グラフ理論 配布資料 #2

教科書 pp. 10 〜 21 の内容

担当：井上 純一 (情報エレクトロニクス系棟 8-13)

平成 16 年 4 月 19 日

演習問題 1 の解答例

1. グラフ理論的にこの問題を言い換えてみると, 問題である『C_nH_{2n+2} の構造異性体の数を数える』ことは, 『n 個の点の次数が 4 であり, 残りの $2n+2$ 個の点の次数が 1 である「ラベルなし木」の総数を数える』ということになる.
   炭素原子同士のつなげ方を決めれば, 水素原子の配置の仕方は自動的に決まるので, 可能な炭素原子の配置を数えあげて行けばよい. 図 1 にその結果を載せる.

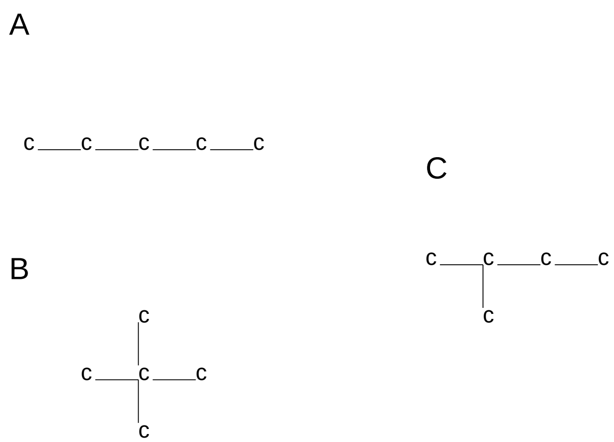


図 1: $n=5$ の場合に可能な炭素原子配列.

   従って, 求める構造異性体は上記の炭素原子の残りの手に水素原子を付加すればよく, 答えは下の図 2 のようになる.

   ここで, 注意を一点だけあげておきたい. 求めるグラフは「木」でなければならない (つまり, どの 2 点間にも道が 2 本以上存在してはならない) ので, 図 3 のような配置は許されず, 実際, この炭素配列で水素原子も並べてみると C_5H_{10} となり, C_5H_{12} とは異なるものが出来上がってしまう. [1]
2. 求める有向グラフは (好意を持っている人物) → (好意を持たれている人物) のように矢印をつける約束にすると図 4 のようになる.
3. 考え得る組み合わせのグラフは図 5 のように 5 通りある.

[1] 系統的な木の数え上げに関しては第 4 章 p. 67 **Cayley の定理**で学ぶことになります.

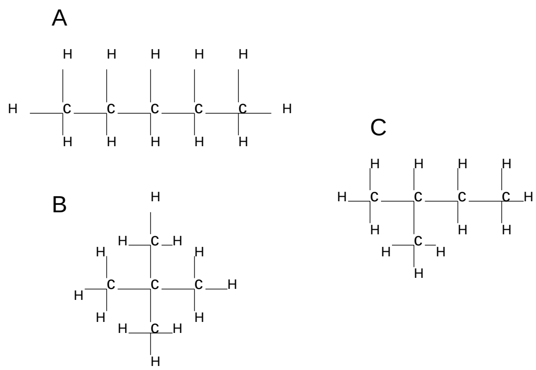


図 2: C_5H_{12} の構造異性体.

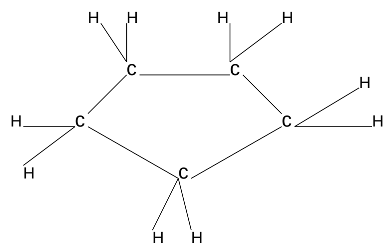


図 3: C_5H_{10}.

2　定義と例

この節ではグラフ理論に現れる数々の定義を例を交えながら解説する.

2.1　単純グラフ

単純グラフ : グラフにループが含まれず, 頂点のどの対も高々1 つのリンクで結ばれているグラフ.

$V(\mathrm{G})$: グラフ G の**点集合 (vertex set)**
$E(\mathrm{G})$: グラフ G の**辺集合 (edge set)**
ψ_{G} : グラフ G の**接続関数 (incidence function)**

どのグラフ (単純グラフも含む)G も $V(\mathrm{G})$ と $E(\mathrm{G})$ からなる.
難しく言うと ⇒ 『グラフ G は $V(\mathrm{G})$ と $V(\mathrm{G})$ の元の非順序対からなる有限な族 (複数個の同じ元があってもよい) である $E(\mathrm{G})$ からなる.』

図 6 に単純グラフとその点集合及び辺集合を載せる. 前出のグラフ G の接続関数とは G の各辺に G の頂点の対を対応させる関数であり, この図の例でいくと

$$\psi_{\mathrm{G}}(\mathrm{e}_1) \quad = \quad uv, \quad \psi_{\mathrm{G}}(\mathrm{e}_2) = vw$$

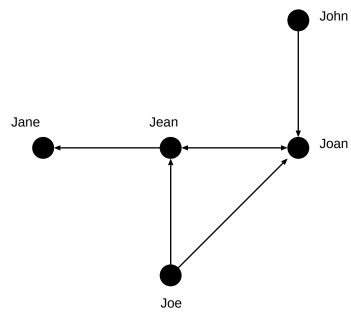


図 4: John, Joan, Jean, Jane 及び Joe の関係図.

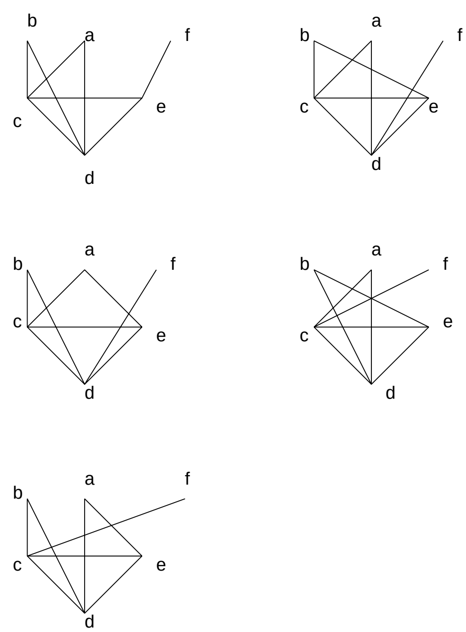


図 5: 考え得る対戦カードを表す 5 種類のグラフ.

$$\psi_{\mathrm{G}}(\mathrm{e}_3) \quad = \quad wu, \quad \psi_{\mathrm{G}}(\mathrm{e}_4) = wz$$

のようになる.

一方, 図 7 に**一般グラフ (general graph)** (ループや多重辺をも許されたグラフ) の一例を載せる. この図において各辺の現れる回数は uv(1 回), vv(ループ, 2 回), vw(3 回), uw(2 回), wz(1 回) である.

2.2 同形

2 つのグラフ G_1 と G_2 の間に一対一の対応関係があり, G_1 の任意の 2 点を結ぶ辺数が G_2 の対応する 2 点を結ぶ辺数に等しいとき, G_1 と G_2 は**同形 (isomorphic)** であるという. 図 8 の 2 つのグラフ G_1 及び G_2 は同形であり, G_2 中に書き込んだような対応関係を持つ.

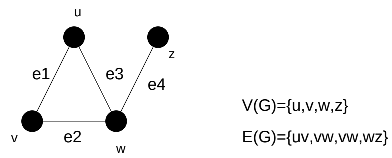


図 6: 単純グラフ G の例と点集合 $V(\mathrm{G})$ 及び辺集合 $E(\mathrm{G})$.

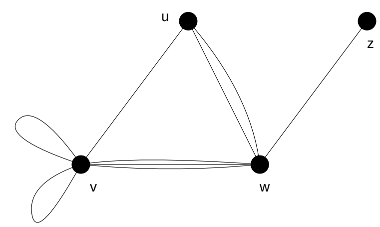


図 7: 一般グラフ G の一例.

(補足事項)
先に定義した接続関数を用いると, 2 つのグラフ $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2$ が同形であるとき, 1 対 1 写像 :

$$
\begin{aligned}
\theta : V(\mathrm{G}_1) &\quad\to\quad V(\mathrm{G}_2) \\
\phi : E(\mathrm{G}_1) &\quad\to\quad E(\mathrm{G}_2)
\end{aligned}
$$

が次の関係 :

$$\psi_{\mathrm{G}_1}(e) = uv \quad\Leftrightarrow\quad \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$$

が成り立つ. このような写像の対 (ϕ, θ) を $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2$ 間の**同形写像**と呼び, この同形写像が存在する場合, $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2$ は同形であると言い, 式では $\mathrm{G}_1 \cong \mathrm{G}_2$ と表現する.

これを実際に図 8 の $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2$ で確かめると

$$
\begin{aligned}
&\theta(u) = l, \theta(v) = m, \theta(w) = n \\
&\theta(x) = p, \theta(y) = q, \theta(z) = r
\end{aligned}
$$

及び

$$
\begin{aligned}
\phi(\overline{ux}) &\quad=\quad \overline{lp} = \overline{\theta(u)\theta(x)} \\
\phi(\overline{uz}) &\quad=\quad \overline{lr} = \overline{\theta(u)\theta(z)} \\
\cdots &\quad\cdots\quad \cdots
\end{aligned}
$$

となるから

$$\psi_{\mathrm{G}_1}(\overline{ux}) = ux \quad\Leftrightarrow\quad \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(\overline{ux})) = \psi_{\mathrm{G}_2}(\overline{lp}) = lp = \theta(u)\theta(x)$$

等の成立が確かめられ, 従って, 図 8 の $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2$ は同形であることがわかる (もちろん, この場合の写像 ϕ, θ は同形写像である).

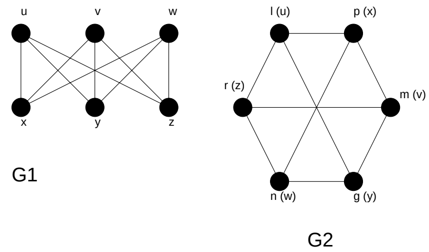


図 8: 同形グラフ G_1 と G_2.

2.3　ラベル付きグラフとラベルなしグラフ

各点に名前の付されたグラフを**ラベル付きグラフ**と呼ぶ. $\boxed{\textbf{演習問題 1}}$で扱った炭素原子を並べた木に関しても, この課題では「ラベルなし」としてその場合を数えたが, ラベル付きの木として扱う際には図の 2 つの木は別個の木として扱うことになる.

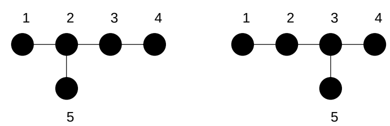


図 9: $\boxed{\textbf{演習問題 1}}$で扱った炭素原子の木をラベル付きで考えると両者はことなる木とみなされる.

2.4　連結グラフ

連結グラフとは平たく言えば「一つにつながっているグラフ」ということになるが, 点同士が「連結する」「連結される」という概念を用いると, 下記のように, もう少し丁寧に連結グラフを定義することができる.

まず, グラフ G の点 u, v に関して, G に u, v を結ぶ道があれば, u は v に**連結される**と言う.

そこで, グラフ G を構成する任意の 2 点 u, v に対し,

$$u \text{ は } v \text{ に連結される} \quad \Leftrightarrow \quad u \text{ は } v \text{ と同じ } V_i \text{ に属する}$$

というようにグラフ G を G の点からなる空でない部分集合 $V_1, V_2, \cdots, V_i, \cdots, V_n$ で分割したとき, 各集合からなる部分グラフ $\mathrm{G}(V_1), \mathrm{G}(V_2), \cdots, \mathrm{G}(V_n)$ をそれぞれグラフ G の**成分 (component)** と呼び, 成分が 1 つだけのグラフを**連結グラフ (connected graph)** と定義する. 図 10 に連結グラフ (G_1) 及び, 成分数が 3 である非連結グラフ (G_2) の例を載せる. 言うまでもないことだが, **非連結グラフ (disconnected graph)** とは連結グラフでないグラフのことである.

2.5　次数及び次数列

グラフ G 及びその中の点 v に関する, 次にあげる重要な概念を押さえておこう.

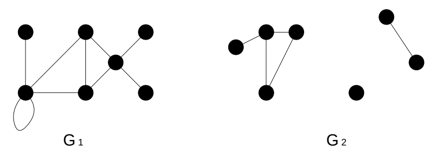


図 10: 連結グラフ G_1 と非連結グラフ G_2. G_2 の成分数は 3 である.

- 点 v の**次数 (degree)**
  v に接続している辺の本数. ただし, ループの場合は 2 本とカウントする. 式で書くと $\deg(v)$ となる.
- **孤立点 (isolated vertex)**
  次数ゼロの点
- **端点 (end-vertex)**
  次数 1 の点
- グラフ G の**次数列 (degree sequence)**
  次数を増加順に記したもの. 必要となれば同じ次数を繰り返しても良い. 図 10 の G_1 の例で言うと, この連結グラフの次数列は $(1, 1, 1, 3, 3, 4, 5)$.

また, グラフの次数に関して次の有名な補題が知られている.

握手補題 (handshaking lemma) : 任意のグラフの全ての点の次数を合計すれば必ず偶数になる.

また, 整数列 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ が与えられたとき, n 個の点からなるグラフ G に対し, 各 i に関して

$$\deg(v_i) \quad = \quad d_i \tag{1}$$

が成立するとき, 数列 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ は**グラフ的である**という. 例えば, 図 11 のグラフはグラフ的であり,

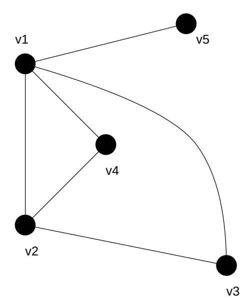


図 11: 「グラフ的」であるグラフの一例.

対応関係は

$$\mathrm{d}(v_1) = 4, \mathrm{d}(v_2) = 3, \mathrm{d}(v_3) = 2, \mathrm{d}(v_4) = 2, \mathrm{d}(v_5) = 1 \tag{2}$$

となる.

2.6　部分グラフ

グラフ G の**部分グラフ (subgraph)**：点が全て $V(\mathrm{G})$ に属し, その辺が全て $E(\mathrm{G})$ に属するグラフ.

従って, いかなる場合にも, グラフ G の点と辺の**除去**, 及び辺の**縮約** (辺を除去し, その辺の両端についていた 2 点を同一視して 1 点にすること) という操作を行うことにより, グラフ G の部分グラフを作ることができる.

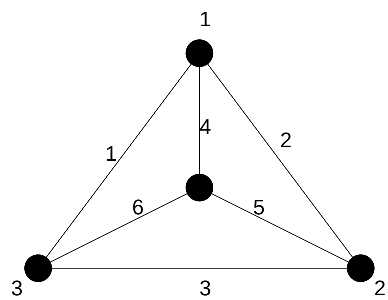
2.7　行列によるグラフの表現方法

グラフを計算機上で表現する場合には個々のグラフの特徴を数量化し, その数字を用いてコーディングする必要がある. このとき, 下記に挙げる**隣接行列**及び, **接続行列**という行列による表現方法が便利である.

グラフ G の点及び辺が $1, 2, \cdots, n$, $1, 2, \cdots, m$ とそれぞれラベル付けされているとすると

隣接行列 (adjacency matrix)：点 i と点 j を結ぶ辺の本数を第 ij 要素とする $n \times n$ の行列
接続行列 (incidence matrix)：点 i が辺 j に接続している場合, 第 ij 要素が 1 であり, 接続していない場合 0 であるような $n \times m$ の行列[2]

(例題)
図に与えられたグラフについて以下の問いに答えよ.



(1) このグラフの次数列を書け.
(2) 図のグラフに対して隣接行列 $\boldsymbol{A}$ 及び接続行列 $\boldsymbol{M}$ を求めよ.

(答え)

(1) 次数列は $(3, 3, 3, 3)$.
(2) それぞれの定義に従えば隣接行列 $\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

[2] 点 v において辺 e が「ループ」として接続している場合, このグラフの接続行列の第 ve 成分を, 教科書によっては 1 と定義しているものと 2 と定義している 2 通りがあるようであるが, この講義ではこの場合 1 として接続行列を定義する. 従って, 接続行列の成分は必ず 0 か 1 である.

接続行列 $\boldsymbol{M}$ は

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

となる.

$\boxed{\textbf{演習問題 2}}$

1. 図の G_1 と G_2 の間の同形写像 ϕ, θ を見つけよ. また, G_1 の任意の辺 e 及び点 u, v に対して

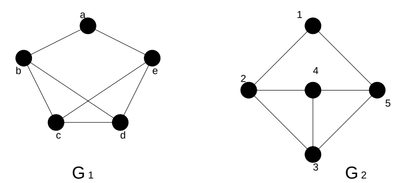


図 12: $\boxed{\textbf{演習問題 2}}$ の図.

$$\psi_{\mathrm{G}_1}(e) = uv \quad \Leftrightarrow \quad \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$$

が成り立っていることを 2,3 の $\{e, u, v\}$ の組に対して確かめよ.

2. 図 8 のグラフ G_2 の部分グラフを 2 つ挙げよ.
3. 次の隣接行列 $\boldsymbol{A}$, 接続行列 $\boldsymbol{M}$ で与えられるグラフをそれぞれ描け.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(注)
今回のレポート〆切はやや早いですが, 4 月 23 日 (金) の情報工学演習 II(B) の時間までとします. なお, この日の演習は**グラフ理論の通常講義**を行います.