



# HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	2004年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一; Inoue, Jun-ichi
Description	当講義資料は著者のホームページ <a href="http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/">http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/</a> からダウンロードできます。 <a href="http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/">http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/</a>
Issue Date	2004
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/371">https://hdl.handle.net/2115/371</a>
Rights(URL)	<a href="https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/">https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/</a>
Type	learning object
File Information	GraphTheory04_12.pdf, 第12回講義ノート



# グラフ理論 配布資料 #12 (最終回)

教科書 pp. 162 ~ 190 の内容

担当：井上 純一 (情報エレクトロニクス系棟 8-13)

平成 16 年 9 月 6 日 (補講)

## 演習問題 11 の解答例

1.  $\{11, 12, 21, 22\}$  において,  $j = k$  が成り立つときのみ, 点  $ij$  と  $kl$  が弧で結ばれることを考えると, 各点から他点へ描くことのできる弧は次のようになる.

$$\begin{aligned} 11 &\rightarrow 12, & 12 &\rightarrow \begin{cases} 21 \\ 22 \end{cases} \\ 21 &\rightarrow \begin{cases} 11 \\ 12 \end{cases}, & 22 &\rightarrow 21 \end{aligned}$$

のようになり, これらの関係をグラフで表すと図 1 のようになる. この図 1 から, このグラフは連結有向

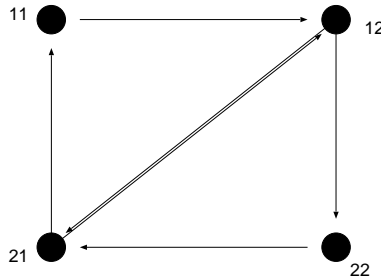


図 1:  $\{11, 12, 21, 22\}$  において, 「 $j = k$  が成り立つときのみ, 点  $ij$  と  $kl$  が弧で結ばれる」規則で出来上がる有向グラフ.

グラフ (これを  $D$  と名付けよう) であり, この連結有向グラフ  $D$  がオイラー・グラフであるための必要十分条件は,  $D$  の各点で入次数と出次数が等しい, つまり,  $D$  の任意の点  $v$  において,  $\text{outdeg}(v) = \text{indeg}(v)$  が成り立つことであるから (前回の定理 23.1 を参照のこと), 図のグラフにおいてこれを調べると

$$\begin{aligned} \text{outdeg}(11) &= 1 = \text{indeg}(11) \\ \text{outdeg}(12) &= 2 = \text{indeg}(12) \\ \text{outdeg}(21) &= 2 = \text{indeg}(21) \\ \text{outdeg}(22) &= 1 = \text{indeg}(22) \end{aligned}$$

となり, 確かにこの条件を満たしている. 従って, オイラー小道が存在し, それは,  $11 \rightarrow 12 \rightarrow 21 \rightarrow 12 \rightarrow 22 \rightarrow 21 \rightarrow 11$  である.

2. 問題文に与えられた誘導に従う.

- (1) 遷移確率が問題文の  $P$  で与えられるグラフを描くと図 2 のようになる. ただし, 各弧に付された数字は各状態間の遷移確率を表す.

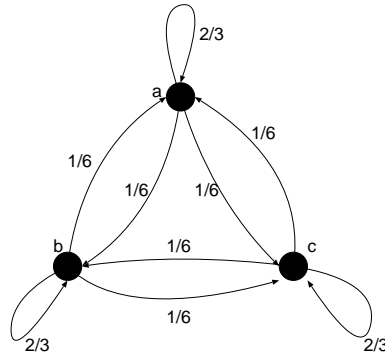


図 2: 遷移確率が  $P$  で与えられる 3 状態  $a, b, c$  間遷移の様子を表すグラフ.

- (2)(3) 時刻  $t = n, n + 1$  における状態ベクトル:  $\mathbf{x}^n \equiv (p_a(n), p_b(n), p_c(n))$ ,  $\mathbf{x}^{n+1} \equiv (p_a(n+1), p_b(n+1), p_c(n+1))$  間には遷移確率  $P$  を介して

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n P \quad (1)$$

なる関係, すなわち,

$$(p_a(n+1), p_b(n+1), p_c(n+1)) = (p_a(n), p_b(n), p_c(n)) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad (2)$$

従って

$$p_a(n+1) = \frac{2}{3} p_a(n) + \frac{1}{6} p_b(n) + \frac{1}{6} p_c(n) \quad (3)$$

$$p_b(n+1) = \frac{1}{6} p_a(n) + \frac{2}{3} p_b(n) + \frac{1}{6} p_c(n) \quad (4)$$

$$p_c(n+1) = \frac{1}{6} p_a(n) + \frac{1}{6} p_b(n) + \frac{2}{3} p_c(n) \quad (5)$$

が成り立つ. 後は, これらの確率に関する連立漸化式を解けばよい. どのような解き方でも良いのだが, 各時刻  $n$  での確率の規格化条件:  $p_a(n) + p_b(n) + p_c(n) = 1$  (各時刻で酔っ払いは  $a, b, c$  のいずれかには必ず居る) から,  $p_c(n) = 1 - p_a(n) - p_b(n)$  を用いて, 連立漸化式を書き直すと

$$p_a(n+1) = \frac{1}{2} p_a(n) + \frac{1}{6} \quad (6)$$

$$p_b(n+1) = \frac{1}{2} p_b(n) + \frac{1}{6} \quad (7)$$

あるいは

$$\begin{pmatrix} p_a(n) \\ p_b(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} p_a(0) \\ p_b(0) \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad (8)$$

となる. よって, 例えば  $p_a(n)$  の一般項は

$$p_a(n) = \frac{1}{2^n} p_a(0) + \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n} p_a(0) + \frac{1}{6} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} p_a(0) + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \quad (9)$$

となる. 従って, 当然,  $p_b(n)$  も

$$p_b(n) = \frac{1}{2^n} p_b(0) + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \quad (10)$$

であり, このとき  $p_c(n)$  は

$$p_c(n) = 1 - \frac{1}{2^n} (p_a(n) + p_b(n)) - \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \quad (11)$$

となる.

従って, あとは「この酔っ払いは時刻  $t = 0$  で  $a$  に居た」という初期条件:  $p_a(0) = 1, p_b(0) = 0, p_c(0) = 0$  を上に得られた一般項に代入して

$$p_a(n) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \quad (12)$$

$$p_b(n) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \quad (13)$$

$$p_c(n) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \quad (14)$$

が得られる.

### レポート問題 #10 に関するコメント

問題 (1)(2) で, 解答例に示したように, 完全二部グラフ  $K_{2,s}$  の点  $a, b$  が同色, 異色で場合分けして彩色多項式を求める際に, この場合分けをきちんとせずに, 「同色の場合だけ」, あるいは, 「異色の場合だけ」に対して彩色多項式を作ってしまった人が十数名いました. 間違いですので, もう一度解答例を読んでみてください. なお, 図 3 のように,  $K_{s,2}$  の辺  $e$  を削除, 及び, 縮約すると,  $K_{s,s-1}$  のように, 「中間層」<sup>1</sup> の点が一

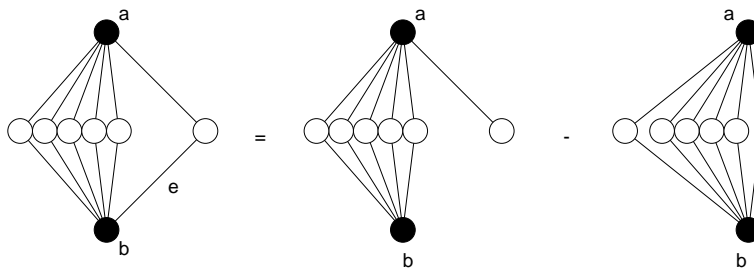


図 3: 完全二部グラフ  $K_{2,s}$  を辺  $e$  に関して分解する.

つ減少した完全二部グラフから派生した形のグラフが得られますが, この点に着目すれば  $P_{K_{2,s}}(k)$  の  $s$  に関する漸化式が得られるのではないが, また, その漸化式を解けば, 解答例に示した方法とは異なる指針で

<sup>1</sup> グラフ理論の用語としては「中間層」という表現はないが, ここで中間層と言った場合には図 3 の点  $a, b$  が接続する点 (白丸) からなる「層」を表すことにする.

所望の彩色多項式： $P_{K_{2,s}}(k) = k(k-1)^s + k(k-1)(k-2)^s$  が得られるのではないかと、いう考えに基づいて計算を推し進めることもできます。ここでは別解としてその解法を示しておくことにしましょう。

まず、完全二部グラフは図 3 のように分解できますから、 $P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G \setminus e}(k)$  を用いることにより、

$$P_{K_{2,s}}(k) = (k-1)P_{K_{2,s-1}}(k) - k(k-1)(k-2)^{s-1} \quad (15)$$

が成り立ちます。ここで、右辺第 1 項は、 $K_{2,s}$  から辺  $e$  を削除したグラフの点彩色では、中間層の点数が  $s-1$  になった完全二部グラフの彩色数に、点  $a$  とは異なる色数  $k-1$  をかけたもので与えられます。一方、右辺の第 2 項は、 $a, b$  が同色の場合に中間層が  $s-1$  個の点を含む完全二部グラフの彩色数ですから、 $k(k-1)(k-2)^{s-1}$  となったわけです。

さて、問題を見やすくするために、上式で  $P_{K_{2,s}}(k) \equiv p_s$  と書くことにすれば

$$p_s = (k-1)p_{s-1} - k(k-1)(k-2)^{s-1} \quad (16)$$

が得られます。従って、後はこの漸化式を解けば良いわけです。

この漸化式の解き方はいろいろあると思いますが、感じをつかむために、この漸化式 (16) の右辺を書き換え、 $p_{s-1}$  の添え字の次数を段階的に落として行ってみると

$$\begin{aligned} p_s &= (k-1)^2 p_{s-2} - k(k-1)^2(k-2)^{s-2} - k(k-1)(k-2)^{s-1} \\ &= (k-1)^3 p_{s-3} - k(k-1)^3(k-2)^{s-3} - k(k-1)^2(k-2)^{s-2} - k(k-1)(k-2)^{s-1} \\ &\dots \dots \\ &= (k-1)^{s-2} p_2 - k \sum_{l=1}^{s-2} (k-1)^l (k-2)^{s-l} \end{aligned} \quad (17)$$

つまり

$$p_s = (k-1)^{s-2} p_2 - k(k-2)^s \sum_{l=1}^{s-2} \left( \frac{k-1}{k-2} \right)^l \quad (18)$$

が得られます。この右辺第 2 項は公比  $(k-1)/(k-2)$  の等比数列の和ですから、 $p_s$  は  $s$ 、及び、 $k$  の関数として簡単に書き下すことができ、若干面倒な計算をすれば

$$\begin{aligned} p_s &= (k-1)^{s-2} p_2 - k(k-2)^s \frac{\left( \frac{k-1}{k-2} \right) \left\{ 1 - \left( \frac{k-1}{k-2} \right)^{s-2} \right\}}{1 - \frac{k-1}{k-2}} \\ &= (k-1)^{s-2} p_2 + k(k-1)(k-2)^s - k(k-1)^{s-1}(k-2)^2 \end{aligned} \quad (19)$$

となりますが、 $p_2 = P_{K_{2,2}}(k) = k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2)$  なので、これを代入して

$$\begin{aligned} p_s = P_{K_{2,s}}(k) &= k(k-1)^{s+1} - k(k-1)^{s-1}(k-2) + k(k-1)(k-2)^s - k(k-1)^{s-1}(k-2)^2 \\ &= k(k-1)^s + k(k-1)(k-2)^s \end{aligned} \quad (20)$$

が得られることとなります。

ここで示したように彩色多項式の求め方は様々あります。関係式： $P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G \setminus e}(k)$  を用いてグラフの辺数を段階的に落として行き、小さなサイズのグラフの多項式の和 (差) として求めるのも一つの手です。しかし、この関係式で展開して行けば項数も倍々で増えていくので、元々のグラフのサイズが非常に大きいものに対して多項式を求める際には計算ミスに注意しなければなりません。また、上記で

$P_{K_{2,2}}(k)$  を既知として使ったように、既に得られている結果を使うことも重要になります。さらに、関係式  $P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G \setminus e}(k)$  を一回施すということは、元々のグラフと点及び辺数が一つ少ないグラフとの間の関係を知ることで、このグラフ間の関係 – 漸化式 – を解くことにより多項式を求めることも有用です。

## 13 マッチング、結婚、Menger の定理

最終回である今回の講義では、マッチング、ネットワークフローなど、我々が日常で出くわす具体的な諸問題に取り組む際に特に重要となる概念・方法を学ぶ。

### 13.1 Hall の結婚定理

ここで扱う結婚問題 (marriage problem) とは次のような問題である。

#### 結婚問題

女性の有限集合があり、各女性は何人かの男性と知り合いであるとする。全ての女性が知り合いの男性と結婚ができるようにカップルが組めるためにはどのような条件が必要であるか？

ここではいきなり一般論から入るのではなく、次の表で与えられる具体例をグラフを用いて考察することからはじめよう。この表では女性集合を  $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ 、男性集合を  $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$  とする。

女性	女性と知り合いの男性
$g_1$	$b_1, b_4, b_5$
$g_2$	$b_1$
$g_3$	$b_2, b_3, b_4$
$g_4$	$b_2, b_4$

これをグラフで描いたものが図 4 である。さて、二部グラフ  $G(V_1, V_2)$  における、点  $V_1$  から点  $V_2$  への完全

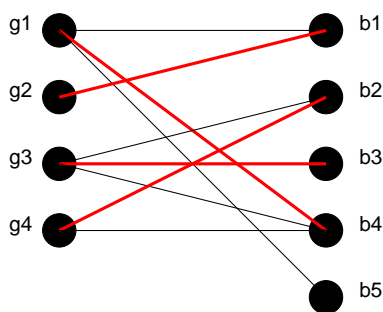


図 4: 女性とその知り合いの男性を表すグラフ。

マッチングを「 $V_1$  と  $V_2$  の部分集合の間の一対一対応で、かつ、対応する点は辺で結ばれているもの」であると定義すれば、上にあげた結婚問題は次のように言い直すことができる。

結婚問題の「完全マッチング」を用いた言い換え

$G = G(V_1, V_2)$  が二部グラフのとき、 $G$  において  $V_1$  から  $V_2$  への完全マッチングがあるのはどのようなときか？

この問題の答えは次の定理によって与えられる。

**Hall の定理**

結婚問題に解があるための必要十分条件は、どの  $k$  人の女性も合わせて  $k$  人以上の男性と知り合いであることである。

(証明)

(必要性) :  $k$  人の女性の誰かと知り合いの男性が合計  $k$  人未満であれば女性が余ってしまうので明らか。

(十分性) : 帰納法により証明する。

「女性が  $m$  人未満であれば定理が成立する」と仮定する。このとき、 $m = 1$  であれば、 $k = 1$  人の女性は 1 人の男性と知り合いなので、その男性と結婚すれば良い。従って、成立。 $m$  人の女性がいる場合には次のような 2 つの場合に分けて考える。

(i)  $k < m$  なる、どの  $k$  人の女性をとっても、合わせて  $k + 1$  人の男性と知り合いのとき  
女性 1 人を選び、知り合いの任意の男性と結婚させれば、残り  $m - 1$  人 ( $m - 1 < m$ ) の女性は合わせて  $m$  人の男性と知り合いである。従って、帰納法の仮定から証明終わり。

(ii)  $k (< m)$  人の女性が合わせてちょうど  $k$  人の男性と知り合いのとき  
帰納法により、 $k$  人の女性は結婚可能。残りは  $m - k$  人である。 $(m - k)$  人の中のどの  $h$  人 ( $h < m - k$ ) も残りの  $h$  人以上の男性と知り合いである ( $(h + k)$  人の女性は  $(h + k)$  人以上の男性と知り合いであるべきなので)。従って、 $m - k$  人の女性に対して条件成立。

以上により証明終わり。

## 13.2 横断理論

まず、次のように定義しておこう。

$E$  : 空でない有限集合。

$F = (S_1, S_2, \dots, S_m)$  :  $E$  の空でない部分集合の族。

$F$  の横断 : 各集合  $S_i$  から 1 つ選んだ  $E$  の相異なる  $m$  個の元の集合。

(例)

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $S_1 = S_2 = \{1, 2\}$ ,  $S_3 = S_4 = \{2, 3\}$ ,  $S_5 = \{1, 4, 5, 6\}$  とする。このとき、族  $F = (S_1, S_2, \dots, S_5)$  に横断は無い。一方、 $F' = (S_1, S_2, S_3, S_5)$  には  $\{1, 2, 3, 4\}$  の横断 (部分横断) がある。

### 13.3 横断と結婚問題, 及び, Hall の定理との関係

男性の集合を  $E = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  とする.  
 一方, 女性の集合を  $F = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5) = (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5)$  とし,

$$\begin{aligned} S_1 &= \{1, 2\} \\ S_2 &= \{1, 2\} \\ S_3 &= \{2, 3\} \\ S_4 &= \{2, 3\} \\ S_5 &= \{1, 4, 5, 6\} \end{aligned}$$

とすれば (図 5 も合わせて参照), 与えられた集合族  $F$  が横断を持つための必要十分条件が Hall の定理である.

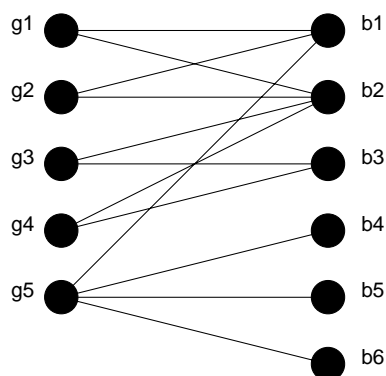


図 5: ここで横断と Hall の定理の関係を考える, 女性とその知り合いの男性を表すグラフ.

### 13.4 Hall の定理の応用例 : ラテン方阵

#### ラテン長方形

$m \times n$  ( $m \leq n$ ) ラテン長方形 : 次の性質を持つ  $m \times n$  行列  $M$

- (i) 任意の行列要素は  $1 \leq m_{ij} \leq n$  を満たす.
- (ii) どの行, 及び, どの列にも同じ要素はない.

(例)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (21)$$

はラテン長方形である.

$m = n$  であるようなラテン長方形をラテン方阵と呼ぶが, ラテン長方形からラテン方阵への拡大可能性は次の定理で与えられる.

### 定理 27.1

$M$  は  $m < n$  からなる  $m \times n$  ラテン長方形であるとする. このとき,  $M$  に  $n - m$  本の新しい行を付け加えてラテン方陣に拡張することができる.

(具体的な作り方)

$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  を与えられたラテン長方形  $M$  の行要素の集合であるとする.  $F = (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5)$  とし,  $M$  の第  $i$  列に現れない  $E$  の要素の集合が  $S_i$  であるとする. (21) 式で与えられたラテン長方形を例にとれば  $S_1, S_2, \dots$ , は

$$S_1 = \{4, 5\}$$

$$S_2 = \{1, 3\}$$

$$S_3 = \{4, 5\}$$

$$S_4 = \{2, 3\}$$

$$S_5 = \{1, 2\}$$

となり,  $F$  から横断を見つけて  $(4, 3, 5, 2, 1), (5, 1, 4, 3, 2)$  が得られるので, これをラテン長方形に付け加えて

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ 5 & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{bmatrix} \quad (22)$$

となる (付け加えた部分は太字で表されている).

## 13.5 Menger の定理

まずは各種定義から

辺素な道 (edge-disjoint path) : 共通な辺を持たない  $v$  から  $w$  への道.

点素な道 (vertex-disjoint path) : 共通な点を持たない  $v$  から  $w$  への道.

$vw$ -非連結化集合 : グラフ  $G$  の辺集合  $E$  で,  $v$  から  $w$  への任意の道は必ず  $E$  の辺を含むもの.

(例) : 図 6 において  $E_1 = \{ps, qs, ty, tz\}$ ,  $E_2 = \{uw, xw, yw, zw\}$ .

$vw$ -分離集合 :  $G$  の点の集合  $V$  で,  $v$  から  $w$  への任意の道は必ず  $V$  の点を通るという性質を持つ  $V$ .

(例) : 図 6 において  $V_1 = \{s, t\}$ ,  $V_2 = \{p, q, y, z\}$ .

「 $v$  から  $w$  への辺素な道の本数は何本か？」という問いに対する答え Menger の定理 I

### Menger の定理 I

連結グラフ  $G$  の異なる 2 点  $v$  と  $w$  を結ぶ辺素な道数の最大値は,  $vw$ -非連結化集合の辺数の最小値に等しい.

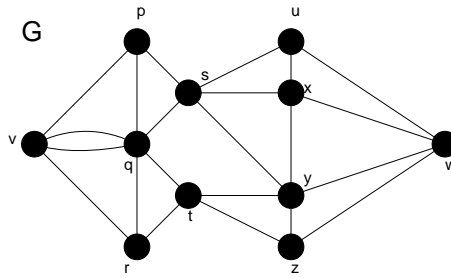


図 6: 点素な道が 2 本あるグラフ G. (それらの道は  $v \rightarrow p \rightarrow u \rightarrow w$ , 及び  $v \rightarrow r \rightarrow t \rightarrow y \rightarrow w$ )

「 $v$  から  $w$  への点素な道の本数は何本か？」という問いに対する答え Menger の定理 II

### Menger の定理 II

連結グラフ  $G$  の隣接していない 2 点  $v$  と  $w$  を結ぶ点素な道数の最大値は、 $vw$ -分離集合の辺数の最小値に等しい。

(例)

図 7 のグラフ  $G$  に対して、 $vw$ -非連結化集合は  $E_1 = \{vp, vq\}$ ,  $E_2 = \{pr, qr, qs\}$ ,  $E_3 = \{rw, sw\}$  であるから、辺素な道数の最大値は 2 である。一方、 $vw$ -分離集合は  $V_1 = \{p, q\}$ ,  $V_2 = \{r, q\}$ ,  $V_3 = \{r, s\}$  であるから、点素な道数の最大値は 2 である。

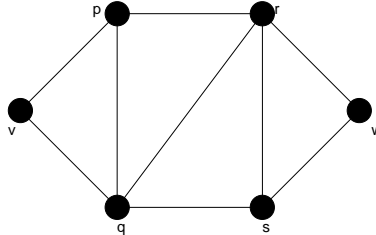


図 7: Menger の定理を確認する例として用いるグラフ G.

## 14 ネットワークフロー

図 8 のような有向グラフを考える。点  $v$  は「会社」であり、点  $w$  は「販売店」とする。各辺に記された数字は、そのルート (弧) を通過できる荷物の最大量 (例えば「箱の個数」と言い換えても良い) であるとする。このとき、我々の問題は

### 問題

各ルートの許容量を超えないようにして会社から販売店に送ることのできる箱の個数はいくつか？

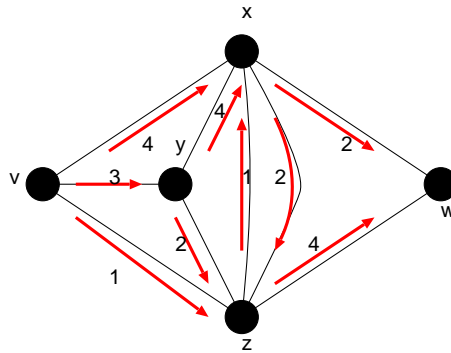


図 8: ここで考える有向グラフ.  $v$  は「会社」で  $w$  が「販売店」を表すものとする. 各弧に記された数字は「容量」である.

この問題に答える前にいくつかの定義をしておこう.

ネットワーク  $N$ : 重みつき有向グラフ.

容量  $\Psi(a)$ : 各弧  $a$  に割り当てられた非負実数.

$\text{outdeg}(x)$ :  $xz$  の形をした弧の容量の総和.

$\text{indeg}(x)$ :  $zx$  の形をした弧の容量の総和<sup>2</sup>.

従って, ネットワークの全点についての出次数の総和は入次数の総和に等しい.

**フロー (flow)**

各弧  $a$  に対し非負実数  $\phi(a)$  を割り当てる関数  $\phi$  のことであり, 次の 2 つの条件を満たさなければならない.

- (i) 各弧  $a$  に対して  $\phi(a) \leq \Psi(a)$ .
- (ii)  $v$  と  $w$  以外の各点において, 出次数と入次数が等しい.

(例)

握手有向補題により, 図 9 において

$$\begin{aligned}
 (\text{入口 } v \text{ から出る弧のフローの総和}) &= (\text{出口 } w \text{ へ入る弧のフローの総和}) \\
 &= \text{フローの値} = 6 \quad (\text{図 9 の場合には最大フローになっている})
 \end{aligned}$$

**カット (cut)**: 有向グラフ  $D$  の  $vw$ -非連結化集合.

カットの容量: カットの弧の容量の総和.

図 8 のグラフにおいて, 最小カット (容量ができるだけ小さいカット) は  $\{xw, xz, yz, vz\}$ ,  $\{xw, zw\}$  であり,

<sup>2</sup> 以前,  $\text{indeg}$ ,  $\text{outdeg}$  をそれぞれ入次数, 出次数として定義したが, ここでは辺に記された数字による「重み付き」の入次数, 出次数であることに注意されたい.

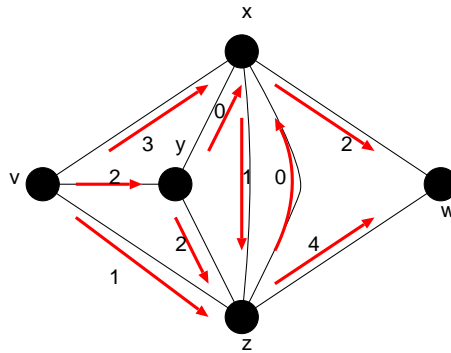


図 9: 図 8 の各弧に記された容量を超えないように、かつ、 $v, w$  を除く各点において入次数と出次数を等しくするように各弧に数字を振るとこうなる。

その容量は 6 である。

**最大フロー-最小カット定理**  
 任意のネットワークにおいて、最大フローの値は最小カットの容量に等しい。

証明は略。各自教科書の p. 186-187 を読んでおいてください<sup>3</sup>。

ここで例として扱った図 8, 図 9 に関しては、上記の議論から、(最大フロー) = (最小カット) = 6 となっており、この定理が成り立っていることが確かめられる。

### 14.1 最大フローの逐次構成法

最後に最大フローを具体的に求めるためのアルゴリズムを一つ挙げておく。

ネットワークにおいて入口  $v$  と出口  $w$  を結ぶ道  $p$  を考え、この道を点列:  $v, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k, w$  で特定する (図 10 参照)。また、この道を辺で特定する際には辺の向きをも考慮し、 $e_i = (v_{i-1}, v_i)$  のとき、 $e_i$  は点  $v_i, v_{i-1}$  をこの順に矢印で結ぶ。この場合を道  $p$  において  $e_i$  は正順であるという。一方、 $e_i = (v_i, v_{i-1})$  のときには  $e_i$  が点  $v_{i-1}, v_i$  をこの順に矢印で結ぶことになるが、この場合を逆順と呼ぶ。図 10 の例で言えば、 $e_1$  が正順、 $e_2$  が逆順ということになる。

さて、このとき各辺  $e_i$  に対し、余剰 (residual) と呼ばれる量 (注目する辺に沿って着目する方向へまだ増やすことのできるフロー) を各辺の容量  $\Psi(e_i)$ 、及び、現時点でのフロー  $\phi(e_i)$  を用いて次のように定義する。

$$g(e_i) = \begin{cases} \Psi(e_i) - \phi(e_i) & (e_i \text{ が正順}) \\ \phi(e_i) & (e_i \text{ が逆順}) \end{cases} \quad (23)$$

<sup>3</sup> この定理により与えられた問題の最大フローを求める代わりに最小カットを見つけることでも問題を解くことができる。ある問題が与えられたとき、最大フローを求めた方が簡単なのか、あるいは逆に最小カットを求めた方が楽なのか、は微妙な問題であろう。手間はそれぞれを求める際に用いるアルゴリズムに依存するであろうし、用いたアルゴリズムに対して、グラフのサイズ (点、弧の数) とともにその手間がどのように振舞うか — 計算量 — を調べなければほんとの優劣はわからないと思われる (おそらく、この手の計算量評価は講義「データ構造とアルゴリズム」で既習であることと察する)。しかし、2 通りの基準で解が求まるということは、片方の基準 (方法) で求めた解の検算に他方の基準を用いることができる (例えば、今回の「演習問題 12」でやるように) ということである。大きなサイズの問題では例え解が得られたとしても、なかなかその解に確信がもてない場合が多いので、検算ができるということは大変ありがたいことであり、この定理を知っておくことは、この意味でも重要なのである。

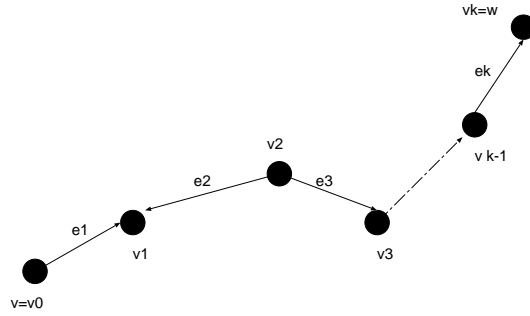


図 10: ネットワークにおける一つの道  $p$ . この道において,  $e_1$  は「正順」であり,  $e_2$  は逆順である.

次いでこの  $g(e_i)$  を用いて各道  $p$  に対しての余裕  $g(p)$  を

$$g(p) = \min_{1 \leq i \leq k} g(e_i) \quad (24)$$

で定義する. そこで各辺に対して規則:

$$\phi(e_i) \leftarrow \phi(e_i) + g(p) \quad (e_i \text{ が正順}) \quad (25)$$

$$\phi(e_i) \leftarrow \phi(e_i) - g(p) \quad (e_i \text{ が逆順}) \quad (26)$$

適用することにより, 現時点でのフロー  $\phi$  を  $g(p)$  だけ大きな新しいフローに変更することができる. つまり,  $e_i$  が正順であるのであれば, 辺  $e_i$  の容量と現時点でのフローの道  $p$  に関する最小値  $g(p)$  の分だけ各辺のフローを増加することができるし, 逆に, 辺  $e_i$  が逆順であれば, 現在の向きのフローの最小値  $g(p)$  の分だけ, 各辺のフローの値から差し引くことにより, 所望の向きへのフローを増加させることができる.

以上をまとめると次のようになる.

#### 最大フロー逐次構成アルゴリズム

1. 全ての辺  $e$  に対して  $\phi(e) = 0$  と置く.
2.  $v$  から  $w$  への道  $p$  で正の余裕  $g(p) > 0$  を持つものを探し, なければ終了. あれば次の 3. へ.
3. 規則 (25)(26) に従って現在のフロー  $\phi$  を変更し, 2. へ

## 14.2 最大マッチングへの適用

ここで学んだ最大フローの逐次構成法を用いて, 前出の最大マッチングを求めることができる. ここではそれを簡単に述べておきたい. 図 11 のようなネットワークを考える. ここで求めるマッチングは集合  $U$  と  $V$  の間の最大マッチングである.

つまり, 入口  $v$  と集合  $U$  に属する点を結ぶ辺の全てに容量 1 を, マッチングをとるべき集合  $U$  と集合  $V$  を結ぶ全ての辺に容量  $\infty$  を, そして最後に集合  $V$  と出口  $w$  を結ぶ全ての辺に容量 1 を割り振り, このネットワークに対して逐次構成法を適用する. 最終的に得られるマッチングが最大であること, 及び, このネットワークで逐次構成法を用いることで所望の最大マッチングが得られる理由は各自が考えてみる.

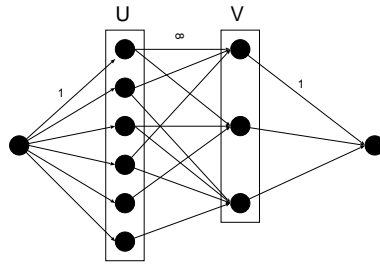


図 11: U と V の間の最大マッチングを求めるためのネットワーク.

### 演習問題 12

図 12 のような有向グラフに関して以下の問いに答えよ.

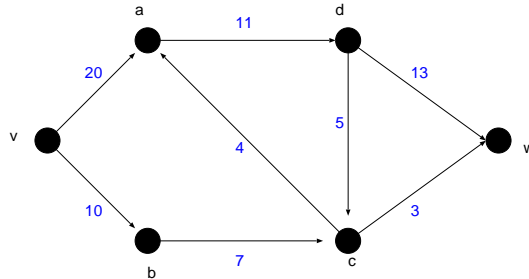


図 12: ここで考えるネットワーク.

- (1) 逐次構成法を用いて図 12 の入口  $v$  から出口  $w$  へ至るネットワークの最大フローを求めよ.
- (2) 図 12 のネットワークにおける最小カットを求め, (1) の結果と比較することにより, 最大フロー最小カット定理が成立しているか否かを確認せよ.

# 注意: 今回のレポート締め切りを 9 月 20 日 (月) 正午までとします. 提出先は情報エレクトロニクス系棟 8-13 のレポートボックスまで.

## 期末試験等に関して (重要)

試験等に関する注意を以下に書いておきます。

- 試験は9月13日(月)第3講時 工学部本館 B21 講義室にて行う。持ち込み不可。
- 試験開始後30分間は退室禁止。また、試験30分経過後の入室も禁止(遅刻しないように)。
- 試験問題は大問で4題。制限時間90分。解答例 & 配点表を終了後に配布するのでもらって帰るように。
- 試験の答案は返却しない。自分の採点済答案をどうしても見たい人は個別に来てくだされば見せて差し上げます。
- 成績不振者への救済措置に関して

グラフ理論のレポートの提出状況が悪く、かつ、期末試験の成績も思わしくなく、結果として総合成績が60点を下回ってしまった受講者のために追加課題を与えます。追加課題は教科書の章末問題で、当講義で取りあげず、かつ、巻末に解答例の載っていない問題を10問選び、それらを解き、レポートとして提出することです。注意していただきたいのは

- この課題レポートを提出したとしても、成績は合格点ぎりぎりの60点である。なお、該当者以外の提出も歓迎はするが、加点の対象とはしない。
- 単に答えを書くだけでなく、解答へ至るプロセスもしっかりと書くこと。
- この追加レポートの該当者を掲示/アナウンスすることはしないので、各自が自己採点に基づき提出するか否かの判断すること。少しでも「危ないかな」と感じたら提出するのが賢明だと思う(勉強にもなる)。ちなみに、今までのレポート提出状況は

[http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j\\_inoue/graph2004/graph2004.html](http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/graph2004/graph2004.html)

から確認できる。

- 締め切りは9月20日(月)正午まで。提出先は情報エレクトロニクス系棟8-13のレポートボックス。この期日を過ぎたレポートは一切受け取らないので注意するように。

なお、今回(第12回)の演習問題の解答例も9/20以降に上記サイトに掲載する。ただし、こちらで印刷したものを配布するということはないので、必要な者は各自が計算室等からダウンロードし、必要であれば印刷するように。