



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	2004年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一; Inoue, Jun-ichi
Description	当講義資料は著者のホームページ http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/ からダウンロードできます。 http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/
Issue Date	2004
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/371
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	learning object
File Information	GraphTheory04_1.pdf, 第1回講義ノート



グラフ理論 配布資料 #1

教科書： pp. 1~9 の内容

担当： 井上 純一 (情報エレクトロニクス系棟 8-13)

平成 16 年 4 月 12 日

1 イントロダクション

ここでは、本講義で扱う「グラフ」の定義から始め、本講義で習う事項を概観することにしよう。それぞれの概念の詳細、及び、応用例は追々見て行くことになる。その中で、いくつかの定理、系、補題が出てくるが、本講義ではそれらの中で比較的重要と思われるものに関しては、その証明を追ってみるが、それ以外のものに関しては、具体的な例/応用例を取り上げ、諸定理の意味を直観的に理解し、有用性を確認するにとどめる。講義で取り上げなかった証明に関しては、各自が教科書を読み、一度はその流れを追ってみること。

また、各回の配布資料の最後に「演習問題」が付いている。受講者は次回までに、これらの問題を解き、レポートとして提出すること。最終成績のうちの約 40 % はこのレポートの積み重ねで決まることになる。

1.1 グラフとは何か？

グラフに関する詳しい説明を始める前に、ウォーミングアップとして基本的な概念を概観することにする。

1.1.1 点, 辺, 次数

グラフ … 点 (vertex) (図 1 の P, Q, R, S, T), 及び, 辺 (edge) (図 1 の \overline{PQ} , \overline{QR} 等) からなる図形。

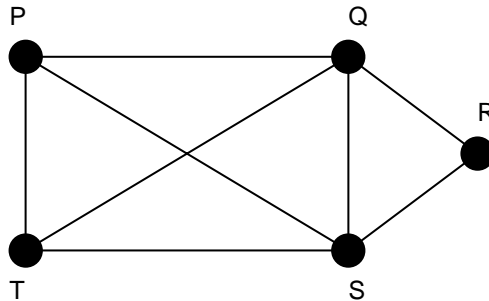


図 1: この講義で扱う「グラフ」の一例。

次数 (degree) … ある点を端点とする辺の本数.

例

図 1 の点 P の次数は 3.

図 1 の点 Q の次数は 4.

これを式で表すと ⇒

$$\begin{cases} \deg(P) = 3 \\ \deg(Q) = 4 \end{cases} \quad (1)$$

となる.

1.1.2 グラフに意味を持たせる

図 1 の P,Q,R,R,T … フットボールチーム ⇒ 各点の次数がそのチームが行う試合数となる.

$\deg(P) = 3 \Rightarrow$ チーム P が行う試合数は 3 である.

この他にも、電気回路、道路等、様々な形でグラフに意味を持たせ、その対象をグラフ理論的な考察に基づき調べることができる.

⇒ 演習問題 1 2,3 参照.

1.1.3 グラフの同形性

グラフとは点の集合とそれらの結び方 (辺の集合) の表現であり、距離的な性質とは無関係である. 例えば、下記の 2 つの図形はグラフ理論においては同じものとして扱われる. 従って、実問題をグラフで表現す

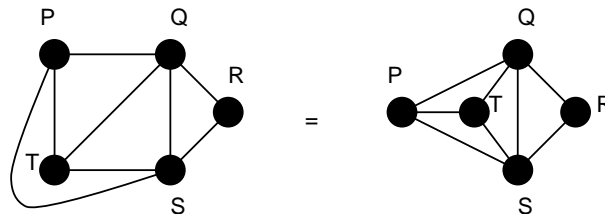


図 2: 同形な 2 つのグラフの一例.

る際には扱いやすいもの (調べたい関係性が見やすいもの) を選ぶことが肝要である.

グラフの表現には隣接行列、接続行列等の行列を用いることもできる. この表現法は計算機上でグラフを扱うためには有用である. これらの行列に関する詳細は次回以降に見て行くことになる.

1.2 様々なグラフ

全てのグラフはその幾何学的な性質の違いからグループに分類され、それぞれのグループには名前が付けられている. ここでは、その中のいくつかを概観する.

1.2.1 多重辺, ループ, 単純グラフ

多重辺 (multiple edges) … 任意の2点 P, Q を 2本以上の辺 が結んでいる場合, それを多重辺と呼ぶ.

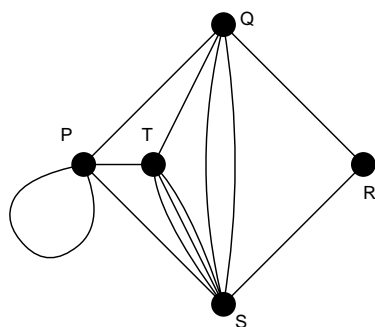


図 3: この図において, 辺 $\overline{TS}, \overline{QS}$ は多重辺であり, 点 P には一つのループがある.

ループ (loop) … 任意の点 P から P 自身へ戻る辺

⇒ 単純グラフ (simple graph) … 多重辺やループを含まないグラフ

1.2.2 有向グラフ

有向グラフ (directed graph : digraph と呼ばれることが多い) … 辺に向きが与えられたグラフ

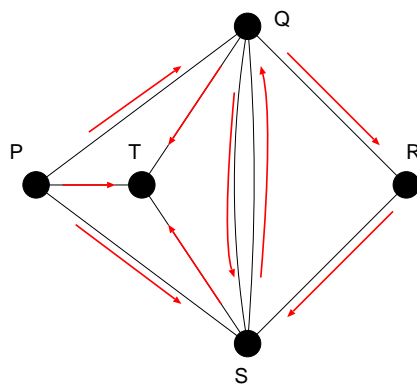


図 4: 有向グラフの一例. 各辺に向きを持たせることにより, 任意の2点間の関係性 (例えば, P は Q に好意を持っている等) を明示させることができる.

歩道 (walk) … 連結した辺の列.

道 (path) … どの点も高々一度しか現れない歩道.

閉路 (cycle) … 図 2 の右側の $Q \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow Q$ のような道.

有向グラフを用いた例としては 演習問題 1 2 を参照.

1.2.3 連結グラフと非連結グラフ

「全部つながっているか」「つながっていないか」でグラフを分類することもできる。

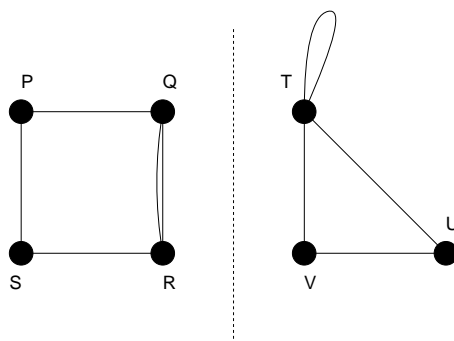


図 5: 非連結グラフの一例. 成分数は 2 である.

連結グラフ (connected graph) … どの 2 つの点も道で結ばれているグラフ.

非連結グラフ (disconnected graph) … 連結グラフではないグラフ (図 5 参照).

非連結グラフを構成する各連結グラフを成分 (component) と呼ぶ. 図 5 の例でみるならば, 「この非連結グラフは 2 つの成分を持つ」ということになる.

1.2.4 オイラー・グラフとハミルトン・グラフ

グラフにはその考案者の名前が付けられたものも多い. ここに出てくる 2 つのグラフ: オイラー・グラフ, ハミルトン・グラフはそれらの中で最も有名なものである.

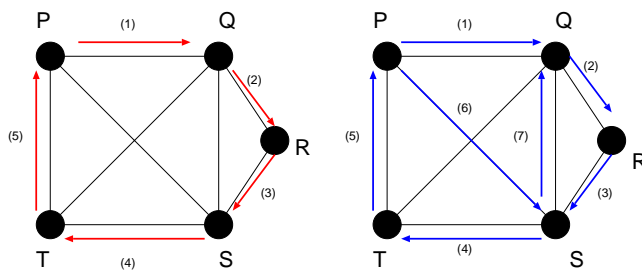


図 6: この図はハミルトン・グラフではあるが (左図), オイラー・グラフではない (右図).

オイラー・グラフ (Eulerian graph)

… 全ての辺をちょうど 1 回ずつ通って出発点に戻る歩道を含むグラフ.

ハミルトン・グラフ (Hamiltonian graph)

… 全ての点をちょうど 1 回ずつ通って出発点に戻る歩道を含むグラフ.

連結グラフの点の数が多い場合, そのグラフがオイラー・グラフか, ハミルトン・グラフであるか, を実際に該当する歩道を見つけることによって判定するのは容易なことではない. このようなとき, 与えられた

連結グラフがオイラー・グラフであるための条件, ハミルトン・グラフであるための条件 (これは十分条件) が知られており, それぞれ Euler の定理 (教科書 : p.43), Ore (オーレ) の定理 (教科書 : p.49) としてまとめられている. これらを用いることにより, 与えられた連結グラフのオイラー性, ハミルトン性を判定することができるようになる. これらは後に詳しく学ぶ.

1.2.5 木

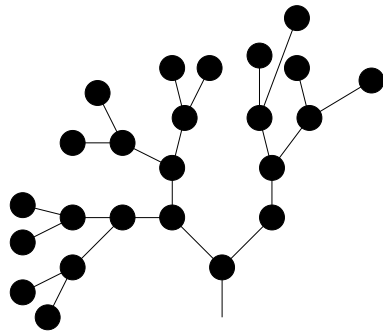


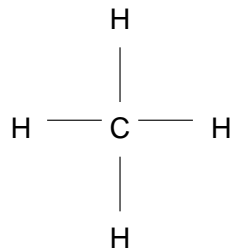
図 7: 木の一例.

木 (tree) … どの 2 点の間にも道が 1 本しかない連結グラフ (図 7 参照).

ワークステーションのファイルシステム, 生物進化の系統図などは木構造を持つ.

演習問題 1

1. 化学式 C_5H_{12} を持つ分子にはいくつかの構造の異なる分子が存在する(「構造異性体」). これらの分子を全て挙げ, 図 (CH_4) に従って, それぞれに対応するグラフを描け.



2. John は Joan が好きで, Jean は Jane が好きで, Joe は Jane と Joan が好きで, Jean と Joan は互いに好きである. John, Joan, Jean, Jane 及び Joe の間の関係を説明する有向グラフを描け.

3. a,b,c,d,e,f の 6 チームでホッケーの試合をすることになった. 各チームの行った試合数は

チーム名	a	b	c	d	e	f
試合数	2	2	4	4	3	1

であった. このとき, 考え得る試合の組み合わせをグラフで表し, それらを全て描け.

(注 1) 締め切りは次回の講義開始前. レポート用紙には氏名, 学籍番号を必ず書くこと.

(注 2) レポートは次回に返却できない場合があります. 自分の作成したレポートをそれ以後(レポートが返却されるまで)の自習に使う者は, 必ずレポートのコピーをとってから提出してください.