HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	節点エネルギー位を未知数とした管網流量計算法の改良
Author(s)	高桑, 哲男
Citation	衛生工学, 17, 47-63
Issue Date	1970-03
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/36199
Type	departmental bulletin paper
File Information	17_47-64.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

節点エネルギー位を未知数とした管網流量計算法の改良

高桑哲男*

An Improved Method for Analysing Flow and Pressure in Distribution Pipe Networks with Junction Energy Grades Unknown

Tetsuo TAKAKUWA

ABSTRACT

The calculating method of pipe networks with junction energy grades unknown was proposed in the reference.[6]

In this paper, the method is improved on the following two points:

(1) an improvement on the correction value given by the tangential approximation.

(2) programming of the reduction process for simultaneous linear equations.

A general program with the above improvements built-in is proposed.

1．はじめに

配水管網流量計算の目的は，節点取出し水量と節点エネルギー位を結びつけて流量変動あるいは水圧変動に対処するための方策を見いだすことにあるといえよう。

Cross法[1]またはMcIlroy,[2]青木[3]の方法に代表される従来の管網流量計算法は，管内流量を未知数としてまず管内流量を求め，付随的に管路の損失水頭を求めるものである。このような計算法においては，肝じんな節点取出し水量とエネルギー位が計算式の表面上に現れてこないために次のような難点が生ずる。

すなわち，

(1)取出し水量の変動に対しては仮定流量値を全面的に変更しなければならない。(合田・雄倉[4]および保野[5]の方法においてはこの欠点は除かれるが，連立1次方程式の元数が管路数に等しくなるので，大規模管網には不適当である。)

(2)エネルギー位を求めるためには，管路接続状態を表現するために多大な入力データを与える必要がある。

(3)エネルギー位を望ましい値に保持するために必要な増・減圧量あるいは管径変更の値を求めるには，直接的な計算はできず，試行錯誤法によらねばならない。

これに対して節点エネルギー位を未知数とした計算法は，節点における流量の連続条件を満足すべきエネルギー位を求めるものであって，節点取出し水量とエネルギー位が計算式中に現れるので，上記のような難点を解決することが可能となる。この計算法についてはすでに，接線近似による1次化と連立1次方程式の還元解法の併用によって，きわめて効果的に解かれることを示した。[6]

本研究において示す改良点は次の2点である。

(a)損失水頭が0もしくは0にきわめて近い管路が含まれているときにしばしば生ずる繰返し計算における収束性の劣化をくいとめる手段の開発

(b)連立1次方程式の還元解法における還元過程のプログラム化

前者は計算時間の短縮をもたらし，後者は入力データ作成の時間の節約につながるものである。

2．節点エネルギー位を未知数とした管網流量計算式

平均流速公式としてHazen-Willlams公式を採用すれば，節点 i と j を結ぶ管路の流量と損失水頭は

$$Q_{ij}=0.27853\,C_{ij}D_{ij}^{2.63}H_{ij}^{0.54}L_{ij}^{-0.54}$$
$$=K_{ij}H_{ij}^{0.54} \quad \cdots\cdots(1)$$

なる関係にある。ただし

$$K_{ij}=0.27853\,C_{ij}D_{ij}^{2.63}L_{ij}^{-0.54} \quad \cdots\cdots(2)$$

* 上水工学講座　助教授

であり，Q_{ij}＝流量〔m³/sec〕，C_{ij}＝流速係数，D_{ij}＝直径〔m〕，H_{ij}＝損失水頭〔m〕，L_{ij}＝管路長〔m〕である。損失水頭と節点エネルギー位 E_i，E_j〔m〕の関係は

$$H_{ij}=E_i-E_j \qquad \cdots\cdots(3)$$

と書かれるから，式—(1)に式—(3)を代入した上で (E_i-E_j) と Q_{ij} の正負が一致するようにすれば

$$Q_{ij}=K_{ij}|H_{ij}|^{-0.46}H_{ij}=K_{ij}|E_i-E_j|^{-0.46}(E_i-E_j) \qquad \cdots\cdots(4)$$

となる。式—(4)は H または E に関する非線形式であるから，接線近似法（Newton法）を適用して線形化することにする。

Q_{ij}, E_i, E_j に対する仮定値もしくは近似値をそれぞれ q_{ij}, e_i, e_j とし，その補正値をそれぞれ $\triangle Q_{ij}$, $\triangle E_i$, $\triangle E_j$ にて表わすと，

$$Q_{ij}=q_{ij}+\triangle Q_{ij} \qquad \cdots\cdots(5)$$
$$E_i=e_i+\triangle E_i \qquad \cdots\cdots(6)$$
$$E_j=e_j+\triangle E_j \qquad \cdots\cdots(7)$$

と書かれる。Q_{ij} と E_i, E_j の関係を全微分形で表示すると

$$dQ_{ij}=\frac{\partial Q_{ij}}{\partial E_i}dE_i+\frac{\partial Q_{ij}}{\partial E_j}dE_j \qquad \cdots\cdots(8)$$

であって，式—(4)を偏微分することによって得られる値を代入すると

$$dQ_{ij}=0.54\,K_{ij}|E_i-E_j|^{-0.46}(dE_i-dE_j) \qquad \cdots\cdots(8)$$

となる。したがって e_i, e_j なる節点エネルギー位の仮定値もしくは近似値に対してそれぞれ $\triangle E_i, \triangle E_j$ なる補正を行なったときの流量 Q_{ij} の増分は次のように書くことができる。

$$\triangle Q_{ij}=0.54\,K_{ij}|e_i-e_j|^{-0.46}(\triangle E_i-\triangle E_j) \qquad \cdots\cdots(9)$$

式—(9)を式—(5)に代入すると，結局次式が得られる。

$$\begin{aligned}Q_{ij}&=q_{ij}+0.54K_{ij}|e_i-e_j|^{-0.46}(\triangle E_i-\triangle E_j)\\&=K_{ij}|e_i-e_j|^{-0.46}(e_i-e_j)\\&\quad+0.54\,K_{ij}|e_i-e_j|^{-0.46}(\triangle E_i-\triangle E_j)\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(10)$$

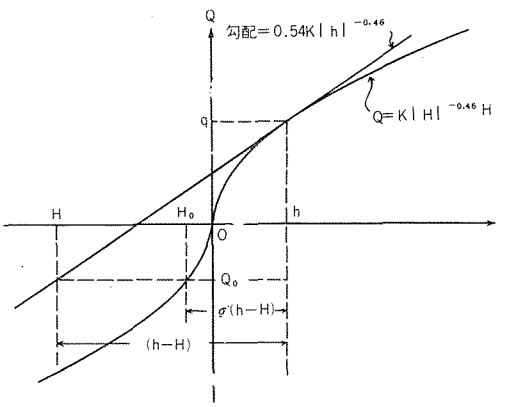
管網流量計算において満足されるべき水理学的条件は，①各節点における流量の連続条件と②各閉管路における損失水頭の閉合条件である。節点エネルギー位を未知数とした計算法では，節点エネルギー位の仮定値または修正値に対してただちに②の条件は満足されるから，①の条件のみが満足されるまで修正計算を繰返せばよい。節点 i に接続するすべての管路に関して式—(10)の総和をとれば

$$\begin{aligned}\sum_j Q_{ij}&=-p_i=\sum_j K_{ij}|e_i-e_j|^{-0.46}(e_i-e_j)\\&\quad+0.54\,\triangle E_i\sum_j K_{ij}|e_i-e_j|^{-0.46}\\&\quad-0.54\sum_j K_{ij}|e_i-e_j|^{-0.46}\triangle E_j\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(11)$$

となって，n 節点から成る管網については，これと同形の式が n 本だけ成立する。したがって，まず n 元の連立1次方程式を解いて各節点の $\triangle E$ を求め，その $\triangle E$ が十分に0に近くないならば，それを式—(6)に代入して得られる E を e として再び $\triangle E$ を求めるという操作を繰返せばよい。

3．接線近似法における補正値の改良

前章に概説した接線近似法にもとづく計算法においては，エネルギー位の仮定値の与え方によっては，繰返し演算回数が著しく増大することがある。著者の経験によれば，このように収束性が悪化する場合には，計算結果の損失水頭に0もしくは0に近い値が含まれている。一方，損失水頭に対する流量の関係においては，損失水頭が0の近くで流量変化が急激である。したがって，損失水頭が0に近い値のときにその正負が逆転するような補正が行なわれると，接線近似法では補正過剰となるために収束性が悪化するものと推察される。その一例を示すと図—**1**（記号の説明は後ほど行なう。）のごとくである。本章では，接線近似法における損失水頭と流量の関係を



図—1　Q — H 曲線

調べ，上記の収束性悪化をくいとめるための手段を明らかにする。

損失水頭の真値をH_0，仮定値もしくは近似値をh，接線近似によって得られる修正値をHとして，

$$\sigma=(H_0-h)/(H-h) \quad \cdots\cdots(12)$$

なる比をとる。式－(12)は接線近似によって得られる補正値に対する真の補正値の比であって，真値H_0は

$$H_0=\sigma(H-h)+h \quad \cdots\cdots(13)$$

として得られる。すなわちσは接線近似における補正値$(H-h)$を改良するための係数であるといえる。式－(12)より

$$\sigma=\frac{H_0/h-1}{H/h-1}=\frac{1-\hat{h}}{(H/h-1)\hat{h}} \quad \cdots\cdots(14)$$

となる。ここで

$$\hat{h}=h/H_0 \quad \cdots\cdots(15)$$

である。式－(14)における$\hat{h}$は次のごとくして求められる。

接線近似法においては，流量の真値Q_0に対応すべく損失水頭の補正が行なわれるから，Q_0とH，hの関係は次のごとく書かれる。

$$Q_0=K|h|^{-0.46}h+0.54K|h|^{-0.46}(H-h) \quad \cdots\cdots(16)$$

ただし，Kは式－(2)におけるK_{ij}と同じ内容である。

式－(16)の左辺は

$$Q_0=K|H_0|^{-0.46}H_0 \quad \cdots\cdots(17)$$

と表わされるから，式－(16)と(17)より次式が得られる。

$$K|h|^{-0.46}h+0.54K|h|^{-0.46}(H-h)=K|H_0|^{-0.46}H_0 \quad \cdots\cdots(18)$$

なお式－18)の両辺を$KH_0^{0.54}$で割ると

$$\left|\frac{h}{H_0}\right|^{-0.46}\frac{h}{H_0}+0.54\left|\frac{h}{H_0}\right|^{-0.46}\left(\frac{H}{H_0}-\frac{h}{H_0}\right)=1 \quad \cdots\cdots(19)$$

となる。この式は無次元化されたH_0，H，hの関係式であって，Kが介在しない。式－(19)を変形し，式－(15)の$\hat{h}$について表わすと最終的に次式が得られる。

$$|\hat{h}|^{-0.46}\hat{h}=\{0.54(H/h)+0.46\}^{-1/0.54} \quad \cdots\cdots(20)$$

ただし，hと{ }内の値の正負は一致しなければならない。

(H/h)の値に対して式－(20)より得られるhを式－(14)に代入することにより，(H/h)とσの関係が求められる。その結果をまとめると表－1のごとくであり，概略の傾向を示すと図－2のごとくになる。

上に得られた(H/h)とσの関係は1本の管路におけるものであるのに対し，いま解かなければならないのは連立非線形方程式であるから，その関係を直接適用することはできない。接線近似における補正が最も過剰となるときの補正値を改良することに重点をおくことにすると表－1より，$(H/h)\fallingdotseq-2$のときに補正が最も過剰となり，そのときには接線近似によって得られた補正値を約2の値で割った値を補正値とすればよいことになる。また図－1に一例を示したように，$Q-H$曲線は$H=0$の付近で急激な立上りを示すから，場合によっては，$h\fallingdotseq0$のときに補正値が極端に小さくなることも起こりうる。

以上の論議にもとづき，第5章に掲げる計算プログラムに盛込んだ改良点をまとめると次のごとくである。

①接線近似における補正値の改良として，管路$(i-j)$の損失水頭H_{ij}の正負が逆転したときには，節点iおよびjのエネルギー位の補正値(E_i-e_i)，(E_j-e_j)の1/2の値にて補正する。

②$h\fallingdotseq0$のときの補正を改善するために，

$$-0.0001^m\leqq h_{ij}\leqq0.0001^m$$

のときには$h_{ij}=0.0001^m$とおく。

上記の改良・改善による収束性の向上については第6章で検討する。

4．連立1次方程式の還元解法における還元過程

連立1次方程式の還元解法とは，一連の還元過程によって方程式の元数を減少させた後に掃出し演算あるいは消去法などの直接解法によって解こうとするものである。この解法は，係数が0である項を多く含む連立1次方程式を解く場合に有効であって，一般の直接解法と比較すると，記憶容量が少なくてすみ，演算回数の減少にともなって計算精度が向上する。応用としては，管網流量計算のほかに，構造力学，橋梁などで取扱う節点構造物の解析があげられる。

還元解法の原理ならびに還元過程を作成するための手順については文献[7]に詳述した。ここでは，節点エネルギー位を未知数とした計算法において解かれるべき連立1次方程式を還元解法によって解く場合の還元過程を具体的に述べ，そのプログラム化のための基礎とする。

表－1 h および $1/\sigma$ の値

H/h	h=h/H₀	$1/\sigma$	H/h	h=h/H₀	$1/\sigma$	H/h	$\hat{h}$=h/H₀	$1/\sigma$
−1+5	−1.7231−9	1.7231−4	−1−2	4.3055+0	1.3156+0	1−2	4.1223+0	1.3071+0
−1+4	−1.2253−7	1.2254−3	−7−3	4.2772+0	1.3143+0	2−2	4.0351+0	1.3029+0
−7+3	−2.3720−7	1.6606−3	−5−3	4.2585+0	1.3134+0	3−2	3.9508+0	1.2987+0
−5+3	−4.4234−7	2.2122−3	−3−3	4.2399+0	1.3126+0	5−2	3.7901+0	1.2905+0
−3+3	−1.1394−6	3.4194−3	−2−3	4.2307+0	1.3121+0	7−2	3.6392+0	1.2824+0
−2+3	−2.4149−6	4.8321−3	−1−3	4.2215+0	1.3117+0	1−1	3.4297+0	1.2704+0
−1+3	−8.7236−6	8.7323−3	−7−4	4.2187+0	1.3116+0	2−1	2.8504+0	1.2323+0
−7+2	−1.6898−5	1.1846−2	−5−4	4.2169+0	1.3115+0	3−1	2.4092+0	1.1967+0
−5+2	−3.1539−5	1.5800−2	−3−4	4.2151+0	1.3114+0	5−1	1.7910+0	1.1321+0
−3+2	−8.1394−5	2.4498−2	−2−4	4.2142+0	1.3114+0	7−1	1.3872+0	1.0748+0
−2+2	−1.7292−4	3.4750−2	−1−4	4.2132+0	1.3113+0	1+0	1.0000+0	1.0000+0
−1+2	−6.2913−4	6.3503−2	−7−5	4.2130+0	1.3113+0	2+0	4.4951−1	8.1656−1
−7+1	−1.2262−3	8.6955−2	−5−5	4.2128+0	1.3113+0	3+0	2.5763−1	6.9407−1
−5+1	−2.3075−3	1.1741−1	−3−5	4.2126+0	1.3113+0	5+0	1.1876−1	5.3904−1
−3+1	−6.0719−3	1.8709−1	−2−5	4.2125+0	1.3113+0	7+0	6.8899−2	4.4398−1
−2+1	−1.3221−2	2.7401−1	−1−5	4.2124+0	1.3113+0	1+1	3.7841−2	3.5397−1
−1+1	−5.1918−2	5.4291−1	0+0	4.2123+0	1.3113+0	2+1	1.1290−2	2.1697−1
−7+0	−1.0838−1	7.8223−1	1−5	4.2122+0	1.3113+0	3+1	5.4656−3	1.5937−1
−5+0	−2.2459−1	1.1004+0	2−5	4.2121+0	1.3113+0	5+1	2.1664−3	1.0638−1
−3+0	−7.5968−1	1.7269+0	3−5	4.2121+0	1.3113+0	7+1	1.1722−3	8.0975−2
−2+0	−2.4236+0	2.1237+0	5−5	4.2119+0	1.3113+0	1+2	6.0960−4	6.0387−2
−1+0	−1.0748+2	1.9816+0	7−5	4.2117+0	1.3113+0	2+2	1.7021−4	3.3877−2
−0.852	0.0000+0	1.8519+0	1−4	4.2114+0	1.3113+0	3+2	8.0542−5	2.4084−2
−7−1	1.0267+2	1.7167+0	2−4	4.2105+0	1.3112+0	5+2	3.1340−5	1.5639−2
−5−1	2.1659+1	1.5726+0	3−4	4.2096+0	1.3112+0	7+2	1.6822−5	1.1759−2
−3−1	9.4118+0	1.4545+0	5−4	4.2078+0	1.3111+0	1+3	8.6961−6	8.6875−3
−2−1	6.9141+0	1.4029+0	7−4	4.2059+0	1.3110+0	2+3	2.4110−6	4.8197−3
−1−1	5.3083+0	1.3553+0	1−3	4.2032+0	1.3109+0	3+3	1.1382−6	3.4135−3
−7−2	4.9372+0	1.3418+0	2−3	4.1941+0	1.3105+0	5+3	4.4206−7	2.2099−3
−5−2	4.7116+0	1.3329+0	3−3	4.1850+0	1.3100+0	7+3	2.3706−7	1.6594−3
−3−2	4.5015+0	1.3242+0	5−3	4.1669+0	1.3092+0	1+4	1.2249−7	1.2248−3
−2−2	4.4018+0	1.3198+0	7−3	4.1490+0	1.3083+0	1+5	1.7231−9	1.7230−4

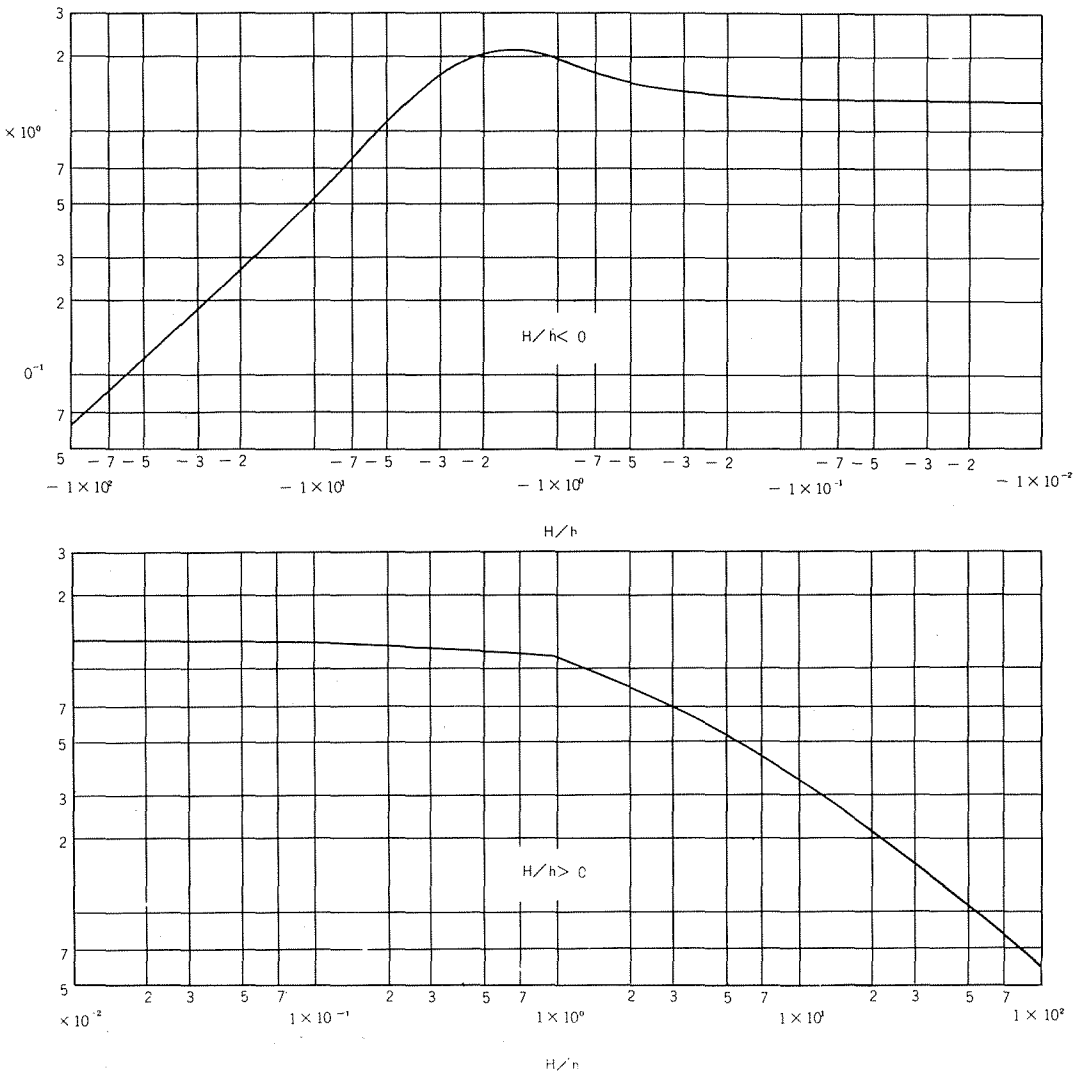
（注）：±Kは $\times 10^{\pm K}$ を意味する。

図－3に示す管網を例にとると，式－(11)によって作成される連立1次方程式の係数および定数項は表－2のごとくである。ただし，表－2においては

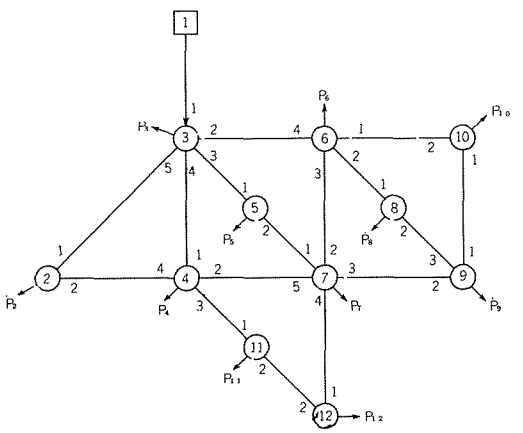
$$s_{ij}=K_{ij}\,|e_i-e_j|^{-0.46} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (21)$$

$$s_{ij}(e_i-e_j)=K_{ij}\,|e_i-e_j|^{-0.46}(e_i-e_j) \cdots (22)$$

なる記号を用いており，$\sum$は節点 i に隣接する節点 j について総和することを意味する。また配水池水位および配水池から流入する節点のエネルギー位は既知とするから，$\triangle E_1=0$, $\triangle E_3=0$ となっている。一方，図－3に記入してある管路番号によって，節点 i とそれに隣接する節点 j の配置関係をまとめると表－3のごとくになる。



図－2　1/σ－H／h曲　線



図－3　管　網　図

表－3は，表－2に掲げた係数表と管路配置状態を同時に表現しており，また記憶容量を減少する上からも効果的な表示法である。

表－3のごとき管路配置状態を表現するための表が準備された時点から出発すると，還元過程は図－4に示す手順によって具体化される。そのプログラム化は次章で示すことにする。図－4に示された操作を表－3に対してほどこすと，その結果は表－4のごとくである。

還元過程が明らかにされたならば，還元連立1次方程式は次の手順によって作成される。

1)◎印で囲まれている節点の$\triangle E$を0とおく。

2)表－4のアラビア数字の番号順にしたがい，□印で囲まれている節点の$\triangle E$を表－2の方程式から求め

表－2　係　数　表

式番号	左辺 ΔE_2	ΔE_4	ΔE_5	ΔE_6	ΔE_7	ΔE_8	ΔE_9	ΔE_{10}	ΔE_{11}	ΔE_{12}	右辺 定数項
(1)	$\sum s_{2j}$	$-s_{24}$	0	0	0	0	0	0	0	0	$-1.85\{p_2+\sum s_{2j}(e_2-e_j)\}$
(2)	$-s_{42}$	$\sum s_{4j}$	0	0	$-s_{47}$	0	0	0	$-s_{411}$	0	$-1.85\{p_4+\sum s_{4j}(e_4-e_j)\}$
(3)	0	0	$\sum s_{5j}$	0	$-s_{57}$	0	0	0	0	0	$-1.85\{p_5+\sum s_{5j}(e_5-e_j)\}$
(4)	0	0	0	$\sum s_{6j}$	$-s_{67}$	$-s_{68}$	0	$-s_{610}$	0	0	$-1.85\{p_6+\sum s_{6j}(e_6-e_j)\}$
(5)	0	$-s_{74}$	$-s_{75}$	$-s_{76}$	$\sum s_{7j}$	0	$-s_{79}$	0	0	$-s_{712}$	$-1.85\{p_7+\sum s_{7j}(e_7-e_j)\}$
(6)	0	0	0	$-s_{86}$	0	$\sum s_{8j}$	$-s_{89}$	0	0	0	$-1.85\{p_8+\sum s_{8j}(e_8-e_j)\}$
(7)	0	0	0	0	$-s_{97}$	$-s_{98}$	$\sum s_{9j}$	$-s_{910}$	0	0	$-1.85\{p_9+\sum s_{9j}(e_9-e_j)\}$
(8)	0	0	0	$-s_{106}$	0	0	$-s_{109}$	$\sum s_{10j}$	0	0	$-1.85\{p_{10}+\sum s_{10j}(e_{10}-e_j)\}$
(9)	0	$-s_{114}$	0	0	0	0	0	0	$\sum s_{11j}$	$-s_{1112}$	$-1.85\{p_{11}+\sum s_{11j}(e_{11}-e_j)\}$
(10)	0	0	0	0	$-s_{127}$	0	0	0	$-s_{1211}$	$\sum s_{12j}$	$-1.85\{p_{12}+\sum s_{12j}(e_{12}-e_j)\}$

表－3　管路配置の表示

式番号	節点	隣接節点 管路番号 1	2	3	4	5
(1)	2	3	4	—	—	—
(2)	4	3	7	11	2	—
(3)	5	3	7	—	—	—
(4)	6	10	8	7	3	—
(5)	7	5	6	9	12	4
(6)	8	6	9	—	—	—
(7)	9	10	7	8	—	—
(8)	10	9	6	—	—	—
(9)	11	4	12	—	—	—
(10)	12	7	11	—	—	—

表－4　管路配置と還元過程の表示

式番号	節点	隣接節点 管路番号 1	2	3	4	5	順序
(1)	[2]	③	④	—	—	—	1
(2)	④	③	⑦	[11]	②	—	2
(3)	[5]	③	⑦	—	—	—	3
(4)	⑥	[10]	⑧	⑦	③	—	7
(5)	⑦	⑤	⑥	[9]	⑫	④	5
(6)	[8]	⑥	⑨	—	—	—	6
(7)	⑨	⑩	⑦	⑧	—	—	II
(8)	⑩	⑨	⑥	—	—	—	III
(9)	⑪	④	[12]	—	—	—	4
(10)	⑫	⑦	⑪	—	—	—	I

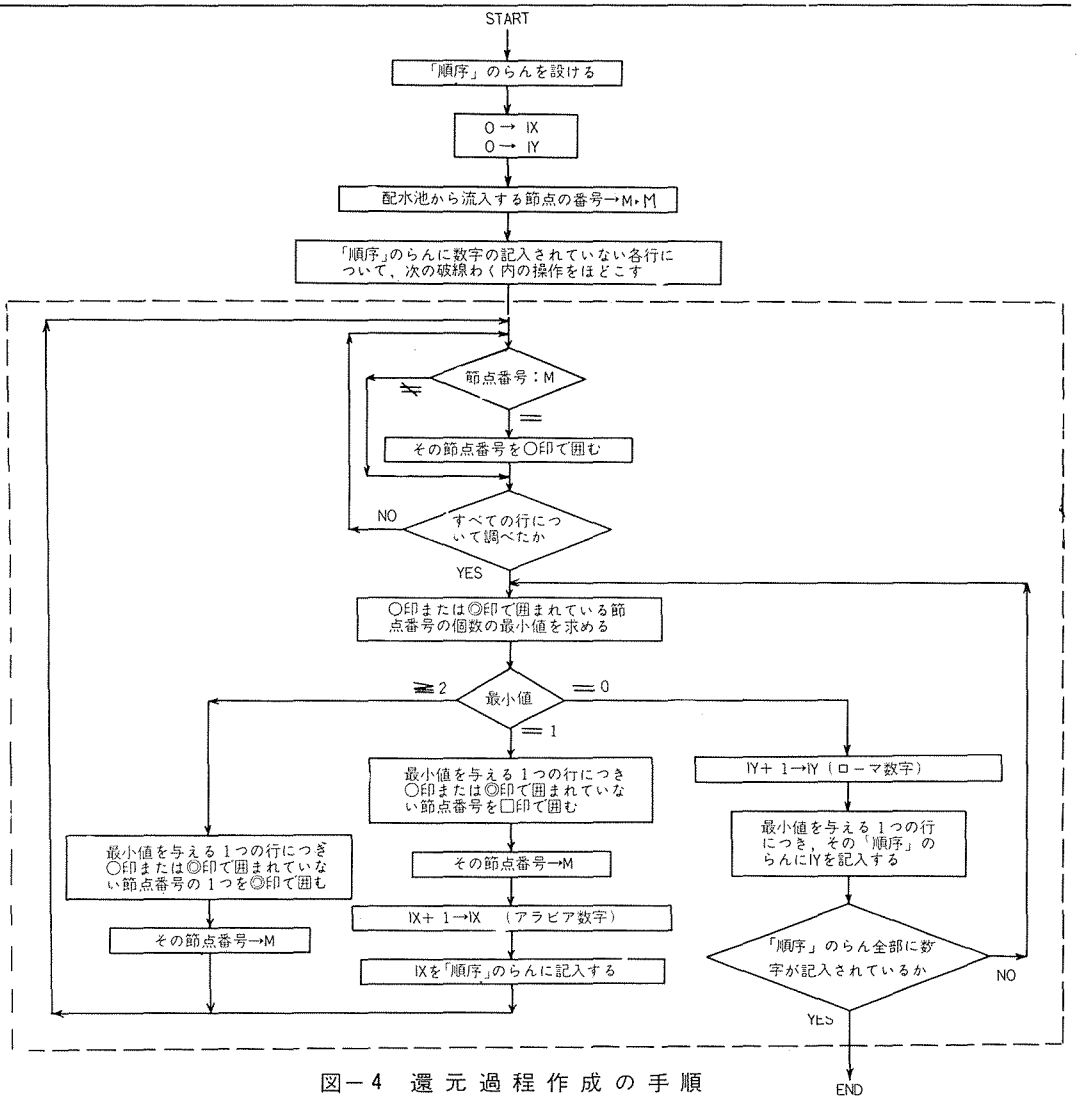
ていく。

3)表－4のローマ数字の番号順にしたがって，表－2の方程式について（右辺－左辺）の値を求め，$G_{I,0}$, $G_{II,0}$, ……, $G_{N,0}$ とする。

4)第k回目（$k=1, 2, \cdots\cdots, N$）には◎印で囲まれている節点のうちの第k番目の節点の$\triangle E$を　$\alpha(\alpha=0.1^m$が適当のようである。）とおき，◎印で囲まれている他の節点の$\triangle E$を0とおいた上で，上記2)，3)の手順によって，表－2の方程式について（右辺－左辺）の値$G_{I,k}$, $G_{II,k}$, ……, $G_{N,k}$を求めるという操作をN回繰返す。

5)還元連立1次方程式の一般形は次のごとく表わされる。

$$\left.\begin{aligned}
&(G_{I,1}-G_{I,0})\triangle E_1+(G_{I,2}-G_{I,0})\triangle E_2+\cdots\cdots\\
&\qquad+(G_{I,N}-G_{I,0})\triangle E_N=-\alpha\, G_{I,0}\\
&(G_{II,1}-G_{II,0})\triangle E_1+(G_{II,2}-G_{II,0})\triangle E_2+\cdots\cdots\\
&\qquad+(G_{II,N},-G_{II,0})\triangle E_N=-\alpha\, G_{II,0}\\
&\qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots\\
&(G_{N,1}-G_{N,0})\triangle E_1+(G_{N,2}-G_{N,0})\triangle E_2+\cdots\\
&\qquad+(G_{N,N}-G_{N,0})\triangle E_N=-\alpha\, G_{N,0}
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\ (23)$$



図－4　還元過程作成の手順

ただし，$\triangle E$の添字は◎印で囲まれている節点につけた順番である。表－2の方程式は10元が3元に還元されて次のごとく表わされる。

$$\left.\begin{aligned}&(G_{I,1}-G_{I,0})\triangle E_4+(G_{I,2}-G_{I,0})\triangle E_7\\&\qquad+(G_{I,3}-G_{I,0})\triangle E_6=-\alpha\ G_{I,0}\\&(G_{II,1}-G_{II,0})\triangle E_4+(G_{II,2}-G_{II,0})\triangle E_7\\&\qquad+(G_{II,3}-G_{II,0})\triangle E_6=-\alpha\ G_{II,0}\\&(G_{III,1}-G_{III,0})\triangle E_4+(G_{III,2}-G_{III,0})\triangle E_7\\&\qquad+(G_{III,3}-G_{III,0})\triangle E_6=-\alpha\ G_{III,0}\end{aligned}\right\}$$

式－(23)の還元連立1次方程式を解いて $\triangle E_1$, $\triangle E_2$, …,$\triangle E_N$を求め，その値を用いて前掲の手順2)をもう一度繰返すことによりすべての解を得ることができる。

5．計算プログラム

節点数n，節点における最大接続管路数がmである単点注入管網に対して節点エネルギー位を未知数とした計算法を適用する場合，出力として節点エネルギー位と管内流量，損失水頭を得るために最小限必要な添字つき変数は

AK($n+1$, m)：式－(21)におけるK_{ij}の値
S($n+1$, $m+1$)：式－(22)におけるs_{ij}の値
E($n+1$)：配水池水位および節点エネルギー位
P($n+1$)：節点取出し水量
F($n+1$)：Σs_{ij}の値
Q($n+1$)：$1.85\times\{\sum s_{ij}(e_i-e_j)+p_i\}$なる値
D($n+1$)：エネルギー位の補正値

B(l, $l+1$)：還元連立1次方程式の係数および定数項(lは還元連立1次方程式の元数)

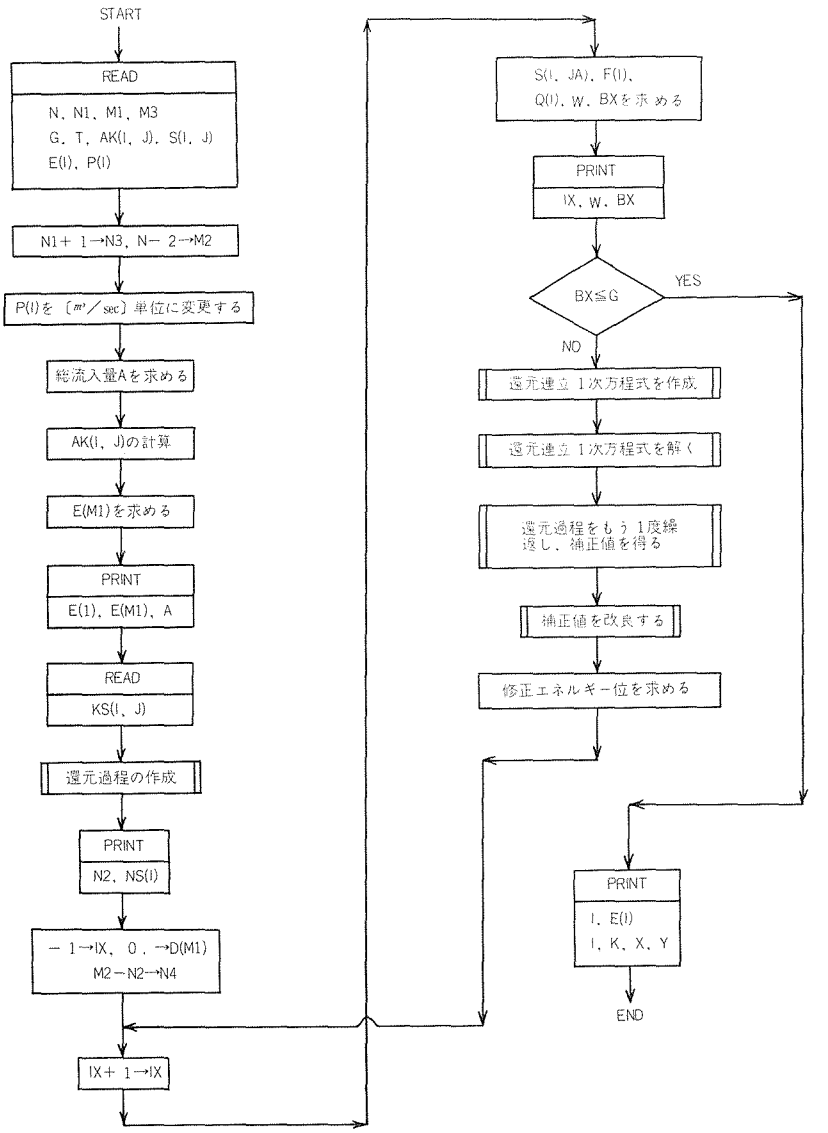
NS(l)：△Eに0またはαなる値をとらせる節点の番号

KS($n+1$, $m+1$)：管路配置状態を表現するための整数型変数

であって，DIMENSION の合計数は$(3mn+7n+3m+l^2+2l+7)$個となる。なお，敷設管路の適否を判定するために流速を求めるかあるいは節点エネルギー位と地盤高の値を比較検討しようとするならば，計算プログラムの補充とともに，それぞれ管径を$(n+1)\times m$個，地盤高をn個記憶させる必要がある。

計算のフロー・チャートは図－5に示すごとくである。

使用した計算機はコア容量2400，ドラム容量4800の北大計算センターNEAC 2203 Gであり，プログラムは，FORTRAN系言語であるALCON IIによって書いた。



図－5　計算のフロー・チャート

計算プログラム

```
#   ANALYSIS OF PIPE NETWORKS
      BY REDUCED SIMULTANEOUS
      LINEAR EQUATIONS WITH JUNC-
      TION ENERGY GRADE UNKNOWN.
    DIMENSION  AK(100, 5),  S(100, 6),
      E(100),  P(100), F(100), Q(100), D(100),
      B(10, 11), NS(10), KS(100, 6)
4   READ  0, N, N1 M1, M3,  ((KS(I, J),
      J=1, N1),  I=2, N)
    READ  1, G, T, ((AK(I, J), J=1, N1),
      I=2, N),  ((S(I, J), J=1, N1), I=2, N),
      (E(I), I=1, N), (P(I), I=2, N)
    N3=N1+1
    M2=N-2
    W=AK(M1, 1)
    A=0.
    DO 20 I=2, N
    P(I)=0.001*P(I)
    A=A+P(I)
    DO 20 J=1, N1
    IF(KS(I, J)) 20, 20, 10
10  V=KS(I, J)
    AK(I, J)=0.27853*V*AK(I, J)↑2.63/S
      (I, J)↑0.54
20  CONTINUE
    X=KS(M1, 1)
    E(M1)=E(1)-10.666*S(M1, 1)*(A/X)
      ↑1.85/ W↑4.87
    TYPE 700, E(1), E(M1), A
700 FORMAT(2F10.5, 3PF10.3)
    READ 0, ((KS(I, J), J=1, N3), I=1, M2)
    DO 410 I=1,M2
    Q(I)=1.
    IX=0
    DO 408 J=1, N3
    K=KS(I, J)
    IF(K) 409, 409, 402
402 S(I, J)=1.
    IX=IX+1
408 CONTINUE
409 F(I)=FLOAT(IX)+0.1
410 CONTINUE
    N2=0
    IX=0
    IY=0
    M=M1
411 DO 420 I=1, M2
    IF(Q(I)) 420, 495, 412
412 DO 418 J=1, N3
    K=KS(I, J)
    IF(K) 420, 420, 415
415 IF(M-K) 418, 416, 418
416 S(I, J)=-1.
    F(I)=F(I)-1.
    GO TO 420
418 CONTINUE
420 CONTINUE
726 BX=100.
    DO 425 I=1, M2
    IF(Q(I)) 425, 495, 421
421 IF (F(I)-BX) 422, 425, 425,
422 BX=F(I)
425 CONTINUE
    BX=BX+0.4
426 DO 430 I=1, M2
    IF(Q(I)) 430, 495, 428
428 IF (F(I)-BX) 432, 459, 459
430 CONTINUE
432 M=I
    IF(BX-1.) 440, 459, 459
440 DO 450 I=M, M2
    IF(Q(I)) 450, 495, 442
442 IF (F(I)-1.) 443, 450, 450
443 L=M2-IY
    D(L)=1
    IY=IY+1
    Q(I)=-1.
450 CONTINUE
    IF(IY+IX-M2) 726, 455, 495
455 DO 458 I=1, M2
    IF(Q(I)) 458, 495, 459
458 CONTINUE
    GO TO 490
459 IF(BX-2.) 460, 480, 480
460 DO 465 J=1, N3
    IF(S(M, J)) 465, 495, 461
```

```
461   Q(M)=-1.
      IX=IX+1
      D(IX)=M
      L=KS(M, J)
      KS(M, J)=-L
      M=L
      GO TO 411
465   CONTIUE
480   DO 485 J=1, N3
      IF(S(M, J)) 485, 495, 481
481   N2=N2+1
      M=KS(M, J)
      NS(N2)=M
      GO TO 411
485   CONTINUE
490   DO 491 I=1, M2
      F(I)=KS(I, N3)
      DO 491 J=1, N1
491   S(I, J)=KS(I, J)
      DO 493 I=1, M2
      K=D(I)
      DO 492 J=1, N1
492   KS(I, J)=S(K, J)
493   KS(I, N3)=F(K)
      GO TO 497
495   TYPE 701
701   FORMAT(/5HHENDA)
      GO TO 800
497   TYPE 702, N2, (NS(I), I=1, N2)
702   FORMAT(/8I5)
      IF(N2-M2) 499, 499, 498
498   TYPE 703
703   FORMAT(/11HN2 GA KADAI)
      GO TO 800
499   IX=-1
      CHANGE PAGE
      N4=M2-N2
      D(M1)=0.
500   IX=IX+1
      BX=0.
      W=0.
      DO 50 IA=1, M2
      I=IABS(KS(IA, 1))
      V=0.
      Y=P(I)
      DO 30 J=2, N3
      K=IABS(KS(IA, J))
      IF(K) 35, 35, 25
25    JA=J-1
      X=E(I)-E(K)
      A=ABS(X)
      IF(A-0.0001) 26, 28, 28
26    A=0.0001
28    A=AK(I, JA)/A↑0.46
      V=V+A
      Y=Y+A*X
30    S(I, JA)=A
35    F(I)=V
      X=ABS(Y)
      W=W+Y
      Q(I)=1.85*Y
      EI(BX-X) 40, 50, 50
40    BX=X
50    CONTINUE
      TYPE 55, IX, W, BX
55    FORMAT(I4, 2F12.7)
      IF(G-BX) 510, 600, 600
510   LA=0
550   DO 60 I=1, N2
      M=NS(I)
60    D(M)=0.
      LA=LA+1
      K=LA-1
      IF(K) 800, 90, 85
85    M=NS(K)
      D(M)=T
90    L=1
      DO 200 IA=1, M2
      I=KS(IA, 1)
      IF(I) 92, 92, 97
92    I=-I
      Y=-Q(I)
      DO 95 J=2, N3
      K=KS(IA, J)
      IF(K) 95, 95, 93
93    JA=J-1
      Y=Y+S(I, JA)*D(K)
95    CONTINUE
```

```
      D(I)=Y/F(I)
      GO TO 200
   97 M=0
      Y=F(I)*D(I)+Q(I)
      DO  150 J=2, N3
      K=KS(IA, J)
      IF(K)  110, 160, 100
  100 JA=J-1
      Y=Y-S(I, JA)*D(K)
      GO TO 150
  110 M=J-1
      NA=-K
  150 CONTINUE
  160 IF(M) 800, 170, 180
  170 B(L, LA)=Y
      L=L+1
      GO TO 200
  180 D(NA)=Y/S(I, M)
  200 CONTINUE
      IF (LA-N2 ) 550, 550, 210
  210 M=N2+1
      DO 230 I=1, N2
      Y=B(I, 1)
      DO  220 J=1, N2
      K=J+1
  220 B(I, J)=B(I, K)-Y
  230 B(I, M)=-Y
      CHANGE PAGE
  250 L=1
      L1=L+1
      LA=N2-1
      IF(LA) 255, 255, 260
  255 B(1, 2)=B(1, 2)/B(1, 1)
      GO TO 308
  260 DO 285 K=L, N2
      K1=K+1
  261 IF(B(K, L)) 280, 265, 280
  265 IF(K1-N2) 270, 270, 290
  270 DO 275 J=L, M
      Y=B(K, J)
      B(K, J)=B(K1, J)
  275 B(K1, J)=Y
      K1=K1+1
      GO TO 261
  280 Y=B(K, L)
      DO 285 J=L, M
  285 B(K, J)=B(K, J)/Y
  290 IF(L-N2) 291, 300, 300
  291 DO 298 I=L1, N2
      IF(B(I, L)) 292, 298, 292
  292 DO 295 J=L, M
      B(I, J)=B(L, L)-B(I, J)
  295 CONTINUE
  298 CONTINUE
      L=L+1
      L1=L1+1
      GO TO 260
  300 DO 305 J1=1, LA
      J =M-J1
      DO 305 I1=J1, LA
      I=N2-I1
  305 B(I, M)=B(I, M)-B(I, J)*B(J, M)
  308 DO 310 I=1, N2
      L=NS(I)
  310 D(L)=B(I, M)*T
      L=0
      DO 350 IA=1, M2
      I=KS(IA, 1)
      IF(I) 312, 312, 317
  312 I=-I
      Y=-Q(I)
      DO 315 J=2, N3
      K=KS(IA, J)
      IF(K) 315, 315, 313
  313 JA=J-1
      Y=Y+S(I, JA)*D(K)
  315 CONTINUE
      D(I)=Y/F(I)
      GO TO 348
  317 M=0
      Y=F(I)*D(I)+Q(I)
      DO 340 J=2, N3
      K=KS(IA, J)
      IF(K) 330, 345, 320
  320 JA=J-1
      Y=Y-S(I, JA)*D(K)
      GO TO 340
```

```
330   M=J-1
      NA=-K
340   CONTINUE
345   IF(M) 800, 350, 346
346   D(NA)=Y/S(I, M)
348   L=L+1
      IF(L-N4) 350, 355, 355
350   CONTINUE
355   CLEAR F
      DO 358 I=1, M2
      M=IABS(KS(I, 1))
      DO 358 J=2, N3
      K=IABS(KS(I, J))
      IF (K) 358, 358, 356
356   X=E(M)-E(K)
      Y=D(M)-D(K)
      W=X*(X+Y)
      IF(W) 357, 357 358
357   F(M)=1.
      F(K)=1.
358   CONTINUE
      DO 361 I=1, M2
      M=IABS(KS(I, 1))
      IF(F(M)-0.1) 359, 359, 360
359   E(M)=E(M)+D(M)
      GO TO 361
360   E(M)=E(M)+0.5* D(M)
361   CONTINUE
      GO TO 500
600   DO 650 I=2, N
      IF(M1-I) 605, 650, 605
605   TYPE 610, I, E(I)
610   FORMAT(/I4, F8.3)
      DO 615 M=1, M2
      L=IABS(KS(M, 1))
      IF(I-L) 615, 620, 615
615   CONTINUE
620   DO 625 J=2, N3
      K=IABS(KS(M,J))
      IF(K)  650, 650, 622
622   JA=J-1
      Y=E(I)-E(K)
      X=S(I, JA)*Y
      TYPS 623, I, K, X, Y
623   FORMAT(2I4, 3PF10.3, F9.3)
625   CONTINUE
650   CONTINUE
800   STOP
      END
```

上記プログラムの内容の主要な個所について，ステートメント・ナンバーにしたがって補足説明を加える。

4＋0：Nは（節点数＋1），N1は節点における最大接続管路数，M 1は配水池から流入する節点の番号，M 3は還元連立1次方程式の元数の許容最大値（記憶容量の大小に依存する。），KS(I, J) は流速係数の値（整数型）。

4＋1：Gは節点における流量閉合誤差の許容値〔m^3/sec〕，Tは△Eに対して与える増分であって，0.1 mが適当のようである。AK(I, J)，S (I, J) はそれぞれ直径〔m〕，管路長〔m〕の値。E(1)は仮定エネルギー位〔m〕（ただしE(1)は配水池水位とする。），P(I)は節点取出し水量〔ℓ/sec〕。

10＋1：式―(2)におけるK_{ij}の値を求める。

20＋3：E(1)は配水池水位〔m〕，E (M1) は配水池から流入する節点のエネルギー位〔m〕，Aは管網への総流入量〔ℓ/sec〕。

700＋1：KS (I, J) は管路の配置状態を表現するための値（後掲の計算例参照）。

700＋2～703＋1：還元過程を作成するためのプログラム・ユニット（図－4参照）。入力データの誤まりなどにより還元過程が得られないときには，701のFORMATが，還元連立1次方程式の元数N2がM3を越えるときには，703のFORMATが印字される。

25＋3～26＋0：第3章で述べた改良点の②である。

30＋0：S (I, JA) は式―(21)におけるs_{ij}の値。

35＋0：F(I)は$\sum s_{ij}$。

35＋3：Q(I)は$1.85\times\{\sum s_{ij}(e_i-e_j)+p_i\}$なる値。

50＋1：IXは繰返し演算回数。W，BXはそれぞれ節点における流量閉合誤差の絶対値の総和と最大値であり，単位はいずれも〔m^3/sec〕。

510＋0～230＋0：還元連立1次方程式を作成するためのプログラム・ユニット。

250＋0～310＋0：還元連立1次方程式を掃出し演算によって解き，接線近似による補正値を求める

プログラム・ユニット。

310＋1～350＋0：還元過程をもう一度繰返し，すべての補正値を求める。

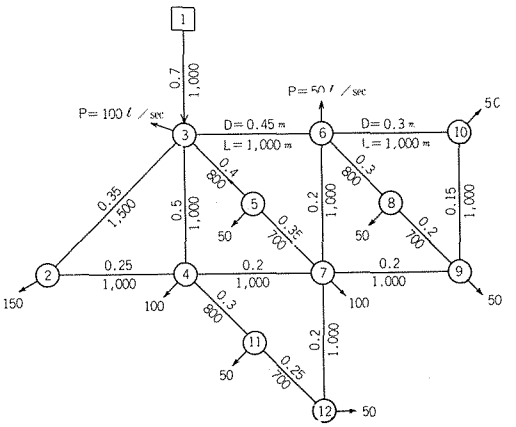
355＋0～361＋0：第3章で述べた改良点①にしたがって改良された補正値を求め，それによって修正エネルギー位を求める。

605＋0：E(I)は節点Iにおけるエネルギー位〔m〕。

622＋3：Xは管路I－K内の流量〔ℓ/sec〕であり，Yは損失水頭〔m〕。

（計 算 例）

図－6の管網に対して前掲のプログラムを適用したときの入力データを表－5に，計算結果を表－6に示す。ただし，節点における管路番号は図－3に示したごとくである。

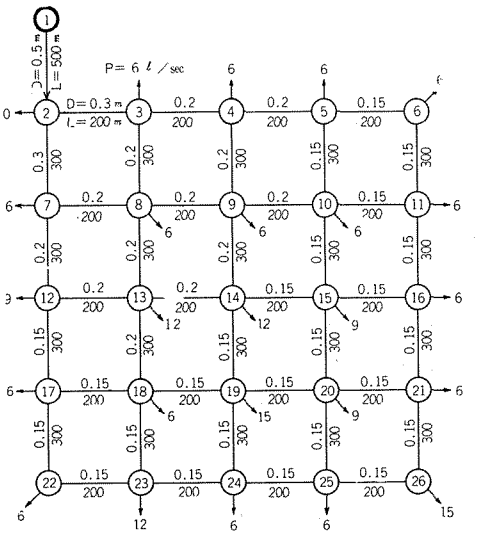


図－6　管　網　図
（流速係数はすべてC＝100）

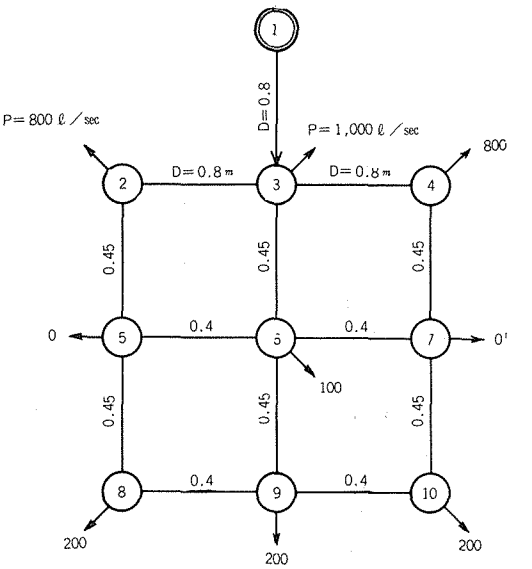
6. 計算例による検討

第3章で述べた改良点①，②の効果を調べるために，表－7に分類されるごとき合計9とおりの計算を行なった。対象とした管網は図－7，8に，仮定エネルギー位は表－8 (1), (2), 9 (1)に示すごとくであり，改良に関しては (A) ①，②のいずれも改良しない，(B) ①は改良し，②は改良しない，(C) ①，②のいずれも改良する，という3とおりの場合を選んだ。流量閉合誤差の許容値を0.00001〔m³/sec〕としたときの繰返し演算回数を示すと表－7のごとくである。

すでに述べたように，接線近似は損失水頭の値にもとづいて行なわれる。表－7の結果を検討するために，表－8，9の仮定エネルギー位を損失水頭の仮定値に直すとそれぞれ表－10(1),(2), 11(1)のごとくである。表－10



図－7　管　網　図　（I，II）
（流速係数はすべてC＝100）



図－8　管　網　図　（III）
（管路長はすべてL＝1000m，流速係数はすべてC＝100）

の各行を比較すると明らかなように，IとIIではIIの仮定値の方が計算結果からのずれが大きいにもかかわらずAとCのいずれの場合にも収束性の差異は小である。IとIIの場合には，BとCの結果は同一であって，改良点②は収束性に影響を及ぼしていない。一方，改良点①の効果は大であって，いずれの場合にも2.6倍程度収束性が改善されている。IIIの場合は損失水頭が0となる管路が含まれるように管路配置を行なった例である。この場

表－5　入 力 デ ー タ

入　力　デ　ー　タ										備　考
12										N
5										N 1
3										M 1
10										M 3
100	100	0	0	0	100	100	100	100	100	KS (I, J)
100	100	100	100	0	100	100	0	0	0	
100	100	100	100	0	100	100	100	100	100	
100	100	0	0	0	100	100	100	0	0	
100	100	0	0	0	100	100	0	0	0	
100	100	0	0	0						
0.00001										G
0.1										T
0.35	0.25	0.	0.	0.	0.7	0.45	0.4	0.5	0.35	AK (I, J)
0.5	0.2	0.3	0.25	0.	0.4	0.35	0.	0.	0.	
0.3	0.3	0.2	0.45	0.	0.35	0.2	0.2	0.2	0.2	
0.3	0.2	0.	0.	0.	0.15	0.2	0.2	0.	0.	
0.15	0.3	0.	0.	0.	0.3	0.25	0.	0.	0.	
0.2	0.25	0.	0.	0.						
1500.	1000.	0.	0.	0.	1000.	1000.	800.	1000.	1500.	S (I, J)
1000.	1000.	800.	1000.	0.	800.	700.	0.	0.	0.	
1000.	800.	1000.	1000.	0.	700.	1000.	1000.	1000.	1000.	
800.	700.	0.	0.	0.	1000.	1000.	700.	0.	0.	
1000.	1000.	0.	0.	0.	800.	700.	0.	0.	0.	
1000.	700.	0.	0.	0.						
55.	43.	47.	45.	45.	45.	43.	43.	41.	43.	E (I)
43.	41.									
150.	100.	100.	50.	50.	100.	50.	50.	50.	50.	P (I)
50.										
2	3	4	0	0	0	4	3	7	11	KS (I, J)
2	0	5	3	7	0	0	0	6	10	
8	7	3	0	7	5	6	9	12	4	
8	6	9	0	0	0	9	10	7	8	
0	0	10	9	6	0	0	0	11	4	
12	0	0	0	12	7	11	0	0	0	

表－6　計　算　結　果

55.00000	46.99999	800.000	
3	2	7	6
0	0.2539263	0.0529028	
1	0.0423627	0.0085206	
2	0.0011573	0.0003153	
3	0.0000023	0.0000007	
2	38.08966		
2	3	－110.567	－8.910
2	4	－39.433	－4.532
4	42.62184		
4	3	－239.585	－4.378
4	7	19.883	3.781
4	11	80.269	5.564
4	2	39.433	4.532
5	42.48033		
5	3	－152.890	－4.520
5	7	102.890	3.639
6	41.91169		
6	10	58.661	3.891
6	8	70.525	4.378
6	7	17.770	3.071
6	3	－196.956	－5.088
7	38.84093		
7	5	－102.890	－3.639
7	6	－17.770	－3.071
7	9	20.813	4.115
7	12	19.730	3.727
7	4	－19.883	－3.781
8	37.53323		
8	6	－70.525	－4.378
8	9	20.526	2.807
9	34.72604		
9	10	－8.661	－3.294
9	7	－20.813	－4.115
9	8	－20.526	－2.807
10	38.02039		
10	9	8.661	3.294
10	6	－58.661	－3.891
11	37.05767		
11	4	－80.269	－5.564
11	12	30.270	1.944
12	35.11360		
12	7	－19.730	－3.727
12	11	－30.270	－1.944

表－7　計算の分類と繰返し演算回数

管網図 エネルギー位表		改良点 A ①：改良しない ②：改良しない	改良点 B ①：改　良 ②：改良しない	改良点 C ①：改　良 ②：改　良
I	図－7	I－A	I－B	I－C
	表－8(1)	16 回	6 回	6 回
II	図－7	II－A	II－B	II－C
	表－8(2)	21 回	8 回	8 回
III	図－8	III－A	III－B	III－C
	表－9(1)	80 回	16 回	8 回

合には改良点②の効果も大きく，収束性を２倍改善している。改良点①，②を合わせると，その改善効果は10倍に達している。なおIIIの例においては　管路（１－３）の直径を過小に与えたために節点エネルギー位が低くなり過ぎているが，収束性を検討する立場からいえば，極端な仮定値に対しても順調な収束性を示す一例である。

表－8 エネルギー位：m（Ⅰ、Ⅱ）

節 点	(1)	(2)	(3)
	仮定値(Ⅰ)	仮定値(Ⅱ)	計 算 値
(1)	40	40	40.000
2	38.5	35	38.531
3	38	35	36.539
4	37.5	30	31.798
5	37	32	30.465
6	36.5	32	29.115
7	38	30	35.704
8	37.5	33	32.803
9	37	25	30.589
10	36.5	25	29.564
11	36	20	28.491
12	37.5	25	30.019
13	37	28	29.145
14	36.5	25	28.634
15	36	28	27.032
16	35.5	25	26.675
17	37	25	26.586
18	36.5	20	26.586
19	36	24	25.279
20	35.5	23	24.882
21	35	23	24.798
22	36.5	24	25.002
23	36	23	24.748
24	35.5	22	24.485
25	35	21	24.043
26	34.5	20	23.718

表－9 エネルギー位：m(Ⅲ)

節 点	(1)	(2)
	仮定値(Ⅲ)	計 算 値
(1)	50	50.000
2	30	－13.671
3	40	－ 7.439
4	30	－13.671
5	20	－18.809
6	30	－18.807
7	20	－18.809
8	10	－24.043
9	20	－24.043
10	10	－24.043

表－10 損失水頭：m（Ⅰ、Ⅱ）

管 路	(1)	(2)	(3)
	仮定値(Ⅰ)	仮定値(Ⅱ)	計 算 値
1－2	1.5	5	1.531
2－3	0.5	0	1.991
2－7	0.5	5	2.827
3－4	0.5	5	4.741
3－8	0.5	2	3.736
4－5	0.5	－2	1.333
4－9	0.5	5	1.209
5－6	0.5	0	1.350
5－10	0.5	7	0.901
6－11	0.5	12	0.624
7－8	0.5	－3	2.901
7－12	0.5	5	5.685
8－9	0.5	8	2.214
8－13	0.5	5	3.659
9－10	0.5	0	1.025
9－14	0.5	0	1.955
10－11	0.5	5	1.073
10－15	0.5	－3	2.533
11－16	0.5	－5	1.816
12－13	0.5	－3	0.875
12－17	0.5	0	3.434
13－14	0.5	3	0.510
13－18	0.5	8	2.558
14－15	0.5	－3	1.603
14－19	0.5	1	3.355
15－16	0.5	3	0.356
15－20	0.5	5	2.150
16－21	0.5	2	1.877
17－18	0.5	5	－0.001
17－22	0.5	1	1.584
18－19	0.5	－4	1.307
18－23	0.5	－3	1.838
19－20	0.5	1	0.398
19－24	0.5	2	0.795

20－21	0.5	0	0.084
20－25	0.5	2	0.839
21－26	0.5	3	1.080
22－23	0.5	1	0.254
23－24	0.5	1	0.264
24－25	0.5	1	0.442
25－26	0.5	1	0.325

表－11　損失水頭：m(Ⅲ)

管　路	(1)	(2)
	仮定値(Ⅲ)	計　算　値
1－3	10	57.439
2－3	－10	－6.233
2－5	10	5.138
3－4	10	6.233
3－6	10	11.369
4－7	10	5.138
5－6	－10	－0.002
5－8	10	5.234
6－7	10	0.002
6－9	10	5.236
7－10	10	5.234
8－9	－10	－0.000
9－10	10	0.000

7. ま と め

節点エネルギー位を未知数とした計算法によると，①節点エネルギー位が直接求められ，②節点取出し水量の変動に対処できるというほかに，③節点取出し水量，増減圧量あるいは管径を未知数とした計算やエネルギー位を指定した計算が可能となる。

本研究においては，この計算法を構成している2大要素である接線近似法と連立1次方程式の還元解法に関する改良として

(1) 接線近似法によって得られる補正値の改良，と

(2) 還元解法における還元過程のプログラム化

を示すとともに，その改良点を組込んだ計算プログラムを掲げた。

〈参考文献〉

1) 「水理公式集」昭和38年増補改訂版，P．331～336 (1963.8) 土木学会。

2) McIlroy, M. S., "Pipeline Network Flow Analysis Using Ordinary Algebra," Jour. AWWA, Vol. 41, No. 5, p. 422～428 (1949. 5)

3) 青木康夫「管網計算の連立1次方程式による新解法」水道協会雑誌，第295号，p. 25～29 (1959. 4)

4) 合田建，雄倉幸昭「1次化連立式による新管網解法とその応用」土木学会論文集，第138号，p. 21～29 (1967. 2)

5) 保野健治郎「電子計算機の利用よりみた管網設計に関する二，三の考察」水道協会雑誌，第402号，p. 24～31 (1968. 3)

6) 高桑哲男「節点エネルギー位を未知数とした管網流量計算法」第24回土木学会年次学術講演会講演概要第II部門，p.373～376 (1969. 9)

7) 高桑哲男「配水管網流量計算法に関する研究 (II)」水道協会雑誌，第422号，p. 27～36 (1969. 11)