グラフ理論 演習問題 #12 (最終回) 解答例

担当：井上 純一 (情報エレクトロニクス系棟 8-13)

平成 16 年 9 月 21 日

演習問題 12 の解答例

以下の解答では $\phi(\mathsf{x},\mathsf{y})$, $\Psi(\mathsf{x},\mathsf{y})$ をそれぞれ辺 xy のフロー, 容量を表すものとする.

(1) まずは道 p_1 として問題文中の図における $\mathsf{v} \to \mathsf{a} \to \mathsf{d} \to \mathsf{w}$ を選ぶ. 逐次構成法のアルゴリズムより, 最初のステップでは全ての辺のフローをゼロに設定するので

$$\phi(\mathsf{v},\mathsf{a}) = \phi(\mathsf{a},\mathsf{d}) = \phi(\mathsf{d},\mathsf{w}) = 0 \tag{1}$$

とする. このとき, p_1 上の全ての辺は正順であり

$$\begin{aligned} g(\mathsf{v},\mathsf{a}) &= \Psi(\mathsf{v},\mathsf{a}) - \phi(\mathsf{v},\mathsf{a}) = 20 - 0 = 20 \\ g(\mathsf{a},\mathsf{d}) &= \Psi(\mathsf{a},\mathsf{d}) - \phi(\mathsf{a},\mathsf{d}) = 11 - 0 = 11 \\ g(\mathsf{d},\mathsf{w}) &= \Psi(\mathsf{d},\mathsf{w}) - \phi(\mathsf{d},\mathsf{w}) = 13 - 0 = 13 \end{aligned}$$

なので, 道 p_1 の余裕は

$$g(p_1) = \min_{k=(\mathsf{v},\mathsf{a}),(\mathsf{a},\mathsf{d}),(\mathsf{d},\mathsf{w})} g(k) = 11 \tag{2}$$

となる. 従って, 次ステップでの各辺のフローは (1)(2) より

$$\begin{aligned} \phi(\mathsf{v},\mathsf{a}) &= 0 + g(p_1) = 11 \\ \phi(\mathsf{a},\mathsf{d}) &= 0 + g(p_1) = 11 \\ \phi(\mathsf{d},\mathsf{w}) &= 0 + g(p_1) = 11 \end{aligned}$$

である.

次の道 p_2 として $\mathsf{v} \to \mathsf{b} \to \mathsf{c} \to \mathsf{w}$ を選ぶ. この p_2 上の全ての辺のフローも初めはゼロに設定されているべきであるから

$$\phi(\mathsf{v},\mathsf{b}) = \phi(\mathsf{b},\mathsf{c}) = \phi(\mathsf{c},\mathsf{w}) = 0 \tag{3}$$

である. これらの辺は全て正順であるので

$$\begin{aligned} g(\mathsf{v},\mathsf{b}) &= \Psi(\mathsf{v},\mathsf{b}) - \phi(\mathsf{v},\mathsf{b}) = 10 - 0 = 10 \\ g(\mathsf{b},\mathsf{c}) &= \Psi(\mathsf{b},\mathsf{c}) - \phi(\mathsf{b},\mathsf{c}) = 7 - 0 = 7 \\ g(\mathsf{c},\mathsf{w}) &= \Psi(\mathsf{c},\mathsf{w}) - \phi(\mathsf{c},\mathsf{w}) = 3 - 0 = 3 \end{aligned}$$

となり, 従って道 p_2 の余裕は

$$g(p_2) = \min_{k=(\mathsf{v},\mathsf{b}),(\mathsf{b},\mathsf{c}),(\mathsf{c},\mathsf{w})} g(k) = 3 \tag{4}$$

である. 従って, 次ステップでの各辺のフローは (3)(4) から

$$\begin{aligned} \phi(\mathsf{v},\mathsf{b}) &= 0 + g(p_2) = 3 \\ \phi(\mathsf{b},\mathsf{c}) &= 0 + g(p_2) = 3 \\ \phi(\mathsf{c},\mathsf{w}) &= 0 + g(p_2) = 3 \end{aligned}$$

である.

この時点で各辺のフローを見てみると, 辺 (a,d), 及び, (c,w) のフローの値が容量いっぱいになっている. 従って, この 2 つの辺を含むような道に関しては正の余裕を持たせることはできず, 従って, その容量も増やすことはできない. このことを考慮に入れ, かつ, 入口 v から出口 w に至る道を選ぶとなるとそれは $\mathsf{v} \to \mathsf{a} \to \mathsf{c} \to \mathsf{w}$, 及び, $\mathsf{v} \to \mathsf{b} \to \mathsf{c} \to \mathsf{d} \to \mathsf{w}$ の 2 通りしかない. 前者を p_3, 後者を p_4 と名付けよう.
まず p_3 に関して. この時点で各辺のフローは

$$\begin{aligned} \phi(\mathsf{v},\mathsf{a}) &= 11 \\ \phi(\mathsf{a},\mathsf{c}) &= 0 \\ \phi(\mathsf{c},\mathsf{d}) &= 0 \\ \phi(\mathsf{d},\mathsf{w}) &= 11 \end{aligned}$$

である. $(\mathsf{a},\mathsf{c}),(\mathsf{c},\mathsf{d})$ は逆順であることに注意して

$$\begin{aligned} g(\mathsf{v},\mathsf{a}) &= \Psi(\mathsf{v},\mathsf{a}) - \phi(\mathsf{v},\mathsf{a}) = 20 - 11 = 9 \\ g(\mathsf{a},\mathsf{c}) &= \phi(\mathsf{a},\mathsf{c}) = 0 \\ g(\mathsf{c},\mathsf{d}) &= \phi(\mathsf{c},\mathsf{d}) = 0 \\ g(\mathsf{d},\mathsf{w}) &= \Psi(\mathsf{d},\mathsf{w}) - \phi(\mathsf{d},\mathsf{w}) = 13 - 11 = 2 \end{aligned}$$

となるので, この道 p_3 の余裕は

$$g(p_3) = \min_{k=(\mathsf{v},\mathsf{a}),(\mathsf{a},\mathsf{c}),(\mathsf{c},\mathsf{d}),(\mathsf{d},\mathsf{w})} g(k) = 0$$

であり, 従って各辺のフローはこの操作の前後で変わらず

$$\begin{aligned} \phi(\mathsf{v},\mathsf{a}) &= 11 \\ \phi(\mathsf{a},\mathsf{c}) &= 0 \\ \phi(\mathsf{c},\mathsf{d}) &= 0 \\ \phi(\mathsf{d},\mathsf{w}) &= 11 \end{aligned}$$

である.
最後に道 p_4 について. この時点で各辺のフロー値は

$$\begin{aligned} \phi(\mathsf{v},\mathsf{b}) &= 3 \\ \phi(\mathsf{b},\mathsf{c}) &= 3 \\ \phi(\mathsf{c},\mathsf{d}) &= 0 \\ \phi(\mathsf{d},\mathsf{w}) &= 11 \end{aligned}$$

であり, (c,d) が逆順であることを考慮すると

$$\begin{aligned} g(\mathsf{v},\mathsf{b}) &= \Psi(\mathsf{v},\mathsf{b})-\phi(\mathsf{v},\mathsf{b}) = 10-3=7 \\ g(\mathsf{b},\mathsf{c}) &= \Psi(\mathsf{b},\mathsf{c})-\phi(\mathsf{b},\mathsf{c}) = 7-3=4 \\ g(\mathsf{c},\mathsf{d}) &= \phi(\mathsf{c},\mathsf{d}) = 0 \\ g(\mathsf{d},\mathsf{w}) &= \Psi(\mathsf{d},\mathsf{w})-\phi(\mathsf{d},\mathsf{w}) = 13-11=2 \end{aligned}$$

となる. よって道 p_4 の余裕は

$$g(p_4) = \min_{k=(\mathsf{v},\mathsf{b}),(\mathsf{b},\mathsf{c}),(\mathsf{c},\mathsf{d}),(\mathsf{d},\mathsf{w})} g(k) = 0$$

なので, この操作で各辺のフローは変化せず

$$\begin{aligned} \phi(\mathsf{v},\mathsf{b}) &= 3 \\ \phi(\mathsf{b},\mathsf{c}) &= 3 \\ \phi(\mathsf{c},\mathsf{d}) &= 0 \\ \phi(\mathsf{d},\mathsf{w}) &= 11 \end{aligned}$$

のままである. 以上をまとめると, 最終的に得られる最大フローの値は $11+3=14$ であり, そのときの各辺のフローは図 1 のようになる.

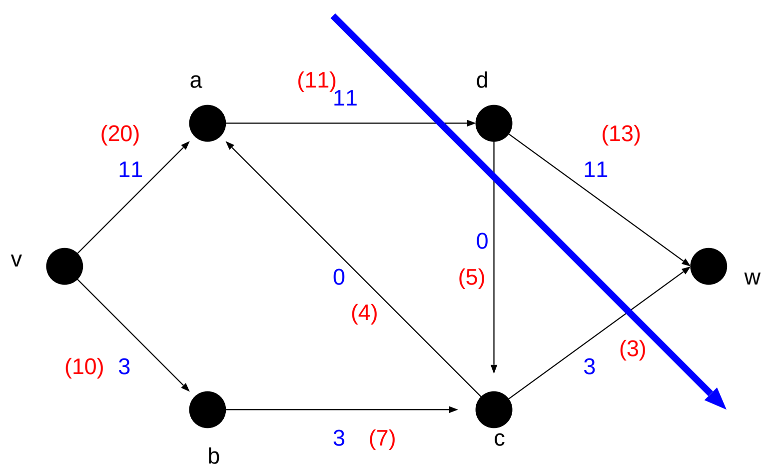

図 1: 逐次構成法を適用した結果, 各辺に割り当てられたフローの値. 括弧内は各辺の容量を表す. 太い矢印で記されたカットの容量は最小であり, $11+3=14$ であり, これはもちろん最大フロー $11+3=14$ と一致する (カット容量の計算では, 弧 dc, つまり, 始点 v を含む部分グラフに向かっている弧からの容量は含めない).

(2) 図 1 の太い矢印のようなカットを考えると, このカットで v と w は分離し, カット容量は $11+3=14$ となり, これは (1) で求めた最大フローの値と一致する. 従って, 確かに最大フロー最小カット定理を満たしている.

レポート問題 #11 に関するコメント

問題 1. で求める閉じたオイラー小道は $11 \to 12 \to 21 \to 12 \to 22 \to 21 \to 11$ であるとして, グラフを描きましたが, 「ループ」も含めて良いのであれば, 点 11, 22 におけるループをも含めた閉じたオイラー小道 : $11 \to 11 \to 12 \to 21 \to 12 \to 22 \to 22 \to 21 \to 11$ としてグラフを描いても正解です. 図 2 にそのグラフを描きます.

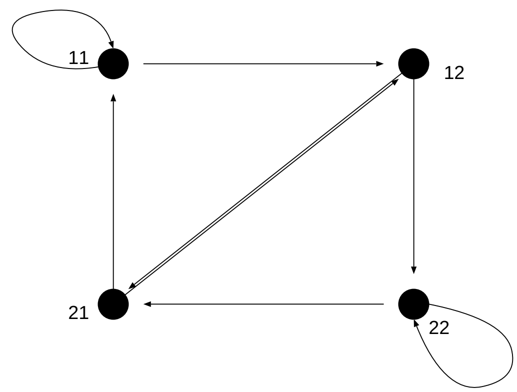

図 2: ループも含めた場合の閉じたオイラー小道.

問題 2. では講義中に説明したヒントに従って遷移行列 $\boldsymbol{P}$ の n 乗を計算して解を求めて下さった方も多数いました. もちろん, 正解です. ここで扱った 3 状態の酔歩は最も簡単な例ですから, 行列の n 乗を用いなくても, 解答例に示したように連立漸化式を解くことによって容易く求めることができます (もう少し複雑な確率過程は講義「確率過程」で学ぶことと思います). また, どのような確率過程であれ, その状態遷移をグラフを用いて視覚化することにより, 問題に取り組む際の見通しが立てやすくなったりします. 例えば簡単な例ですが, 昨年度に受講したであろう「情報理論」において学習した 2 元対称通信路もこの手の状態遷移図で描くことができます.