



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	集水埋渠の水理（埋設深度に比して管径の無視出来ぬ場合について）
Author(s)	丹保, 憲仁
Citation	衛生工学, 3, 32-43
Issue Date	1959-10
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/36140
Type	departmental bulletin paper
File Information	3_32-43.pdf



集 水 埋 渠 の 水 理

(埋設深度に比して管径の無視出来ぬ場合について)

丹 保 憲 仁 *

(昭和34年9月15日受理)

A Formula for Water Collecting Gallery

Norihito Tambo

In order to calculate the rate of discharge from a shallow, relatively large diameter water collecting gallery, following a new formula was given by the author.

$$Q = \frac{2\pi K}{\mu} \cdot \frac{j g (H + \sqrt{D^2 - R^2})}{\log \left[\frac{D}{R} + \sqrt{\left(\frac{D}{R}\right)^2 - 1} \right]}$$

Q; rate of discharge

K; coefficient of permeability of soil

j; density of water

μ ; viscosity of water

g; acceleration due to gravity

H; depth of water above bottom

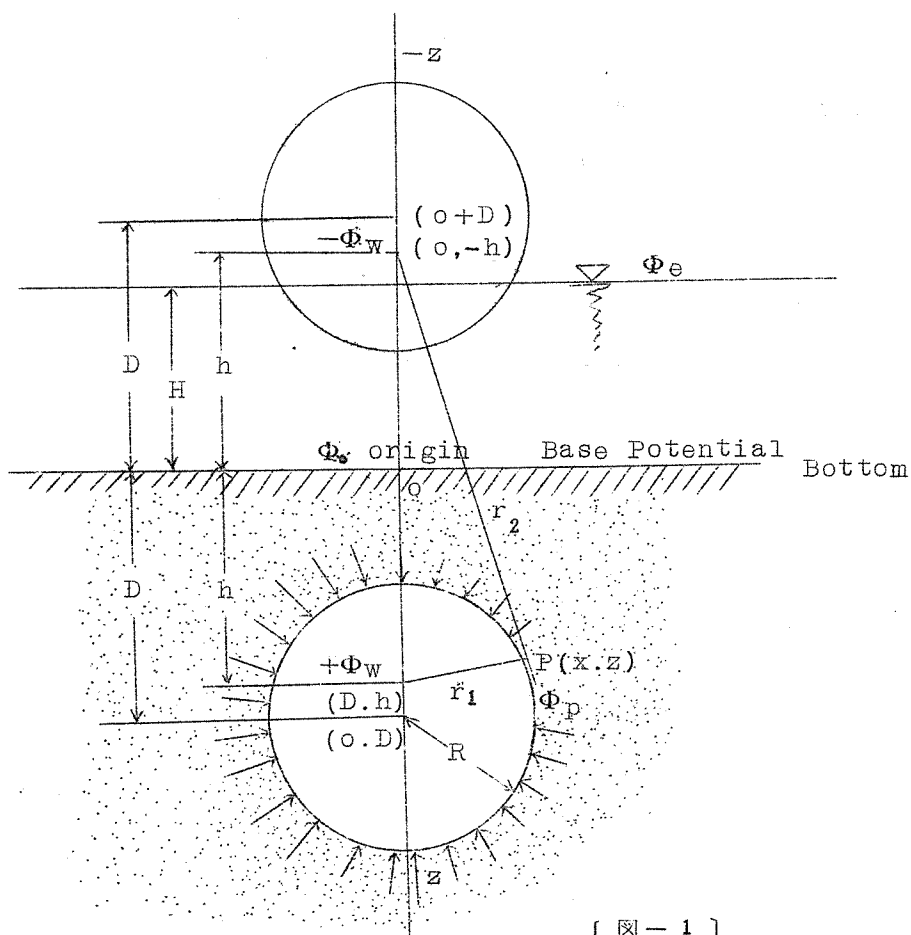
D; depth of gallery center under bottom

無限に広い水域の底から水平な集水暗渠によつて水を採る場合を考える。

* 才 1 講座助教授

この時滲透性砂礫層の深さは充分大きいものと仮定する。

この問題については、Method of Image, Conformal Mapping, 等を用いて Image となる Sink 又は Source を考える事によつて解かれて居る。しかしいずれも集水埋渠の径を水底からの深さに比して大であるとの仮定の下に point Sink として考え、せいぜい、その point Sink の周りの Eguipotential Line を埋渠の径と考える近似に止まつている。しかし、次に述べる様にこの Eguipotential Line は point Sink に対して Concentric ではないので、大きな径の浅い埋設深度を有する渠の場合には誤差が大きくなる。



[図 - 1]

R : 埋渠の径

D : 埋渠の中心までの底よりの深さ

h : point Sink(Source)を仮定した時の底よりの深さ

H : 水 深

今考える地下水の流れは速度 potential Φ を有する二次元の potential 運動とみる事が出来る。

この運動を直角座標系で表わすと二次元の Laplace の式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} &= 0 \\ V_x &= -\frac{K}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad V_z = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{aligned} \right\}$$

ここで、K : 透水係数

μ : 水の粘性係数

V : 地下水の流速

Φ : 速度 Potential

円筒座標系を用いて表わすならば

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} &= 0 \\ V_r &= -\frac{K}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ V_\theta &= -\frac{K}{\mu r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \end{aligned} \right\}$$

この様な問題を解くために、問題を Point Sink の問題に引き直し、The Method of Image を用いる事とする。

先ず無限の Line Source より深さ h の所にある Point Sink への Potential Flow を考える。

Line Source を x 軸にとつて、(0, h) と x 軸に対して対称の位置 (0, h') に、各々強さの等しい Point Sink 及び Source があると考え、この二つを重ね合わせる事によつて Flow Pattern を求めうる。

Potential (以下略す) Radial Flow の場合を考えると、Sink 又は

Source よりの距離 r の点に於ける Potential の一般式は

$$\Phi = C_1 \log r + C_2$$

なる形に表わす事をうる。

P 点の Absolute Potential Φ_p は原点と P 点との Potential の差として表わす事が出来る。

今 $(0, -h)$ の点の Potential を $-\Phi_w$, $(0, h)$ の点の Potential を Φ_w , とすると、

— Φ_w による 0 点での Potential は

$$|\Phi_0| = C_1 \log |h| + C_2$$

— Φ_w による P 点での Potential は

$$|\Phi_p(-\phi_w)| = C_1 \log |r_2| + C_2$$

+ Φ_w による 0 点での Potential は

$$|\Phi_0| = C_1 \log |h| + C_2$$

+ Φ_w による P 点での Potential は

$$|\Phi_p(\phi_w)| = C_1 \log |r_1| + C_2$$

今原点を基準 (Potential が 0 の状態) として上記の各々を基準に対しての Absolute Potential に引き直して考えると、

— Φ_w による P 点での Potential は

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \Phi_0 - \Phi_p(-\phi_w) \\ &= C_1 \log |h| + C_2 - C_1 \log |r_2| - C_2 \\ &= C_1 \log \left| \frac{h}{r_2} \right|\end{aligned}$$

+ Φ_w による P 点での Potential は

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \Phi_0 - \Phi_p(\phi_w) \\ &= C_1 \log |h| + C_2 - C_1 \log |r_1| - C_2 \\ &= C_1 \log \left| \frac{h}{r_1} \right|\end{aligned}$$

P 点に於ける二つの Source よりの Potential を重さね合わせた合成 Potential Φ_p を求めると

$$\begin{aligned}\Phi_p &= \Phi_1 - \Phi_2 \\ &= C_1 [\log r_1 - \log r_2]\end{aligned}$$

$$= C_1 \log \frac{r_1}{r_2}$$

ここで Source は正、Sink は負の符号を採るものとした。

ここで Φ_p のある値を仮定すれば Eguipotential Line を描く事が出来る。

前式を書き直すと

$$r_1/r_2 = e^{(C_1 \cdot \Phi_p)} = \text{Const} = 1/K$$

この様な式の表わす軌跡は円であるからこの Egui potential Line は円となる。しかし次に述べる様に同心円ではないので直ちに求める問題と対応させる事は出来ない。

今原点を O に置く直角座標系を考える。

$$r_2^2 = (h + z)^2 + x^2$$

$$r_1^2 = (h - z)^2 + x^2$$

然るに前述の関係より

$$r_2^2 = K^2 r_1^2$$

$$\therefore (h + z)^2 + x^2 = K^2 (h - z)^2 + x^2$$

書き換えを行うと、次の様に表わされる。

$$\left[z - h \frac{K^2 + 1}{K^2 - 1} \right]^2 + x^2 = \left[h \sqrt{\left(\frac{K^2 + 1}{K^2 - 1} \right) - 1} \right]^2$$

これは中心を

$$\left[d = h \frac{K^2 + 1}{K^2 - 1}, 0 \right] \text{ に有し}$$

半径

$$r = h \sqrt{\left(\frac{K^2 + 1}{K^2 - 1} \right)^2 - 1}$$

を有する円である。

この二つの式から h を d 又は r の項によつて容易にうる事が可能である。

$$r^2 = h^2 \left[\left(\frac{K^2 + 1}{K^2 - 1} \right) - 1 \right] = h^2 \left[\left(\frac{d}{h} \right)^2 - 1 \right]$$

$$= d^2 - h^2$$

$$\therefore h = \sqrt{d^2 - h^2}$$

$$\text{又 } \frac{d}{r} = \frac{h \cdot \frac{K+1}{K^2-1}}{h \sqrt{\left(\frac{K^2+1}{K^2-1}\right)^2 - 1}} = \frac{K^2+1}{\sqrt{(K^2+1)^2 - (K^2-1)^2}} = \frac{K^2+1}{2K}$$

そこで

$$\sqrt{\left(\frac{d}{r}\right)^2 - 1} = \sqrt{\left(\frac{K^2+1}{2K}\right)^2 - 1} = \frac{K^2-1}{2K}$$

$$\therefore \frac{d}{r} + \sqrt{\left(\frac{d}{r}\right)^2 - 1} = \frac{K^2+1}{2K} + \frac{K^2-1}{2K} = K = \frac{r_2}{r_1}$$

そこで任意点の Absolute Potential は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \Phi_p &= C_1 \log \frac{r_1}{r_2} \\ &= C_1 \log \left[\frac{d}{r} + \sqrt{\left(\frac{d}{r}\right)^2 - 1} \right]^{-1} \end{aligned}$$

今 $d = D$ に中心を有し、 $r = R$ なる径を有する、中に水の充満していない（流入して来た地下水はポンプ等で直ちに吸い出されてしまい暗渠内は大気圧となつて居る）様な埋渠を考えると、 $r = R$ な渠壁は大気圧によると等しい Potential Φ_w を有する Eguipotential Line と考える事をうる。

$$\Phi_w = C_1 \log \left[\frac{D}{R} + \sqrt{\left(\frac{D}{R}\right)^2 - 1} \right]^{-1}$$

$$\therefore C_1 = \frac{-\Phi_w}{\log \left[\frac{D}{R} + \sqrt{\left(\frac{D}{R}\right)^2 - 1} \right]}$$

故に任意点の Potential Φ'_p は

$$\Phi'_p = \frac{-\Phi_w}{2 \log \left[\frac{D}{R} + \sqrt{\left(\frac{D}{R}\right)^2 - 1} \right]} \log \frac{(h-z)^2 + x^2}{(h+z)^2 + x^2}$$

然るに一般の場合には図に示した様に $z = 0$ において、 $\Phi'_p \neq 0$ で $\Phi_p = \Phi_0$ である事から上式は次の様に書き換えられる。

$$\Phi_p = \frac{\Phi_e - \Phi_w}{2 \log \left[\frac{D}{R} + \sqrt{\left(\frac{D}{R}\right)^2 - 1} \right]} \log \frac{(h-z)^2 + x^2}{(h+z)^2 + x^2} + \Phi_e$$

又この様な Line Source よりの全流入量は次の様な式で表わす事が出来る。

$$\begin{aligned} Q &= -\frac{K}{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=0} dx \\ &= -\frac{K}{\mu} \cdot \frac{\Phi_e - \Phi_w}{2 \log \left[\frac{D}{R} + \sqrt{\left(\frac{D}{R}\right)^2 - 1} \right]} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} \left[\log \frac{(h-z)^2 + x^2}{(h+z)^2 + x^2} \right]_{z=0} dx \\ &= \frac{K}{\mu} \cdot \frac{2h(\Phi_e - \Phi_w)}{\log \left[\frac{D}{R} + \sqrt{\left(\frac{D}{R}\right)^2 - 1} \right]} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + h^2} \\ &= \frac{2Kh}{\mu} \cdot \frac{(\Phi_e - \Phi_w)}{\log \left[\frac{D}{R} + \sqrt{\left(\frac{D}{R}\right)^2 - 1} \right]} \cdot \left[\frac{1}{h} \tan^{-1} \left(\frac{x}{h} \right) \right]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \frac{2\pi K}{\mu} \cdot \frac{\phi_e - \phi_w}{\log \left[\frac{D}{R} + \sqrt{\left(\frac{D}{R}\right)^2 - 1} \right]} \end{aligned}$$

次に Φ_i に対して各々の条件を代入する。

$$\Phi_e = j g H + P_0$$

ここで、 P_0 = 大気圧， j = 水の単位体積重量 $j = \rho$ = 重力の加速度

$$\Phi_w = P_0 - j g h$$

前述の式に代入すると

$$Q = \frac{2\pi K}{\mu} \cdot \frac{j g (H+h)}{\log \left[\frac{D}{R} + \sqrt{\left(\frac{D}{R}\right)^2 - 1} \right]}$$

然るに

$$h = \sqrt{D^2 - R^2}$$

故に

$$Q = \frac{2\pi K}{\mu} \cdot \frac{j g (H + \sqrt{D^2 - R^2})}{\log \left[\frac{D}{R} + \sqrt{\left(\frac{D}{R}\right)^2 - 1} \right]}$$

又 Darcy の式による $\bar{K}$ を用いると

$$\frac{K j q}{\mu} = \bar{K} \quad \text{であるから}$$

$$Q = \frac{2 \pi \bar{K} (H + \sqrt{D^2 - R^2})}{\log \left[\frac{D}{R} + \sqrt{\left(\frac{D}{R} \right)^2 - 1} \right]}$$

参考の為に Point Sink で近似した場合の式を示すと

$$Q = \frac{2 \pi K j q (H + D)}{\mu \log (2D/R)}$$

$$= \frac{2 \pi \bar{K} (H + D)}{\log (2D/R)}$$

著者の導いた式と Point Sink を管の中心に仮定した式を近似的に用いた両者についての比較を一例を挙げて示して見ると表及び図-2 の様である。

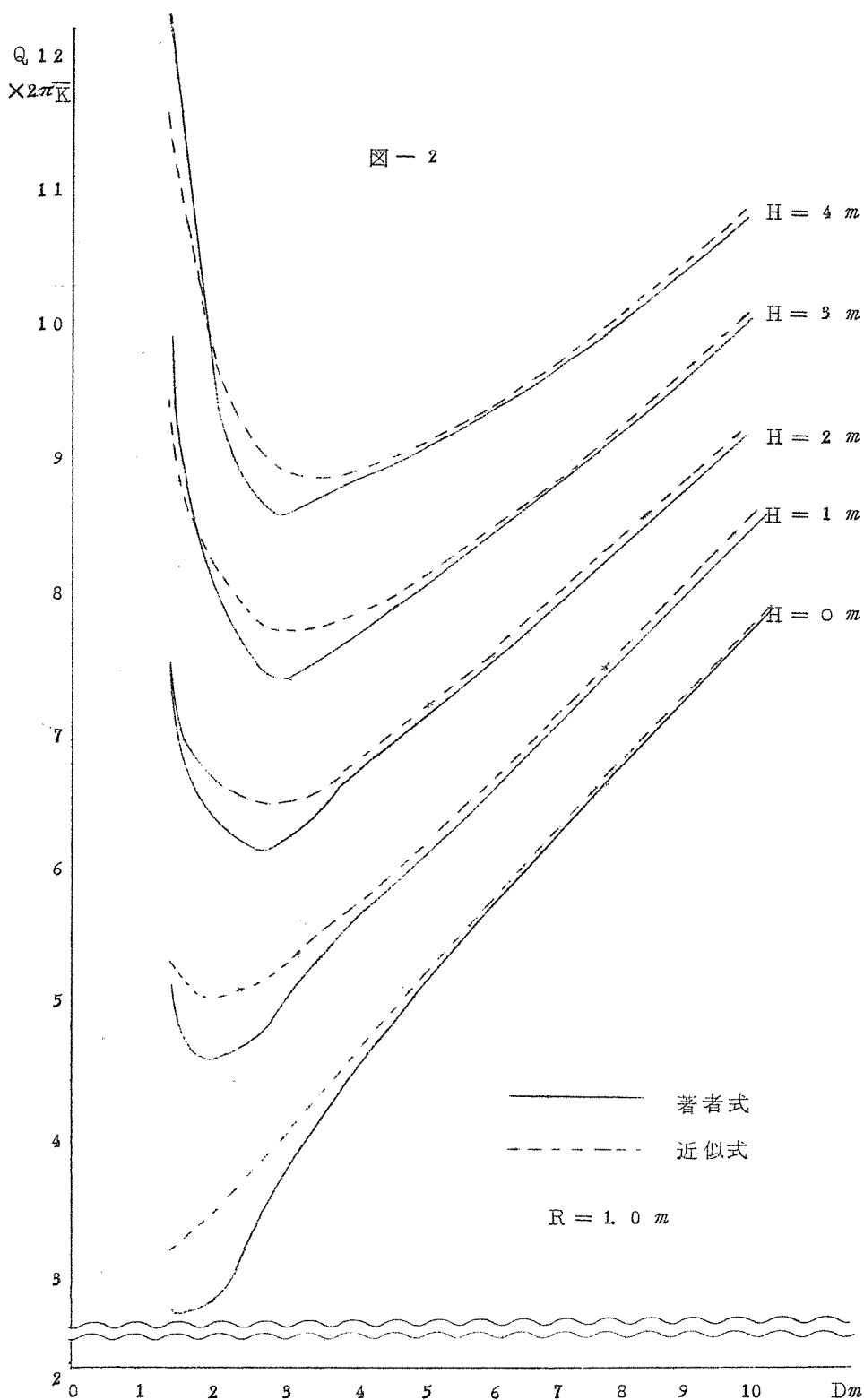
埋渠の径は 1.0 m とし種々の埋設深度、砂上水深の場合について計算を行って見た。

H m	D m	$\frac{H + \sqrt{D^2 - R^2}}{\log \left[\frac{D}{R} + \sqrt{\left(\frac{D}{R} \right)^2 - 1} \right]}$	$\frac{H + D}{\log (2D/R)}$	$\frac{\Delta Q^*}{\log \left[\frac{D}{R} + \sqrt{\left(\frac{D}{R} \right)^2 - 1} \right]}$
0	1.5	2.678	3.144	0.174
0	2	2.684	3.322	0.238
0	3	3.556	3.856	0.084
0	4	4.319	4.430	0.026
0	5	4.922	5.000	0.016
0	6	5.501	5.560	0.011
0	7	6.054	6.108	—
0	8	6.596	6.649	—
0	9	7.125	7.170	—
0	10	7.654	7.686	—
1	1.5	5.068	5.240	-0.034

1	2	4.5 4 8	4.9 8 3	0.0 2 6
1	3	4.8 1 3	5.1 4 0	0.0 6 8
1	4	5.4 5 8	5.5 3 6	0.0 1 4
1	5	5.9 2 6	6.0 0 0	0.0 1 2
1	6	6.4 3 0	6.4 8 7	_____
1	7	6.9 2 8	6.9 8 0	_____
1	8	7.4 2 8	7.4 7 4	_____
1	9	7.9 2 2	7.9 6 6	_____
1	1 0	8.4 2 4	8.4 5 5	_____
2	1.5	7.4 5 9	7.3 3 6	—0.0 1 6
2	2	6.4 1 2	6.6 4 5	0.0 3 6
2	3	6.0 7 0	6.4 2 5	0.0 5 8
2	4	6.5 5 1	6.6 4 4	0.0 1 4
2	5	6.9 3 0	7.0 0 0	0.0 1 0
2	6	7.3 5 9	7.4 1 4	_____
2	7	7.8 0 1	7.8 5 3	_____
2	8	8.2 6 0	8.3 0 5	_____
2	9	8.7 1 9	8.7 6 3	_____
2	1 0	9.1 9 3	9.2 2 4	_____
3	1.5	9.8 4 9	9.4 3 2	—0.0 4 2
3	2	8.2 7 6	8.3 0 6	0.0 2 3
3	3	7.3 2 7	7.7 1 0	0.0 5 2
3	4	7.6 6 7	7.7 5 1	0.0 1 1
3	5	7.9 3 5	8.0 0 0	_____
3	6	8.2 8 8	8.3 4 0	_____
3	7	8.6 7 5	8.7 2 5	_____
3	8	9.0 9 2	9.1 3 5	_____
3	9	9.5 1 5	9.5 5 9	_____
3	1 0	9.9 6 9	9.9 9 2	_____
4	1.5	1 2.2 4 0	1 1.5 2 6	—0.0 2 3

4	2	1 0.1 4 0	9.9 6 7	0.0 1 7
4	3	8.5 8 4	8.9 9 6	0.0 4 8
4	4	8.7 8 3	8.8 5 8	—
4	5	8.9 3 9	9.0 0 0	—
4	6	9.2 1 8	9.2 6 7	—
4	7	9.5 4 8	9.5 9 7	—
4	8	9.9 2 3	9.9 6 6	—
4	9	1 0.3 1 2	1 0.3 5 6	—
4	1 0	1 0.7 3 2	1 0.7 6 1	—

$$* \Delta Q = \frac{H + D}{\log(2D/R)} - \frac{H + \sqrt{D^2 - R^2}}{\log\left[\frac{D}{R} + \sqrt{\left(\frac{D}{R}\right)^2 - 1}\right]}$$



上記の諸表の右端の列の示す様に、一般に集水埋渠を使用する条件下で5
～10%程度の差が両式の結果に於いて見られる。

著者の式は埋設深 ≤ 1 m 以下程度の浅い埋渠の計算に特に有用と考えられ、
深度の増大と共に従来の式を用いての近似を行つても良い。

参 考 文 献

- 1 Muskat; "Flow of Homogenous Fluid" (1946)
- 2 本間仁; 土木学会誌 昭和32.8.
- 3 Atwood; "Electric and Magnetic Fields" Wiley (1932)