HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	熱浸透率測定法に関する一考察（II）
Author(s)	岡垣, 理
Citation	衛生工学, 2, 76-86
Issue Date	1959-03
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/36132
Type	departmental bulletin paper
File Information	2_76-86.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

熱浸透率測定法に関する一考察 （Ⅱ）

講師　岡垣　理
（昭和３４年１月３１日受理）

Some Contributions to Determining a Thermal Constant (II)

Lecturer　Osamu Okagaki

Abstract

A method of measuring the thermal penetrativity (coefficient of heat penetration, Wärmeeindringzahl) of solids in direct manner was proposed by O. Krischer[1] in 1954. According to his principle, the thermal penetrativity is measured by means of reading the temperature rise of the heat source which can be supposed to be a geometric plane source generating a constant heat and which is inserted in a very large test specimen regarded as an infinite body.

In practice, however, considerable errors are included in measured values owing to the influences of the thermal capacity of the heat source and the size of the test specimen, unless the test duration is properly selected. As one of these possible errors, the influence of the thermal capacity of the heat source was discussed in the previous paper[2].

In this paper, the size effect of the test specimen upon the measured values is discussed theoretically. In measuring the thermal penetrativity by this method, a considerable amount of error caused by the end effect of the specimen is usually accompanied in materials of large penetrativity when the specimen has a small thickness and the duration of test is too long. This error can be evaluated by the equation (17') which is derived from the basic equation of heat conduction in a finite solid under severe

boundary conditions. For instance, when the desirable relation between the thickness of test specimen and the test duration is intended to find keeping the error within 1%, it can easily be obtained from the the curves shown in Fig.1 regardless of thermal properties of test specimens.

Accordingly, the both effects of thermal capacity and size upon the measurement can be estimated by combining these two relations. The allowable thickness of the test specimen and test duration for a given heat source is obtained diagramatically from the relations shown in Fig.3, which is obtained by superposing the both effects.

I はしがき

熱浸透率 (Thermal penetrativity, Wärmeeindringzahl) を直接測定する極めて巧妙な方法が、最近、O.Krischer[1] によつて発表されたが、筆者はこの測定方式について、装置の特性及び測定上の諸問題を検討し、その一部を前報[2]に発表した。本報告では、供試材料の寸法が熱浸透率の測定値に対してどのような影響を及ぼすかを述べる。

Krischerの提唱した測定法の原理は、無限固体（供試材料）内に無限の拡がりをもつ平面状熱源を考え、その熱源の温度変化より熱浸透率を求める方法である。即ち、初期温度が一様に0の無限固体を平面状熱源によつて加熱する場合、加熱を始めてから後の熱源温度 θ_0 (°C) は

$$\theta_0 = \frac{2Q}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\lambda c \rho}} \sqrt{t} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

となり、熱浸透率 $\sqrt{\lambda c \rho}$ (kcal/m^2·°C·$\sqrt{h}$) は、この式から直ちに

$$\sqrt{\lambda c\rho} = \frac{2Q}{\sqrt{\pi}} \frac{d\sqrt{t}}{d\theta_0} \quad \cdots\cdots (2)$$

$$= \frac{2Q}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}}{\theta_{0.2}-\theta_{0.1}} \quad \cdots\cdots (2)'$$

のように表わせるので、熱源の発生熱量 $2Q$ [kcal/m²·h] と、熱源の温度変 θ_0 を測定するだけで $\sqrt{\lambda c\rho}$ は求めることができる。

ここで、λ = 熱伝導率 [kcal/h.m.℃]、C = 比熱 [kcal/kg·℃]、ρ = 比重量 [kg/m³] 、t = 加熱開始後の経過時間 [h] 、$\theta_{0.1}, \theta_{0.2}$ = それぞれ t_1, t_2 における熱源の温度 [℃]。

さて、上式は供試材が無限に大きい場合には正しいが、実際には供試材の厚さは有限であるため、温度変化は式(1)のようには表せず、従つて式(2)又は(2')から算定される $\sqrt{\lambda c\rho}$ 値は誤差を伴うことになる。しかし、この誤差は、ある与えられた厚さの供試材に対しては、適当な時間内で測定すれば所定の範囲内に留めることができるし、またある測定時間に対しては、供試材厚さを適当に撰べば所要の誤差範囲内で測定することもできる。即ち、有限厚さの供試材も、測定時間を適当に撰ぶことによつて、無限に厚いと見做すことができるわけである。以下、供試材の厚さと測定時間との関係を求め、供試材の厚さが有限である場合に対する当測定法の誤差評価を行う。

II 供試材寸法の影響

いま、厚さ ℓ [m] という2枚の平行平面試料の間に熱源（加熱板）をはさみ、供試材の外側の面が大気に曝されているとする。実際測定を行う際は、供試材を予め室温（又は装置の雰囲気の温度）と同一温度にした状態から測定を始める、即ち、初期温度を室温（又は雰囲気温度）とするのであるが、装置の雰囲気に接する試料面からは熱伝達によつて周囲え放熱が行われる。この場合、周囲の空気の流動状態によつて供試材からの放熱量は異り、流動速度の大きい程、境界面の熱抵抗は少くなり、放熱量は増加する。

そこで、供試材の厚さが有限であることが熱源の温度上昇にどのような影響を及ぼし、そして $\sqrt{\lambda c\rho}$ の測定値にどのような誤差を生ずるかは、実際よりも酷しい境界条件を採つて検討すれば安全である。即ち、供試材と雰囲

気との接触面における境界条件として、接触面の熱抵抗0という極限の状態、言い換えると、試料面が常に雰囲気の温度（供試材の初期温度）に保たれているものとすればよい。

尚、極限の境界条件として、熱抵抗∞、即ち、接触面が断熱されているという状態も考えられるが、ここでは前者の条件のもとで検討を加えた。

また、熱源からの温度波が試料端 $x=\ell$ に到達する時間（試料端の影響が熱源の温度変化に現れる時間）は、熱源の熱容量が小さい程速く、大きい程遅れる。従つて、熱源の条件としては熱容量を無視して、幾何学的な平面状熱源と仮定する方が安全であり、計算も楽である。

さて、上記の如き境界条件及び熱源条件を考慮して次の微分方程式を解く。

熱伝導に関する基礎微分方程式は

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=k\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2},\quad 0<x<\ell \qquad \cdots\cdots (3)$$

ただし、この伝熱系は熱源に関して対称であることから、$0<x<\ell$ の領域について解けばよい。

初期条件は

$$\theta=0,\quad t=0 \qquad \cdots\cdots (4)$$

境界条件は

$$-\lambda\frac{\partial\theta}{\partial x}=Q,\quad x=0 \qquad \cdots\cdots (5)$$

$$\theta=0,\quad x=\ell \qquad \cdots\cdots (6)$$

ここで、θ ＝供試材の温度〔℃〕，x＝供試材の厚さ方向に測つた熱源からの距離〔m〕，t＝加熱開始後の経過時間〔h〕，π ＝供試材の温度伝播率〔m^2/h〕2 Q＝熱源からの発生熱量〔$kcal/h\cdot m^2$〕，λ ＝供試材の熱伝導率〔$kcal/h\cdot m\cdot ℃$〕.

上の諸式にtに関するLaplace変換を施せば、初期条件を考慮して、像空間において次の式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2\bar{\theta}}{dx^2}=q^2\bar{\theta},\qquad 0<x<\ell,\ \left(q^2=\frac{s}{k}\right)\\&-\lambda\frac{d\bar{\theta}}{dx}=\frac{Q}{s},\quad x=0\\&\bar{\theta}=0,\quad x=\ell\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots (7)$$

この常微分方程式の解は、

$$\bar{\theta}=\frac{Q\sinh q(\ell-x)}{\lambda q s\cosh q\ell} \quad \cdots\cdots\cdots (8)$$

ここで、$\bar{\theta}$ は供試材温度 θ の Laplace 変換、s は変換の parameter である。

特に、上式で x = 0 と置いたものは、供試材と熱源との接触面の温度に対する Laplace 変換を表わすことになる。勿論、この接触面に熱抵抗が介在すれば、試料面と熱源との間に温度差を生ずるわけであるが、この熱抵抗は熱源（加熱板）や供試材を注意して作製、成型すれば充分小さくできると考えられるので、ここでは、簡単のため、一応熱抵抗を無視し、熱源と供試材は完全接触していると仮定した。このようにして、熱源温度 θ_0 に対する Laplace 変換は

$$\bar{\theta}_0=\bar{\theta}_{x=0}=\frac{Q\sinh q\ell}{\lambda q s\cosh q\ell} \quad \cdots\cdots\cdots (9)$$

θ_0 の解は上式(9)に反転積分を施し原空間に戻すことによって求まるが、時間 t の大きい場合、及び小さい場合に対し、それぞれ収斂速度の速い級数型式で解を求めることができる。

(I) t の大きい場合に適する θ_0 の解：

上記 $\bar{\theta}_0$ の式は、その分母、分子において、$\sqrt{s}$ の同じ分岐を用いる限り、s = 0 の近傍でつぎのように Laurent 展開できる。

$$\bar{\theta}_0=\frac{\ell}{\lambda}Q\frac{1}{s}+\sum_{n=0}^{\infty}D_n s^n \quad \cdots\cdots\cdots (10)$$

ただし、右辺第 2 項は s に関する Taylor 展開を表わす。

この式に逆変換を施すと

$$\theta_0=\frac{\ell}{\lambda}Q+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{st}\sum_{n=0}^{\infty}D_n s^n\,ds \quad \cdots\cdots\cdots (11)$$

となり、右辺第 1 項は熱源の定常温度、第 2 項は過渡温度を表わしており、尚この複素反転積分の積分路は、$\sum_n D_n s^n$ が半平面 $\mathbb{R}(s)\geqq\gamma$ 内で解析的であるように撰らぶ。そして、この積分は、式(9)の単極、$s=-\frac{\pi}{\ell^2}\alpha_n^2$, に対する留数を計算することによつて求められる。ここに α_n は

$$\alpha_n=\frac{(2n+1)}{2}\pi\ ,\quad n=0,1,2,\ \cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

かくして、留数計算の結果、熱源温度 θ_0 は

$$\theta_0=\frac{\ell}{\lambda}Q\left\{1-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^2}e^{-\frac{h\alpha\mu_n^2}{\ell^2}t}\right\} \quad \cdots\cdots (13)$$

(II)　tの小さい場合に適する θ_0 の解：

測定時間の短い範囲に適する温度解は、$\overline{\theta}_0$ の式を次のように変型し、逆変換表を利用して容易に求めることができる。

$$\overline{\theta}_0=\frac{Q\sinh q\ell}{\lambda qs\cosh q\ell}$$

$$=\frac{Q}{\sqrt{\lambda c\rho}}\frac{1}{\sqrt{s^3}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left\{e^{-\frac{2n\ell}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{s}}-e^{-\frac{2\ell(n+1)}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{s}}\right. \quad \cdots\cdots (14)$$

逆変換表[3]より

$$s^{-\frac{3}{2}}\cdot e^{-k\sqrt{s}} \subset 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}e^{-\frac{k^2}{4t}}-k\cdot\mathrm{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}}\right) \quad \cdots\cdots (15)$$

ただし、上式左辺は像空間、右辺は原空間に対応する。

式(15)の関係を使って、式(14)を原空間に逆変換すると、

$$\theta_0=\frac{Q}{\sqrt{\lambda c\rho}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left\{2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\left(e^{-\frac{4n^2\ell^2}{4\alpha t}}-e^{-\frac{(2\ell(n+1))^2}{4\alpha t}}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{2\ell}{\sqrt{\alpha}}\left(n\cdot\mathrm{erfc}\left(\frac{2n\ell}{2\sqrt{\alpha}}\frac{1}{\sqrt{t}}\right)-(n+1)\cdot\mathrm{erfc}\left(\frac{2\ell(n+1)}{2\sqrt{t}}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)\right)\right\} \quad \cdots\cdots (16)$$

このようにして、θ_0 に関する解が2通り求まるわけであるが、測定開始後、極く短時間内では、式(16)の級数解が収斂速く計算に便利であり、また、ある程度時間が経つと式(13)の収斂性が良くなる。しかし、$\ell>1$ [cm] 程度の各種材料を対象として、次に述べるような誤差評価を行う場合は、実際に数値計算してみれば分るが、式(13)の方が収斂速く計算に有利である。

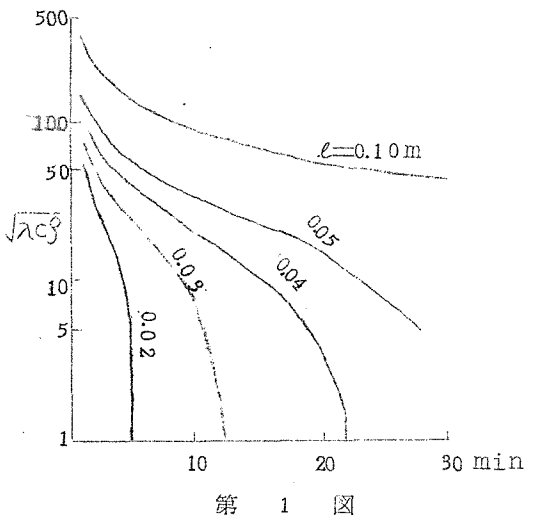
さて、供試材の厚さが有限であるときの熱源の温度変化に基いて、式(2)又は(2')より熱浸透率 $\sqrt{\lambda c\rho}$ を算定する場合どのような誤差を生ずるかということは、次のようにして評価できる。即ち、供試材が無限の厚さをもつときは、式(2)より $\sqrt{\lambda c\rho}$ は $\frac{d\sqrt{t}}{d\theta}$ に比例していることが分かるので、有限厚さの供試材に対する温度式(13)を式(2)に代入して $\sqrt{\lambda c\rho}$ を算出する場合、生ずる誤差は

$$\varepsilon=\frac{\frac{2Q}{\sqrt{\pi}\sqrt{\lambda c\rho}}}{\frac{4Q}{c\rho\ell}\sqrt{t}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\frac{\kappa\alpha n^2}{\ell^2}t}}-1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$

$$=\left(\frac{2\sqrt{\pi}\sqrt{\lambda c\rho}}{c\rho\ell}\cdot\sqrt{t}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\frac{\lambda}{\ell}\frac{\alpha n^2}{c\rho\ell}t}\right)^{-1}-1 \qquad \cdots\cdots\cdots (17')$$

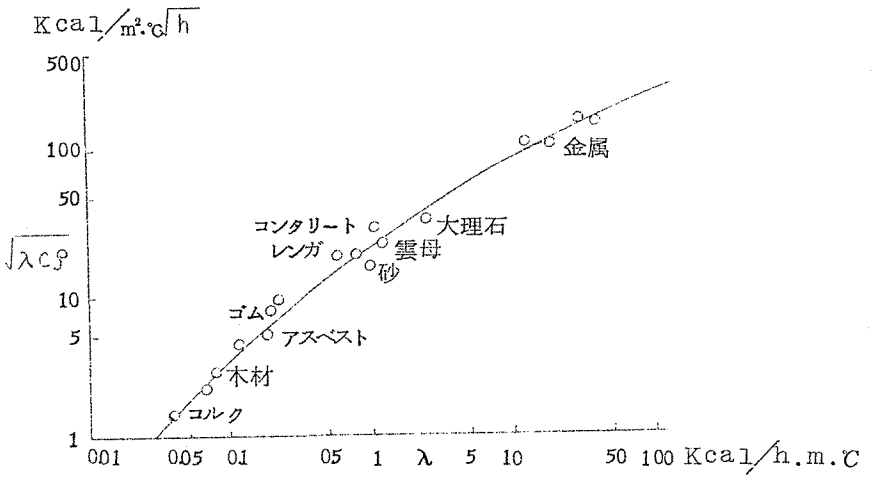
で表わすことができる。ここで、上式(17)の分母、分子はそれぞれ式(13)及び(1)から求めた $\frac{d\theta}{d\sqrt{t}}$ である。

このようにして得られる誤差 ε を 1 〔%〕以内に留めるために、各種材料につき、その厚さと測定時間との関係を求めた結果が第1図に示してある。図の縦軸は熱浸透率 $\sqrt{\lambda c\rho}$ 〔kcal/m²·°C$\sqrt{h}$〕, 横軸は時間 t 〔min〕であり、曲線群は parameter を ℓ として、この ℓ に 2, 3, 4, 5, 10 〔cm〕を与えたときの $\sqrt{\lambda c\rho}$, t — 関係を表わしている。例えば、$\sqrt{\lambda c\rho}=5$〔kcal/m²·°C$\sqrt{h}$〕（アスベスト）という材料に対して、$\ell=2, 4$〔cm〕とすれば、$\varepsilon<1$〔%〕に留めるためには、それぞれ 5 及び 19 〔min〕以内に測定を終え、その間の熱源の温度上昇を用いて式(2)又は(2')から $\sqrt{\lambda c\rho}$ を算定すればよいことになる。また逆に、測定時間を、例えば、t = 15 〔min〕とすれば、$\varepsilon<1$〔%〕であるための所要 ℓ 一値は約 3.4 〔cm〕を必要とすることになる。



第 1 図

尚、第1図の曲線を求める際、$\sqrt{\lambda c\rho}$ とλの関係が分つていなければ式(17)を計算することはできない。しかし、従来、各種材料に対して熱伝導率λ、比熱 c、比重量 ρ が別個に測定されているので、これら測定値[4]より $\sqrt{\lambda c\rho}$ を算出し、$\sqrt{\lambda c\rho}$, λ — 関係を求めると第2図のようになり、可なり良い相関を示している。第1図はこの関係（第2図において、1つの曲線で表わした）を使つて計算したものである。



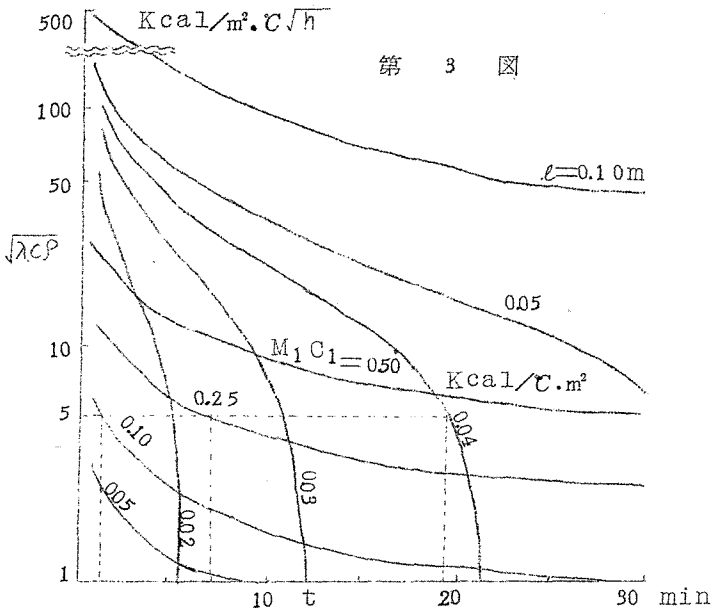
第　2　図

Ⅲ　むすび

上述のように、当測定方式に基いて $\sqrt{\lambda c \rho}$ を求める際には、材料の種類及び厚さによつて測定時間は制限を受けることになり、測定時間を余り長く採ると試料端の影響が大きくなり、測定値に可なりの誤差を生ずる。この誤差 ε は式(17)によつて評価でき、例えば、ε を 1 〔%〕以内に留めるために必要な測定時間の範囲は第 1 図で求めることができる。

ところで、ここに述べた時間的制限というのは測定時間の上限を与えるものであり、他方、その下限は熱源の熱容量の影響に基いて定められ、すでに前報[2]に発表した通りである。従つて、供試材の厚さ及び熱源の熱容量の影響を評価するためには、この両者を併せ考えねばならない。

この目的のため、第 3 図のように、前報所掲の第 5 図を前掲第 1 図に重ね合せると、綜合的な所要の測定時間範囲が求まる。この図では、熱源の熱容量 $M_1 C_1$〔kcal/m²·°C〕のため制限を受ける測定時間の下限が、$M_1 c_1$ を parameter として、$M_1 c_1 = 0.05, 0.10, 0.25, 0.50$〔kcal/m²·°C〕なる場合に対して求められている。例えば、先に例示した $\sqrt{\lambda c \rho} = 5$〔kcal/m²·°C·√h〕, $\ell = 4$〔cm〕という供試材に対して、熱源の熱容量が $M_1 c_1 = 0.10$〔kcal/m²·°C〕であれば、測定時間範囲を $1 \leq t \leq 19$〔min〕、また $M_1 c_1 = 0.25$ であれば $7 \leq t \leq 19$ と採る場合、誤差を 1 〔%〕以内に



第　3　図

押えることができる。即ち、このような時間範囲における熱源の温度変化を式(2)又は(2)'に適用すれば、$\sqrt{\lambda c\rho}$ は 1 〔%〕以下の誤差範囲で算定されることになる。第3図に、上記の時間範囲を破線で示した。しかし、$M_1C_1 > 0.4$ 〔Kcal/m².°C〕の熱源であると、その熱容量の影響が大きくなり、測定時間の下限が上限を越えてしまうので、このような場合は供試材の厚さを増さなければならないことになる。

結局、測定時間を必要なだけ充分取るためには、熱容量の成るべく小さい熱源を用い、供試材を厚くすればよい。他方、供試材の材質も関係し、$\sqrt{\lambda c\rho}$ の大きいもの程 M_1C_1 の影響は尠く、M_1C_1 の大きい熱源を用いても測定時間の下限はそれ程変化しない。従つて、$\sqrt{\lambda c\rho}$ の大きい材料を測定する場合は、その厚さだけを考慮すれば充分であるが、$\sqrt{\lambda c\rho}$ の小さい材料の場合は、厚さとともに熱源の熱容量を考慮しなければならないことになる。

実際問題として、上述の方法で、供試材の厚さをどの程度にし、どれ位の熱容量の熱源を撰ぶかを決めるためには、供試材の $\sqrt{\lambda c\rho}$ 値を予め推定しておかなければならないが、前掲第2図の関係を利用すれば大ざつぱな値は推定できる。即ち、各種材料の熱伝導率λに対する測定値は数多く発表されていると同時に、材料の比重量又は材質及びその構成状態等を知ればλ値は比較的楽に推定される。[5) 6) 7) 8)]

従って、このように推定又は測定したλ値より$\sqrt{\lambda c\rho}$の大体の値は見当づけることができる。

以上の如く、第1，2報に亘り、O.Krischer の提唱した熱浸透率$\sqrt{\lambda c\rho}$の測定法について、測定上問題となる1，2の点を検討した。即ち、供試材の厚さ、熱源の熱的特性（熱容量）及び測定時間が$\sqrt{\lambda c\rho}$の測定誤差に及ぼす影響を求め、その結果を第3図に示した。同図より明らかなように一般的に言えば、供試材を充分厚くとり熱容量の小さい熱源を用いれば、誤差は少く測定は楽になる。これは当測定法式の原理から言つて当然である。技術的に見て、供試材を厚くすることは比較的容易であろうが、これに比べると熱容量の小さい熱源（熱板）を作ることは難しい。特に、$\sqrt{\lambda c\rho}$の小さい材料（例えばコルク板等）に対しては熱容量の極めて小さい熱板が要求され、金属箔熱板のような薄いものを用いなければならないことになろうが、その製作上また機械的強度の点で問題があるように思われる。

当方式により測定装置を作製し、測定を行うため、差当り必要と思われる1，2の点を検討したのであるが、まだいくつかの問題も残されており、これらについては今後更に検討を重ねて行くつもりである。

尚、本研究に対し、種々御便宜並に御助言を頂いた本学部教授斎藤武先生（機械工学科・熱機関研究室）に衷心より感謝致します。

文　　献

1) O.Krischer, H.Esdorn: Einfaches Kurzzeitverfahren zur Gleichzeitigen Bestimmung der Warmeleitzahl, der Wärmekapazität und der Warmeeindringzahl fester Stoffe. VDI-Forsch. Heft 450, Berlin 1954.

2) 岡垣　理：熱浸透率の測定法に関する一考察（I）．衛生工学（創刊号）．昭 33-8.

3) 例えば、近藤次郎：演算子法．附録A－4，培風館、昭 -31.

4) 例えば、機械工学便覧（昭-26年版）．11-48,49.

5) A. Eucken: Allgemeine Gesetzmäßigkeiten für das Wärmeleitvrmögen verschiedener Stoffarten und Aggregatzustände- VDI- Forsch., Bd.11, Nr. 1. 1940, S. 18.

6) O.Krischer, H. Esdorn: Die Wärmeübertragung in feuchten, porigen Stoffen verschiedener Struktur. VDI-Forsch., Bd. 22, Nr. 1956.

7) 大賀恵二，岡垣理： 含水多孔物質の熱伝導率．北大工学部彙報 第6号，昭-27

8) 岡垣理，斎藤武： 湿った砂の熱伝導率（不定常熱流法による測定）．北大工学部研究報告，第16号，昭- 32.