パターン形成とダイナミクス」-自己触媒系に現れる自己複製パターンと時空カオス-, 非線形・非平衡現象の数理４（三村昌泰監修), 東京大学出版会、2006 年 2 月

[6] 太田隆夫:「非平衡系の物理学」裳華房　(2000)

[7] T. Teramoto and Y.Nishiura *Stable gyroid morphology in a gradient system with nonlocal effects*, J. Phys. Soc. Jpn., 71(7): 1611-1614 (2002)

[8] 寺本 敬、西浦 廉政: 「ミクロ相分離のモルフォロジーとダイナミクス」応用数理, 15(3): 16-27 (2005)

[9] J.E.Pearson, *Complex patterns in a simple system*, Science Vol.216(1993),189-192.

[10] X.Yuan, T.Termaoto, and Y.Nishiura, *Heterogeneity-induced defect bifurcation and pulse dynamics for a three-component reaction-diffusion system*,Physical Review E 75(3)036220 (2007)