HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	熱浸透率の測定法に関する一考察（I）
Author(s)	岡垣, 理
Citation	衛生工学, 1, 24-30
Issue Date	1958-08-01
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/36126
Type	departmental bulletin paper
File Information	1_24-30.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

熱浸透率の測定法に関する
一 考 察 (I)

講 師 岡 垣 理

Some Contributions to Determining a Thermal Constant (I)

Lecturer Osamu Okagaki

Abstract

In this report Krischers idea and a measuring apparatus for determining thermal constants of solids, so called "Thermal penetrativity" (Wärmeeindringzahl), was re-examined.

From this investigation, as will be shown in Fig.5, it was found that the large duration of measurment, which increases with the thermal capacity of the heating source, is necessary to obtain the thermal penetrativity with a desirble accuracy.

はしがき

化生工学上の問題として，土壌，コンクリート，建築材料等の熱的特性値を知る必要が屢々生ずる。

例えば，北海道のような寒冷地における，屎尿消化槽の保温，家屋の保温，給配水に関聯した凍結深度の算定など，伝熱学的智識を要する点が極めて多

い。 伝熱問題を数学的に解こうとする場合、熱常数が与えられねばならない。このうち、時間的温度変化を伴わない定常状態に対しては、物体内温度は単に熱伝導率に左右されるのみであるが、実際には物体の周囲条件、即ち気温、日射、風速等が刻々変化するため、定状状態として取り扱い得ない場合がある。 このような不定常熱伝導に対しては、熱伝導率だけでなく比熱、比重量等が影響することになり、数学的に解析する際、熱常数として温度伝播率、熱浸透率又は比熱等が含まれてくる。 これら諸常数は、何れも上記の熱伝導率、比熱及び比重量を組合せたもので、その工学上の単位は次の如くである。

熱伝導率 : λ 〔 kcal/h·m·°C 〕
比　　熱 : C 〔 kcal/kg·°C 〕（重量基準）
比 重 量 : ρ 〔 kg/m³ 〕
温度伝播率 : $k = \lambda / c \cdot \rho$ 〔 m²/h 〕
熱浸透率 : $\sqrt{\lambda c \rho}$ 〔 kcal/√h·m²·°C 〕
比　　熱 : $c\rho$ 〔 kcal/m³·°C 〕（容量基準）

このうち、λ, C, ρ を単独に測定することは従来広く行われ、その実測値も数多く発表されており、また k 測定法も種々発表されている。他方、熱浸透率 $\sqrt{\lambda c \rho}$ を直接測定する方法は、著者の知る範囲では O. Krischer が発表した方法[1]だけである。

この報告においては、著者が O. Krischer の測定方式について装置の特性及び測定上の諸問題を検討し、測定試料と装置との関係を纏めた結果の一部を述べる。

測定法原理

いま、無限固体内に、無限の拡がりをもつ平面状熱源を考えると、熱流はこの平面熱源と直角をなす1次元流となり、固体内任意点の温度変化は、つぎの微分方程式の解として表わされる。

熱伝導に関する基礎偏微分方程式 :

---

1) O. Krischer, H. Esdorn : Einfaches Kurzzeitverfahren zur Gleichzeitigen Bestimmung der Wärmeleitzahl, der wärmekapazität und der wärmeeindringzahl fester Stoffe. VDI-Forsch. Heft 450, Berlin 1954.

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2},$$

初期条件：

$t = 0,\ \theta = 0.$

境界条件：

$x = 0,\ -\lambda\frac{\partial\theta}{\partial x} = Q,$

$x \to \infty \quad \theta \to 0.$

} ……(1)

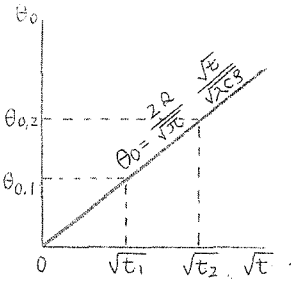
この解は

$$\theta = \frac{2Q}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\lambda c\gamma}} \sqrt{t} \left(e^{-\eta^2} - \eta\sqrt{\pi}\cdot \mathrm{erfc}(\eta) \right) \cdots\cdots(2)$$

ただし，θ = 温度〔℃〕，$2Q$ = 熱源の発生熱量〔Kcal／h·m²〕，t = 時間〔h〕，$\eta = x/\sqrt{2\kappa t}$，$x$ = 熱源からの距離〔m〕，erfc = 余誤差函数，その他の記号はすでに説明した。

式（2）において，$x = 0$ とおいたものは，熱源の温度を表わし，つぎのごとく，θ と $\sqrt{t}$ は直線的関係にある。　オ／図参照。

$$\theta_{x=0} = \theta_0 = \frac{2Q}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\lambda c\gamma}} \sqrt{t} \cdots(3)$$



オ　／　図

従って，熱浸透率 $\sqrt{\lambda c\gamma}$ は上式より

$$\sqrt{\lambda c\gamma} = \frac{2Q}{\sqrt{\pi}} \frac{d\sqrt{t}}{d\theta_0} = \frac{2Q}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}}{\theta_{0,2}-\theta_{0,1}} \cdots(4)$$

となり，熱源の発生熱量 $2Q$ 及び，実測温度変化より $d\sqrt{t}/d\theta_0$　または，$(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1})/(\theta_{0,2}-\theta_{0,1})$ を知れば算定できる。　ただし，$\theta_{0,1}$，$\theta_{0,2}$ はそれぞれ $t = t_1$ 及び $t = t_2$ における熱源温度である。　以上が，Krischerによる熱浸透率 $\sqrt{\lambda c\gamma}$ の測定法原理である。

測定誤差について

上記測定法原理では，熱源を幾何学的平面と考え，その熱容量は無視しており，また供試材が無限に厚いとしている。しかし，実際には，熱源はある容積と重量をもつので，その熱容量を無視することはできず，また供試材を無限に厚くすることもできない。このため，実測して得られる$\sqrt{\lambda c s}$の値には，これらの影響による誤差が加わることになる。

本報告では，測定装置の一特性としての熱源の熱容量が，$\sqrt{\lambda c s}$の測定に如何なる影響を及ぼすかということを考察する。

第2図のごとく，無限固体内に，ある有限の熱容量をもつ平板状熱源がある場合，熱源及び固体内の温度θ_1，θ_2を考える。

これは，基礎式

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} = \kappa_2 \frac{\partial \theta_2^2}{\partial x^2}$$

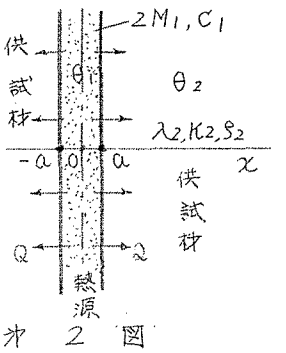
を，初期条件　$t = 0$．　$\theta_1 = \theta_2 = 0$

と，境界条件　$x = a$　$\theta_1 = \theta_2$，

$$-\lambda_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} = Q - M_1 C_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial t}$$

$x \to \infty$，$\theta_2 \to 0$

$\cdots(5)$



第　2　図

のもとで解けばよい。ただし，式中の諸記号はさきに説明した通りであるが，添字1，2はそれぞれ熱源及び供試材を表はし，熱板の厚さを$2a$〔m〕，重量を$2M_1$〔kg/m³〕なお，簡単のため熱源は完全導体（熱伝導率無限大）とする。　例えば，熱板として銅のごとく熱伝導率の大きいものを採べば，これを完全導体と見做すことができる。

上式を解くために，各式にtに関するLaplace変換を施すと，初期条件を考慮して

$$\frac{d^2\bar{\theta}_2}{dx^2} = q_2^2 \bar{\theta}_2, \quad \text{ただし } q_2^2 = \frac{S}{\kappa_2}.$$

$$x = a, \ \bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 \text{ 及び } -\lambda_2 \frac{d\bar{\theta}_2}{dx} = \frac{Q}{S} - M_1 C_1 S \bar{\theta}_1,$$

$$x \to \infty, \ \bar{\theta}_2 \to 0.$$

$\cdots\cdots(6)$

ただし，$\bar{\theta}$はtに関するθのLaplace変換であり，Sはlaplace変換のparameterである。　この常微分方程式より$\bar{\theta}_1$は

$$\bar{\theta}_1 = \frac{Q}{S(\lambda_2 q_2 + M_1 C_1 S)} \qquad \cdots\cdots\cdots(7)$$

さらに逆変換[2]を施して，熱源温度θ_1はつぎのごとく求まる。

$$\theta_1 = \frac{2Q}{\sqrt{\pi}\sqrt{\lambda_2 C_2 \gamma_2}}\sqrt{t} - \frac{Q M_1 C_1}{\lambda_2 C_2 \gamma_2}\left(1 - e^{\frac{\lambda_2 C_2 \gamma_2}{(M_1 C_1)^2}t} \cdot \mathrm{erfc}\left[\frac{\sqrt{\lambda_2 C_2 \gamma_2}}{M_1 C_1}\sqrt{t}\right]\right) \cdots (8)$$

熱源の熱容量 $M_1 C_1$ [kcal/m².°C] の影響は、上式右辺の第２項に現われているが，

$$\lim_{t \to \infty} e^{\frac{\lambda_2 C_2 \gamma_2}{(M_1 C_1)^2}t} \cdot \mathrm{erfc}\left(\frac{\sqrt{\lambda_2 C_2 \gamma_2}}{M_1 C_1}\sqrt{t}\right) = 0$$

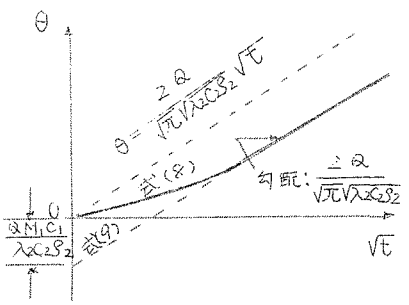
となるので，t の充分大きい範囲に対しては、

$$\theta_1 \cong \frac{2Q}{\sqrt{\pi}\sqrt{\lambda_2 C_2 \gamma_2}}\sqrt{t} - \frac{Q M_1 C_1}{\lambda_2 C_2 \gamma_2} \quad \cdots\cdots\cdots (9)$$

となり，従って

$$\sqrt{\lambda_2 C_2 \gamma_2} = \frac{2Q}{\sqrt{\pi}} \frac{d\sqrt{t}}{d\theta_1} \quad \cdots\cdots\cdots (10)$$

が得られることとなり，前掲の式（４）と全く一致する。 結局，熱源の熱容量を無視し得ないとき，その影響を少なくするためには、測定時間 t を大きく選ばねばならない。 第３図はこの場合の温度変化の模様を表わしたもので，実線は式（８），これに接する破線（漸近線）は式(9)，上位の破線は式 (3) の温度変化を示している。この２組の破線は互に平行であり，その距離は $Q M_1 C_1 / \lambda_2 C_2 \gamma_2$ である。 このように充分の時間が経過した後では，温度変化の割合 $d\theta/d\sqrt{t}$ は一定（$2Q/\sqrt{\pi}\sqrt{\lambda_2 C_2 \gamma_2}$）となるので，式 (10) より $\sqrt{\lambda_2 C_2 \gamma_2}$ の算定は可能となる。



第３図

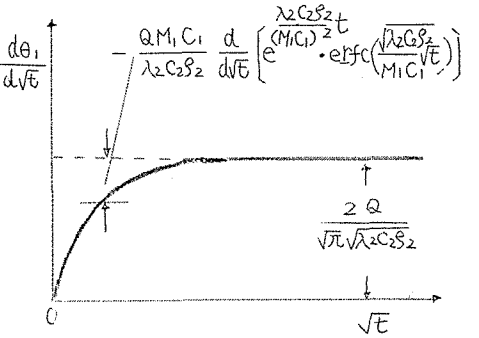
さて、熱源の熱容量 $M_1 C_1$ を無視し得ないために生ずる測定誤差は，式(4)を，

$$\sqrt{\lambda C \gamma} = \frac{2Q}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\left(\frac{d\theta}{d\sqrt{t}}\right)}$$

---

2) H.S. Carslaw, J.C. Taeger : Conduction of Heat in Solids. Oxf. Univ. Press, 1948, P380. または近藤次郎：演算子法．培風館，昭-31，附録 A－４．

のように変形し，$d\theta/d\sqrt{t}$ をそれぞれの場合について比較することにより評価できる。第4図は，$d\theta/d\sqrt{t}$ と $\sqrt{t}$ の関係を示したもので，実線は有限の熱容量をもつ熱源の温度式（8）より求めた $d\theta/d\sqrt{t}$ を表はし，破線は $t\to\infty$ としたときの温度式（9）より導いたものである。そして，後者は一定値 $2Q/\sqrt{\pi\lambda_2C_2\gamma_2}$ を示し，熱源の熱容量を無視した $M_1C_1=0$ の場合の値と等しい。従って，測定時間を充分とらないために生ずる誤差は，図の実線と破線との間の距離，すなわち，



$$-\frac{QM_1C_1}{\lambda_2C_2\gamma_2}\frac{d}{d\sqrt{t}}\left\{e^{\frac{\lambda_2C_2\gamma}{(M_1C_1)^2}t}\,erfc\left(\frac{\sqrt{\lambda_2C_2\gamma_2}}{M_1C_1}\sqrt{t}\right)\right\}$$

第4図

に起因するもので，次式により評価することができる。

$$\varepsilon=1-\frac{\frac{d\theta_1}{d\sqrt{t}}}{\lim_{t\to\infty}\frac{d\theta_1}{d\sqrt{t}}}$$

$$=1-\frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\lambda_2C_2\gamma_2}}{M_1C_1}\sqrt{t}\cdot e^{\frac{\lambda_2C_2\gamma_2}{(M_1C_1)^2}t}\,erf\left(\frac{\sqrt{\lambda_2C_2\gamma_2}}{M_1C_1}\sqrt{t}\right)$$

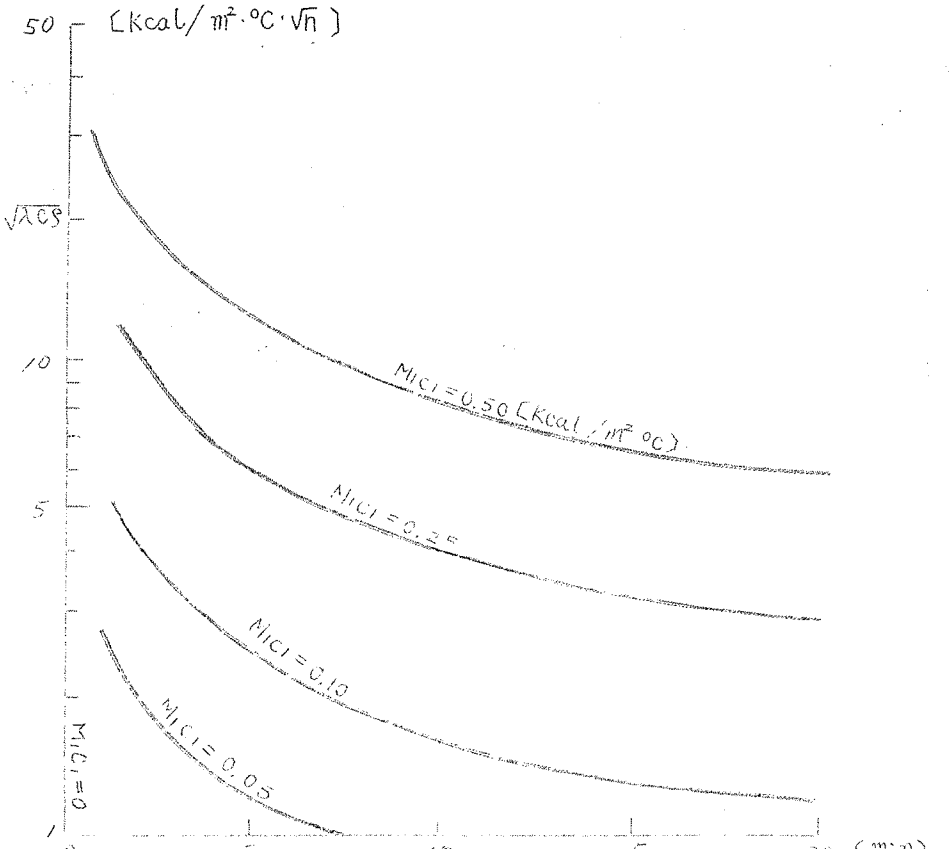
或いは，漸近展開[3]により

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{M_1C_1}{\sqrt{\lambda_2C_2\gamma_2}}\right)^2\frac{1}{t}-\frac{3}{4}\left(\frac{M_1C_1}{\sqrt{\lambda_2C_2\gamma_2}}\right)^4\frac{1}{t^2}+\frac{15}{8}\left(\frac{M_1C_1}{\sqrt{\lambda_2C_2\gamma_2}}\right)^6\frac{1}{t^3}\cdots\cdots\cdots(11)$$

ここで，上式の $\lim_{t\to\infty}\frac{d\theta_1}{d\sqrt{t}}$ は，式（9）または（3）に基く $d\theta/d\sqrt{t}$ と同等である。

例えば，この誤差を1％以内に止めるためには，$\varepsilon\leqq0.01$ を満足するような時間 t の範囲で測定を行えばよいことになる。第5図は $\varepsilon=0.01$ の場合の計算結果を示したもので，熱源の熱容量 M_1C_1〔Kcal/m²·°C〕を Parameter とし，熱浸透率 $\sqrt{\lambda C\gamma}$ と，誤差 ε を1％に止めるに必要な最小時間 t との関係を表はしている。例えば，$\sqrt{\lambda C\gamma}=2$〔Kcal m·°c·$\sqrt{h}$〕の供試材を熱容量 $M_1C_1=0.05$ 及び 0.10〔Kcal/m²·°C〕のごとき熱源を用いて測定するとき，誤差を1％以内に止めるためには，前者では $t\geqq2$〔min〕後者では $t\geqq7$〔min〕の範囲で測定しなければならないことになる。勿論，$M_1C_1\to0$ という熱容量のない理想化した熱源に対してはすべての $\sqrt{\lambda C\gamma}$ に対し $t\geqq0$ となり，図では $\sqrt{\lambda C\gamma}$ の座標軸（次頁に続く）

3）前掲脚註　2）のAppendix Ⅱ，P371



第 5 図

（縦座標軸）がこれを表わしている。同図より明らかなように，熱源の熱容量M_iC_iが少い程，また供試材の熱浸透率$\sqrt{\lambda C\rho}$の大きいもの程，短時間で測定できる。

むすび

上述の如く，Krischerによる熱浸透率の測定法においては，測定装置の一特性である熱源の熱容量の大小と，供試材の熱浸透率の大小が，測定誤差に関係することを明らかにした。そしてこの誤差を所要限度に止めるために必要な測定時間を求めた。

その他，供試材の厚さが有限であるため，熱浸透率測定上誤差を生ずることになるが，これについては次報で発表の予定である。