



# HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	2004年度 混沌系工学特論講義ノート
Author(s)	井上, 純一; Inoue, Jun-ichi
Description	当講義資料は著者のホームページ <a href="http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/">http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/</a> からダウンロードできます。 <a href="http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/">http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/</a>
Issue Date	2004
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/370">https://hdl.handle.net/2115/370</a>
Rights(URL)	<a href="https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/">https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/</a>
Type	learning object
File Information	konton2004_6_present.pdf, 第6回講義スライド





# 混沌系工学特論 #6

---

情報科学研究科 井上純一

URL : [http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j\\_inoue/](http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/)

平成16年11月29日 第6回講義

# ノイズを利用したアルゴリズム

先週の復習

ノイズを利用したアルゴリズム

$$E = -Js_1s_2 - h_1s_1 - h_2s_2$$

(1) 各時刻で任意に  $s_1, s_2$  の1つを選び、その符号を変える。  
この前後の状態を  $\vec{s}, \vec{s}'$  と書く

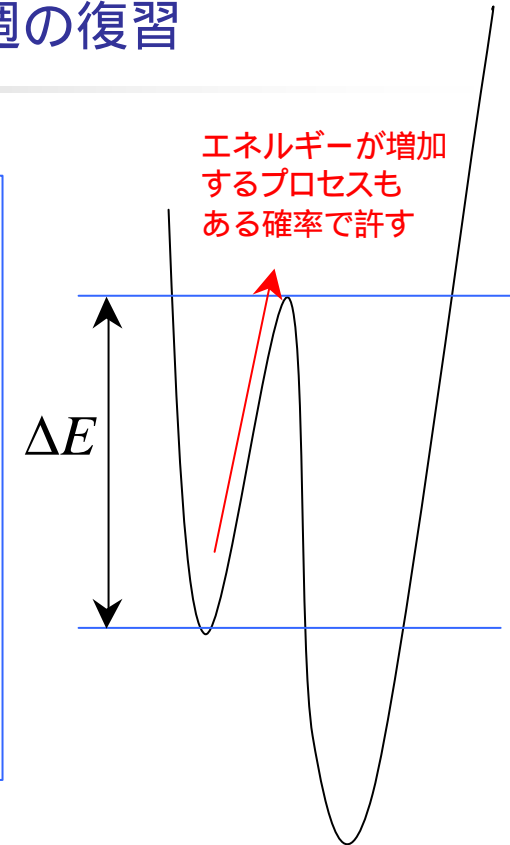
(2) (1)の前後でのエネルギー差:  $\Delta E = E(\vec{s}') - E(\vec{s})$  を計算し、

$\Delta E < 0$  ならば無条件で新しい状態を採用

$\Delta E > 0$  でも確率  $e^{-\Delta E/T}$  で新しい状態を採用

(3) (1)(2)を繰り返す

この部分でノイズが入る



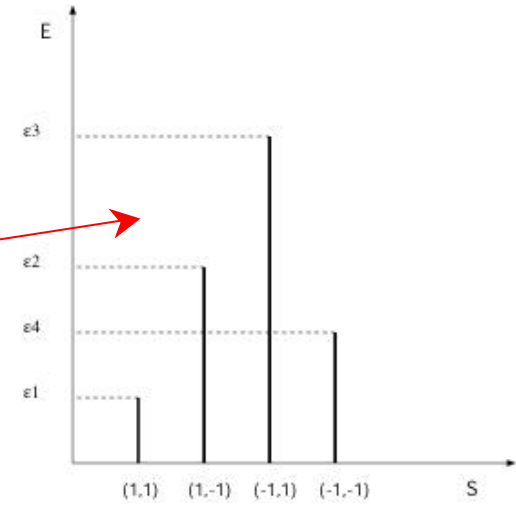
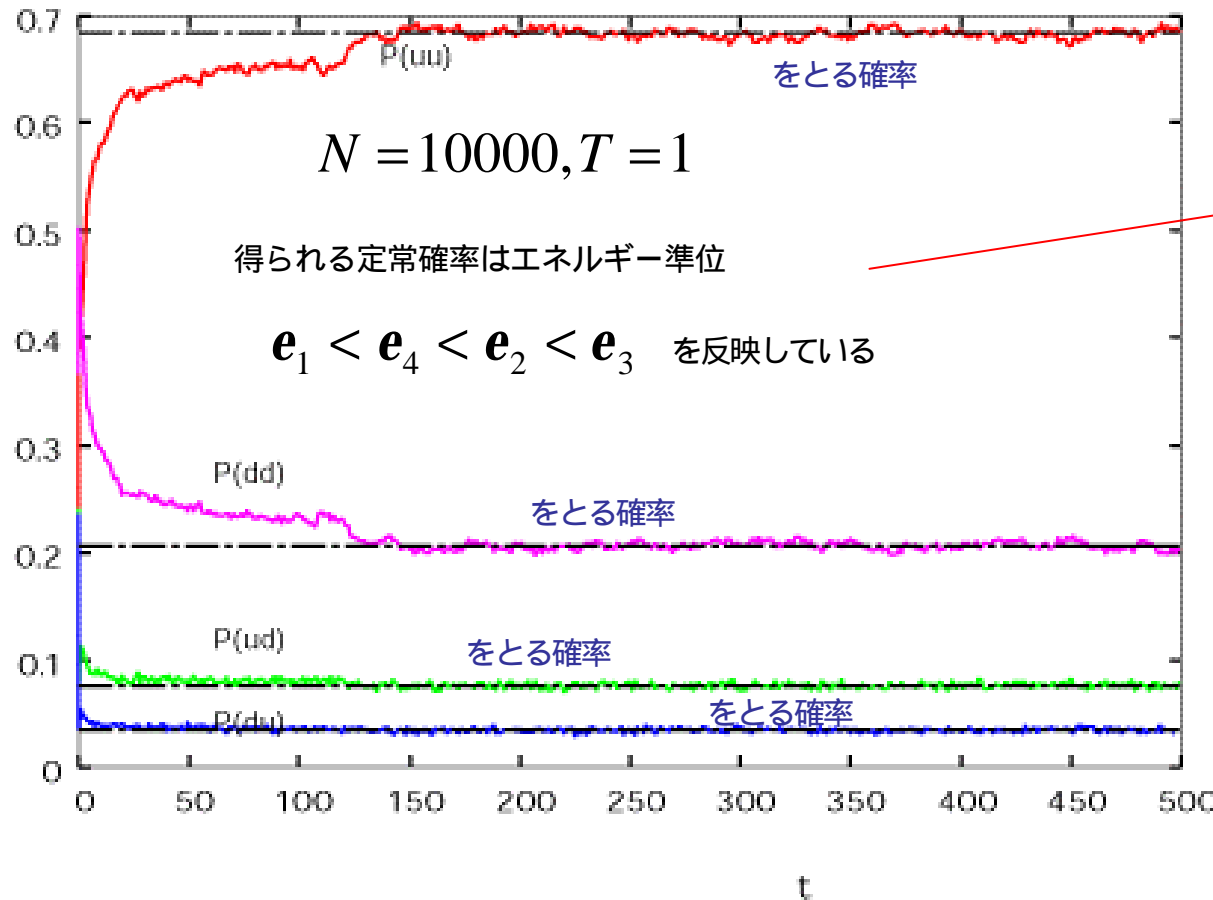
$P(s_1, s_2)$  の時間発展を調べてみる

平衡分布はボルツマン分布となる

$$P(s_1, s_2) = \frac{e^{-E(s_1, s_2)/T}}{Z}$$

# 計算機シミュレーションで感じをつかむ

先週の復習



導出は講義ノート参照

# 平衡状態と物理量の期待値

先週の復習

[ノイズを用いたアルゴリズム]を動作させることで、平衡分布：

$$P(s_1, s_2) = \frac{e^{(Js_1s_2 + h_1s_1 + h_2s_2)/T}}{\sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} e^{(Js_1s_2 + h_1s_1 + h_2s_2)/T}} = \frac{e^{-E(\vec{s})/T}}{\sum_{\vec{s}=\pm 1} e^{-E(\vec{s})/T}}$$

ボルツマン分布

$$E(\vec{s}) = -Js_1s_2 - h_1s_1 - h_2s_2$$

が得られる。1つのシステムの長時間平均はエルゴード性が満たされる条件下で上記平衡分布でのアンサンブル平均で置き換えることができる

$$\overline{A} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{t=0}^t A_t = \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} A(s_1, s_2) P(s_1, s_2) = \langle A \rangle$$

# 統計力学の方法の具体的適用例

## 神経系の連想記憶への適用

ターゲットパターンを  $\vec{x} = (1, \dots, 1)$  記憶するパターン数がオーダ1とする

$$E(S_1, \dots, S_N) = \frac{1}{N} \sum_{ij} \sum_{m=1}^p \mathbf{x}_i^m \mathbf{x}_j^m S_i S_j = -\frac{1}{2N} \left( \sum_i S_i \right)^2 + O(1)$$

オーダNの量

システムの分配関数:

$$Z = \sum_{S_1=\pm 1} \dots \sum_{S_N=\pm 1} e^{-bE(S_1, \dots, S_N)} = \sum_{S_1=\pm 1} \dots \sum_{S_N=\pm 1} e^{\left( \sqrt{\frac{b}{2N}} \sum_i S_i \right)^2}$$

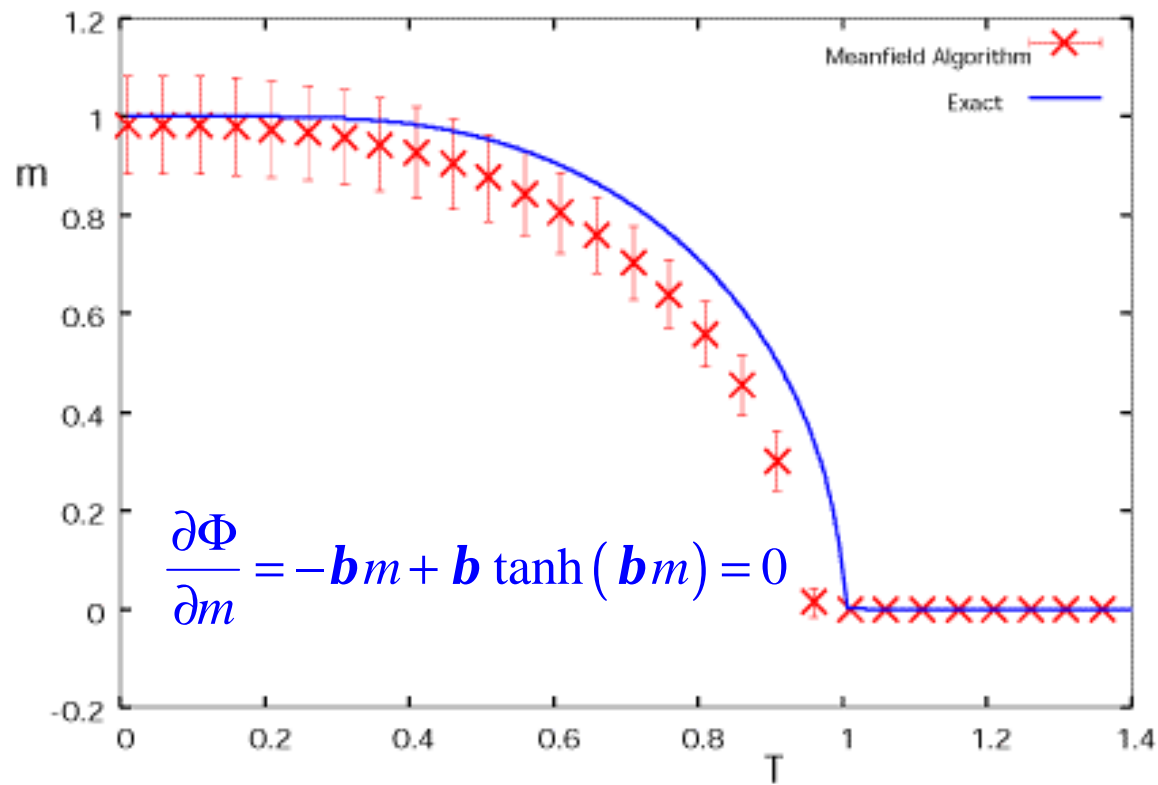
$$= \sum_{S_1=\pm 1} \dots \sum_{S_N=\pm 1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dm}{\sqrt{2p/bN}} e^{-\frac{N}{2}bm^2 + bm \sum_i S_i}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dm}{\sqrt{2p/bN}} e^{-\frac{N}{2}bm^2} \left\{ \sum_{S_1=\pm 1} e^{bmS_1} \right\} \dots \left\{ \sum_{S_N=\pm 1} e^{bmS_N} \right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dm}{\sqrt{2p/bN}} e^{-\frac{N}{2}bm^2 + N \log 2 \cosh(bm)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dm}{\sqrt{2p/bN}} e^{N\Phi(m)}$$

Nが十分大きなとき  
積分は指数の肩の極大 (鞍点)  
で支配される

# 鞍点方程式と自由エネルギー

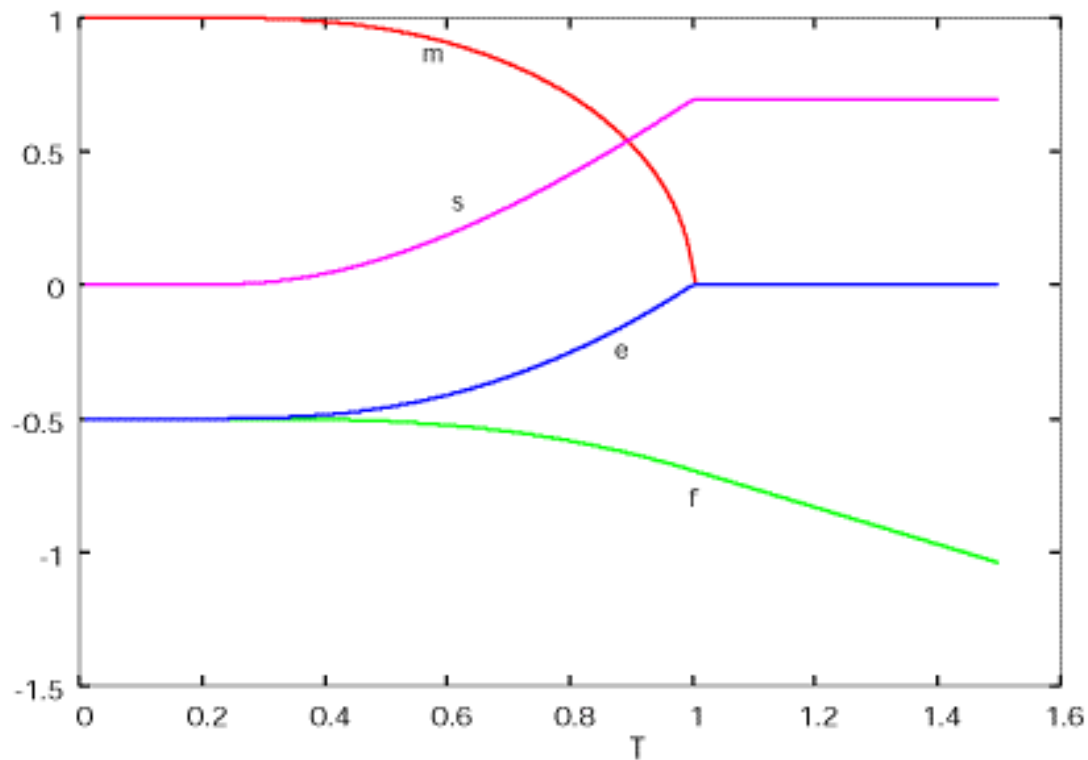


$$Z = e^{N\Phi(m)}$$

1神経素子あたりの自由エネルギー

$$\begin{aligned} \frac{F}{N} = f &= -\frac{1}{b} \Phi(m) \\ &= \frac{m^2}{2} - \frac{1}{b} \log 2 \cosh(bm) \end{aligned}$$

# 自由エネルギー、内部エネルギー、エントロピー



内部エネルギー

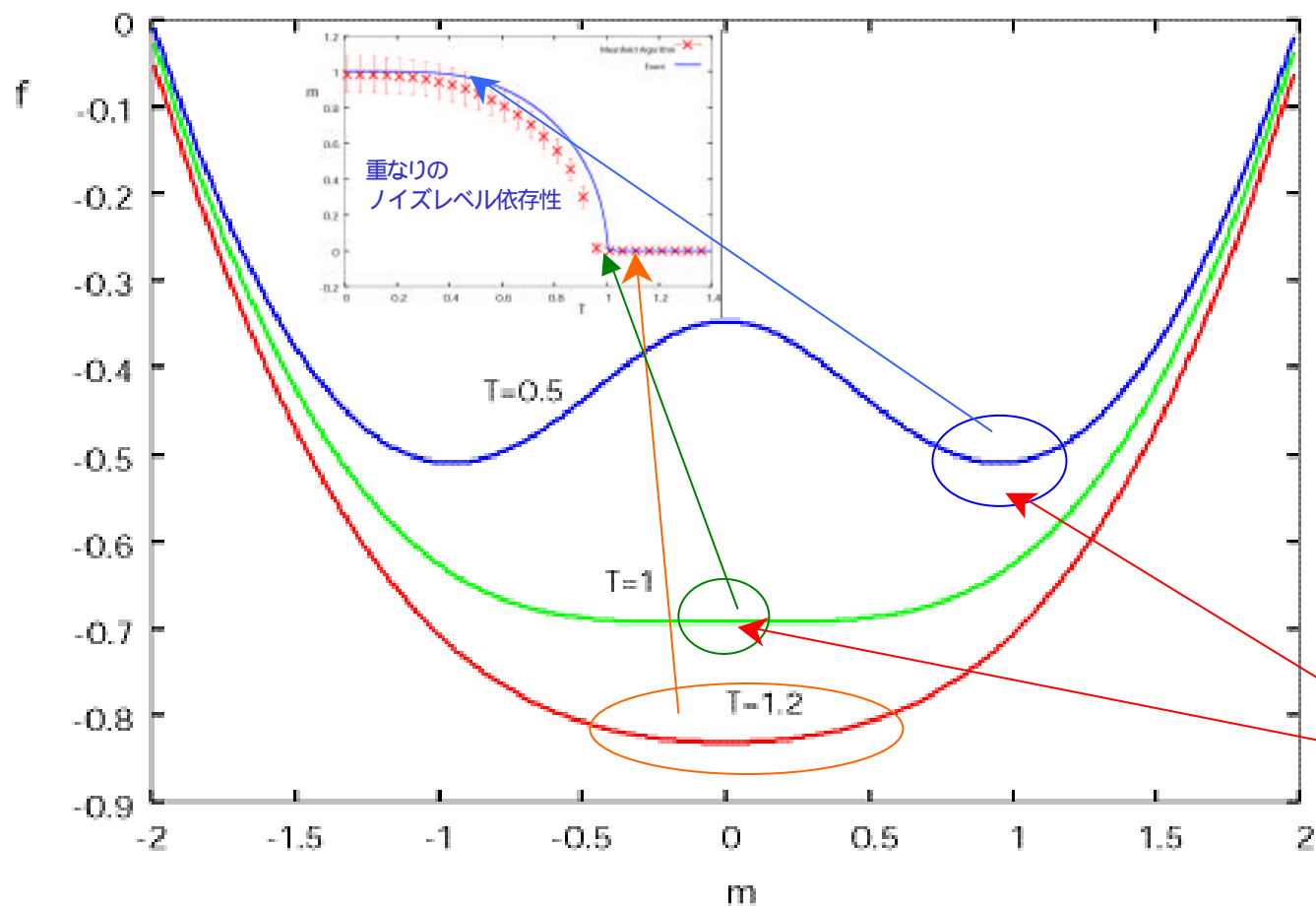
$$e = \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} (\mathbf{b} f) = \frac{m^2}{2} - m \tanh(\mathbf{b} m)$$

エントロピー

$$s = - \left( \frac{\partial f}{\partial T} \right) = \log 2 \cosh(\mathbf{b} m) - \mathbf{b} m \tanh(\mathbf{b} m) \\ = \mathbf{b}(e - f)$$

各種物理量は自由エネルギー経由  
で求めることができる

# 自由エネルギーと2次相転移



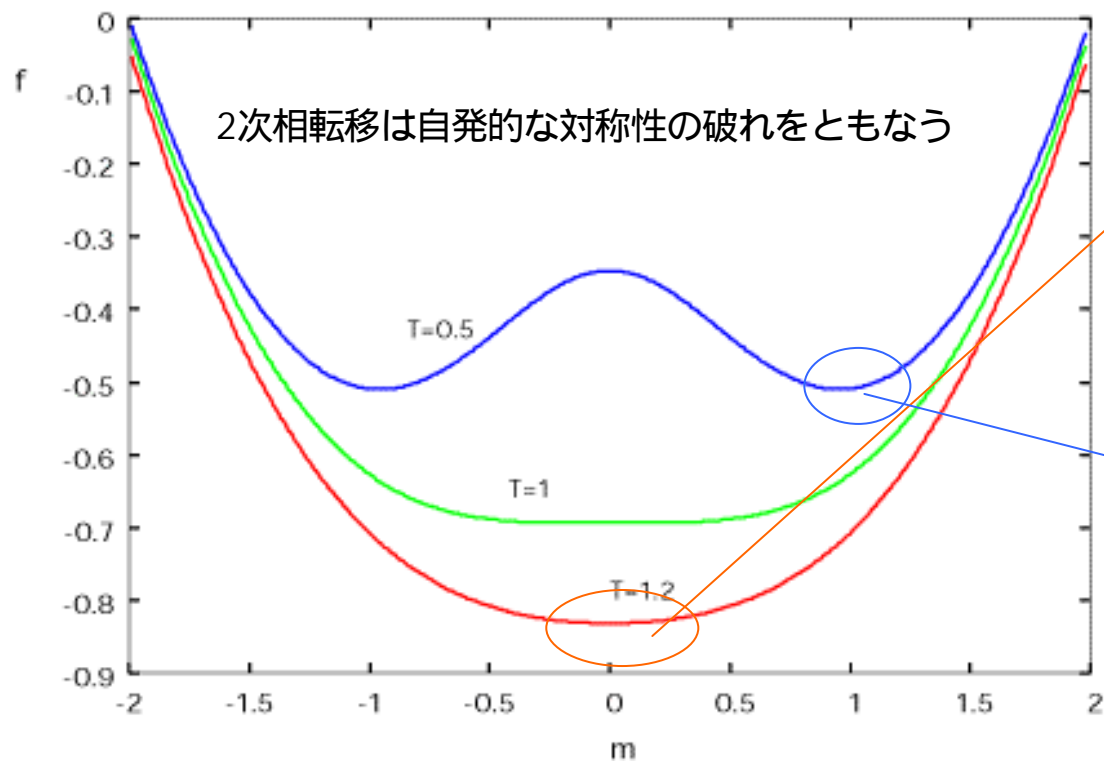
システムのとらうる状態  
は自由エネルギーの  
極小 (最小) である

$$\frac{\partial f}{\partial m} = 0$$

転移点を境にして  
 $m = 0$   
が不安定化し  
 $m \neq 0$   
が安定となる

# 自発的対称性の破れと2次相転移

重なり  $m = \frac{1}{N} \sum_i S_i$  はシステムの対称性を反映する



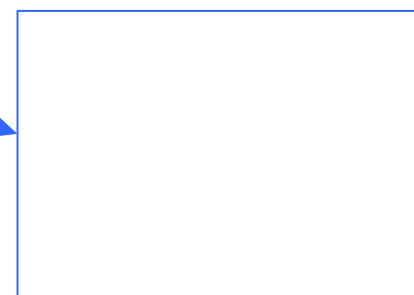
対称性が高い  $T > 1$



$m = 0$

↓  
システム的环境 (ノイズ)  
を変化させると、システムの  
対称性が自発的に破れる

自発的対称性の破れ



$m > 0$

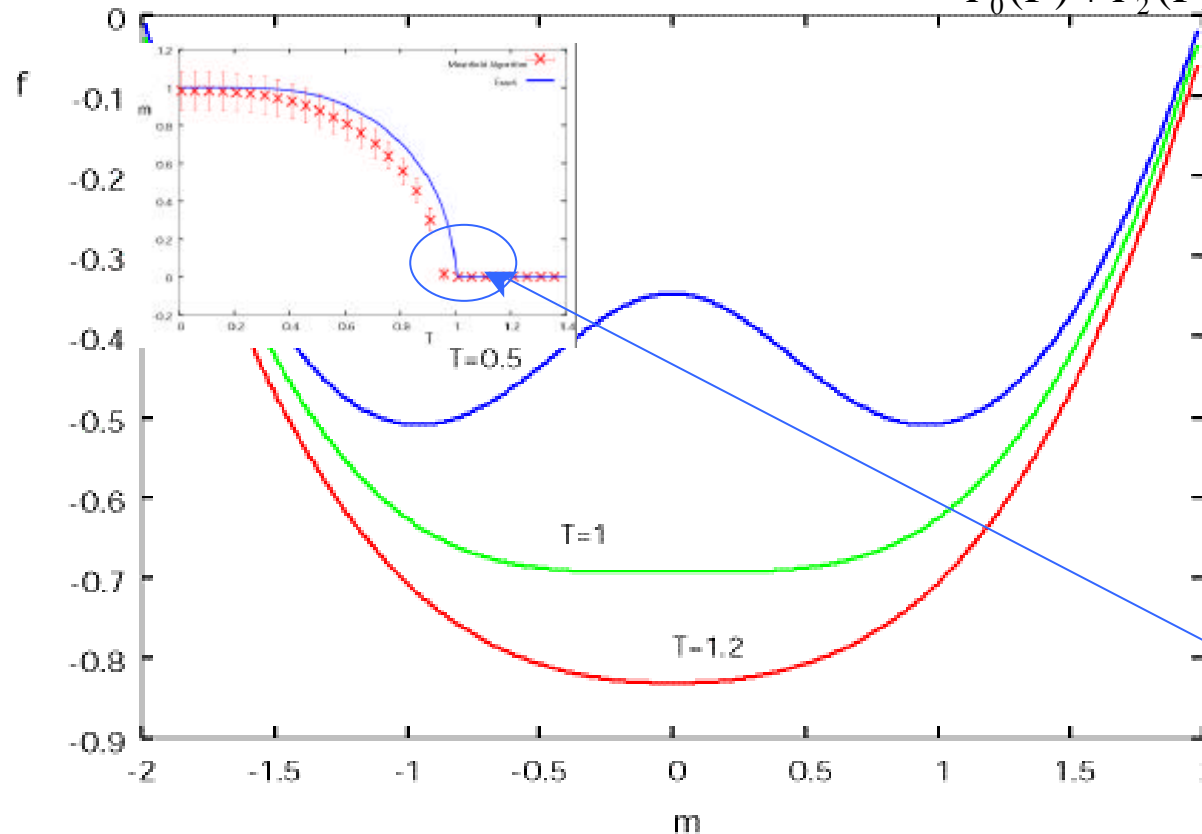
対称性が低い  $T < 1$

# 自由エネルギーの秩序変数での展開

自由エネルギーを  $m \approx 0$   
で展開する

$$f = -T \log 2 + \left( \frac{T-1}{2T} \right) m^2 + \frac{1}{12T^3} m^4 + O(m^6)$$

$$= F_0(T) + F_2(T)m^2 + F_4(T)m^4$$



相転移が生じるノイズレベル

$$F_2(T) = 0$$

$$T = 1$$

転移点近傍での秩序変数の振る舞い

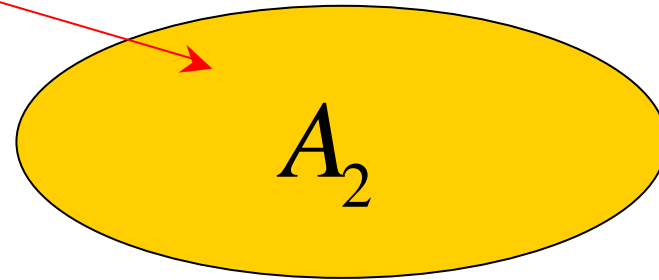
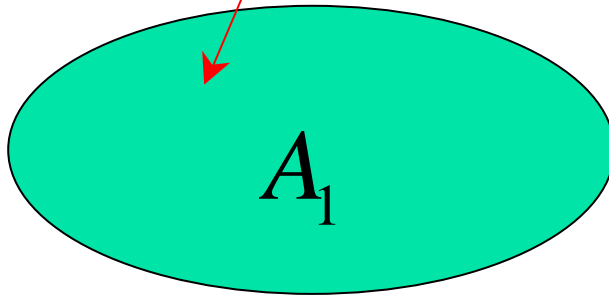
$$\frac{\partial f}{\partial m} = 0, m = \left\{ -\frac{F_4(T)}{2F_2(T)} \right\}^{1/2}$$

$$m = (1-T)^{1/2}$$

# 2分割問題の統計力学

$$\{a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_N\} = \{1.5, 7.5, 10, \dots, 2.3, \dots, 19\}$$

各アイテムをアイテム価値の総和が等しくなるように2つのグループに分ける



次のエネルギー関数を最小化：

$$E = \left| \sum_{a_j \in A_1} a_j - \sum_{a_j \in A_2} a_j \right| = \left| \sum_{j=1}^N a_j s_j \right|$$

エネルギー関数が最小となるように

$$s_j \in \{-1, 1\}$$

を割り当てる

アイテム数の増加とともに解候補が組み合わせ論的に増大する

# いくつかの簡単な場合の考察

$A_1, A_2$  どちらか一方がアイテムを独り占めする場合  $m = \frac{1}{N} \sum_i s_i = 1$

$$E = \left| \sum_j a_j s_j \right| = \left| \sum_j a_j \right| = N \cdot \frac{1}{N} \sum_j a_j = N \int_0^1 a da = \frac{N}{2}$$

$m = \frac{1}{N} \sum_i s_i$  による制約が無い場合

$$\left| \sum_j a_j s_j \right| = |a_1 s_1 + \dots + a_N s_N| \leq O(2^{-N} \sqrt{N}) < O(\sqrt{N})$$

$m = \frac{1}{N} \sum_i s_i$  による制約がある場合 (感度分析)、統計力学による解析が有効

$\sqrt{N}$

$2^N$   
個の準位

$2^{-N} \sqrt{N}$

次回 (12/20) に詳しくみて行く