



# HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	2004年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一; Inoue, Jun-ichi
Description	当講義資料は著者のホームページ <a href="http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/">http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/</a> からダウンロードできます。 <a href="http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/">http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/</a>
Issue Date	2004
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/371">https://hdl.handle.net/2115/371</a>
Rights(URL)	<a href="https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/">https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/</a>
Type	learning object
File Information	GraphTheory04_4.pdf, 第4回講義ノート



# グラフ理論 配布資料 #4

教科書 pp. 35 ~ 42 の内容

担当：井上 純一 (情報エレクトロニクス系棟 8-13)

平成 16 年 5 月 10 日

## 演習問題 3 の解答例

1.

(1) 定義に従って、問題に与えられたグラフの接続行列  $M$  を書き下すと

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

のようになる.

- (2) 例えば、上記の接続行列の第 1 行目を見てみると、第 1, 2 列に 1 が立っている。これは点 1, 2 が辺 1 で結ばれていることを表している。接続行列の定義から、各列は辺の番号を表し、各列に 1 が立っている行が該当する辺に接続する点を表しており、1 つの辺に接続できる点の数は常に 2 つであるから、接続行列の各列の成分の和は常に 2 であるといえる。
- (3) 接続行列の定義から、各行の成分の和は各点の次数の和を表す。
- (4) (2)(3) の考察より、次数の和  $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$  接続行列の各行の成分和を全ての行に対して計算したものに等しく、これは接続行列の全ての成分を足したものである。一方、接続行列の各列の要素の和は常に 2 であり、従って、接続行列の全ての成分の総和は、辺の数の 2 倍すなわち  $2\epsilon(G)$  であり、結局

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2\epsilon(G)$$

が成り立つ。

2.

(1) 完全グラフ  $K_5$  の隣接行列  $A$  は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

のように対角成分がゼロであり, 非対角成分に 1 が並んだ行列となる.

(2) まず, 図の完全グラフ  $K_5$  から考察してみると, 点 1 と 3 を結ぶ長さ 2 の歩道は

$$[1] \quad 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$$

$$[2] \quad 1 \rightarrow 5 \rightarrow 3$$

$$[3] \quad 1 \rightarrow 4 \rightarrow 3$$

の 3 つである.

一方, 隣接行列の自乗を計算してみると

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

となり, これから直ちに  $A^2$  の第 (1,3)-成分は 3 であることがわかる. 従って, 題意が示せた.

(3) (2) と同様に, 少々面倒であるが, まずは問題の完全グラフから点 1,3 を結ぶ長さ 3 の歩道を数え上げてみると

$$[1] \quad 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3$$

$$[2] \quad 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 3$$

$$[3] \quad 1 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 3$$

$$[4] \quad 1 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 3$$

$$[5] \quad 1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 3$$

$$[6] \quad 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3$$

$$[7] \quad 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 3$$

$$[8] \quad 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 3$$

$$[9] \quad 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 3$$

$$[10] \quad 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3$$

$$[11] \quad 1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 3$$

$$[12] \quad 1 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 3$$

$$[13] \quad 1 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 3$$

のようになり, 計 13 通り存在する.

一方,  $A^3$  を計算すると

$$A^3 = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 12 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 12 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 12 \end{pmatrix}$$

となり, この第 (1,3)-成分は 13 となり, 題意が示された.

(4) 一般に  $n$  点からなる単純グラフの隣接行列の  $K$  乗, つまり,  $A^K$  の第  $(i, j)$ -成分は

$$[A^K]_{ij} = \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \cdots \sum_{k_K=1}^n a_{ik_1} a_{k_1 k_2} a_{k_2 k_3} \cdots a_{k_{K-1} k_K} a_{k_K j}$$

であり,  $a_{ik_1}$  は点  $i$  と  $k_1$  を結ぶ道の数であることから, 上記の  $[A^K]_{ij}$  は点  $i, j$  を結ぶ道の数に等しいことがわかる.

3.

(1) 完全三部グラフ  $K_{2,2,2}$  を描くと図 1 のようになる ( $K_{3,3,2}$  も同様にして作図できるが, ここでは省略.).

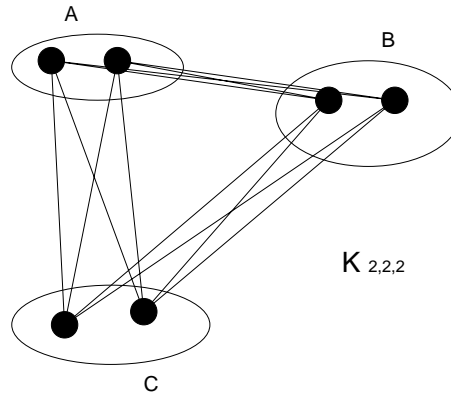


図 1: 完全 3 部グラフ  $K_{2,2,2}$  の作図例.  $K_{3,3,2}$  も同様にして作図できるが, ここでは省略.

(2)  $K_{r,s,t}$  の辺の本数は  $rs + rt + st$  本である.

### レポート #2 に関するコメント

レポート #2 を採点してみたところ, 皆さん良くできていましたが, 数点気になったことがありました.

- 小問 2. のグラフ  $G_2$  を小問 1. の図 12 のグラフ  $G_2$  と間違えて, このグラフに対して部分グラフを描いて提出した者が結構な数いました. 問題文に書いてあるように, 正しくは配布資料 #2 の図 8 の  $G_2$  ですから, これは誤りです.
- 小問 3. の接続行列  $M$  で与えられるグラフですが, 対応する辺の番号を記入してくださいと採点する方は採点しやすいし, 間違いも少なくなると思います. もちろん, 辺番号が書いていなくとも, グラフの形状があつてさえすれば正解として採点しています.
- 配点はシンプルに小問 1. (1 点 : 説明不十分なものは  $\times$ ), 小問 2. (2 点 : グラフ 1 つにつき 1 点), 小問 3. (1 点) の 5 点満点として採点してあります.

## 5 道と閉路

ここでは、「道」及び「閉路」に関し、その概念・諸定理、及び、応用例をいくつかの具体例をあげて説明する。なお、教科書 p.52 「アルゴリズム」は、この講義では触れず、情報工学演習 II(B) の時間に関連する問題を解くことにより補うことにする。

### 5.1 連結性

連結：グラフの各 2 点の間に道がある。

歩道： $v_i (i = 1, \dots, m) \in G$  に対し、辺列  $v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{m-1}v_m$  を歩道 (walk) という。

⇒ 別の表現： $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_m$  ( $v_0$  : 始点,  $v_m$  : 終点)

小道：全ての辺  $v_0v_1, \dots, v_{m-1}v_m$  が異なる歩道

道：点  $v_0, v_1, \dots, v_m$  が全て異なる歩道 ( $v_0 = v_m$  であっても良いとする)

閉路：少なくとも 1 本辺を持つ閉じた道

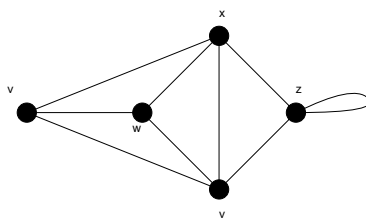


図 2: このグラフにおいて、閉路は  $x \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow x$

(例題)

連結単純グラフ  $G$  の点集合は  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  であり、 $m$  本の辺および  $t$  個の三角形があるとす。以下の (1) ~ (3) に答えよ。

- (1)  $G$  の隣接行列を  $A$  とすると、行列  $A^2$  の  $ij$  要素は  $v_i$  と  $v_j$  間の長さ 2 の歩道の個数に等しいことを示せ。
- (2) 行列  $A^2$  の対角要素の総和は  $2m$  であることを示せ。
- (3) 行列  $A^3$  の対角要素の総和は  $6t$  であることを示せ。

(答え)

- (1) 連結グラフ  $G$  に関する  $n \times n$  の隣接行列を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

と置くと隣接行列の自乗  $A^2$  は

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}a_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{1k}a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=1}^n a_{nk}a_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{nk}a_{kn} \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \equiv B \end{aligned} \quad (2)$$

と書け、 $A^2$  の  $ij$  要素である  $b_{ij}$  は

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{kj} \quad (3)$$

である。ところで、隣接行列の定義から  $a_{ik}$  は点  $v_i$  と点  $v_k$  を結ぶ辺の本数、 $a_{kj}$  は点  $v_k$  と点  $v_j$  を結ぶ辺の本数であるから、積  $a_{ik}a_{kj}$  は点  $v_i$  から点  $v_k$  を経由して点  $v_j$  に至る長さ 2 の歩道の数に相当する (図 3 参照)。経由点  $v_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) の選び方の可能性 ( $i = k, j = k$  の場合には「ループ」があると

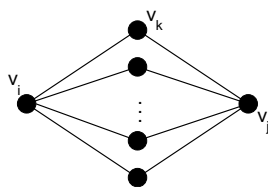


図 3: 点  $v_k$  は点  $v_i$  から点  $v_j$  へ至る経由点。

考える) に関し、この積  $a_{ik}a_{kj}$  を足し上げた

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}a_{kj} = b_{ij} \quad (4)$$

は  $v_i$  から  $v_j$  へ至る長さ 2 の歩道の数である。すなわち、 $A^2$  の  $ij$  要素  $b_{ij}$  は  $v_i$  から  $v_j$  へ至る長さ 2 の歩道の数に等しい。

(2) (1) の結果を考慮すると、行列  $B = A^2$  の対角成分

$$b_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{ki} \quad (5)$$

は点  $v_i$  から点  $v_k$  を経由して  $v_i$  へ戻る長さ 2 の歩道の数であるから、これは  $v_i$  と  $v_k$  を結ぶ辺の数の 2 倍になっている (図 4 参照)。従って、行列  $A^2$  の対角和

$$\sum_{i=1}^n b_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{ki} \quad (6)$$

は連結グラフ  $G$  に含まれる辺の本数の 2 倍、すなわち  $2m$  である。

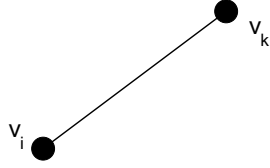


図 4: 中継点  $v_k$  を経て,  $v_i$  へ戻る経路.

(3)  $A^3$  を計算すると

$$\begin{aligned}
 A^3 &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{1k} a_{kl} a_{l1} & \cdots & \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{1k} a_{kl} a_{ln} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{nk} a_{kl} a_{l1} & \cdots & \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{nk} a_{kl} a_{ln} \end{pmatrix} \\
 &\equiv \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} = C
 \end{aligned} \tag{7}$$

であるから,  $A^3$  の  $ij$  成分は

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik} a_{kl} a_{lj} \tag{8}$$

と書ける.

ところで, 隣接行列の定義から  $a_{ik}$  は点  $v_i$  と点  $v_k$  間の辺の本数,  $a_{kl}$  は点  $v_k$  と点  $v_l$  間の辺の本数,  $a_{lj}$  は点  $v_l$  と点  $v_j$  間の辺の本数であるから, これらの積  $a_{ik} a_{kl} a_{lj}$  は点  $v_i$  から点  $v_k$  及び点  $v_l$  を経由して点  $v_j$  へ至る歩道の数である. 従って, 経路点  $\{v_k, v_l\}$  の可能性について足し合わせた

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik} a_{kl} a_{lj} = c_{ij} \tag{9}$$

つまり, 行列  $A^3$  の  $ij$  要素は点  $v_i$  から点  $v_j$  へ至る長さ 3 の歩道の数に等しい (図 5 参照). また,

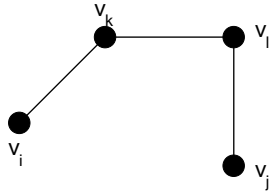


図 5: 点  $v_i$  から経路点  $\{v_k, v_l\}$  を経て  $v_j$  へと至る経路.

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik} a_{kl} a_{li} \tag{10}$$

は点  $v_i$  から点  $v_k$  及び点  $v_l$  を経由して  $v_i$  へ至る長さ 3 の閉路の数であるから. これは点  $v_i, v_k$  及び点  $v_l$  を結ぶ三角形の数である. 従って, これを経路点  $\{v_k, v_l\}$  の可能性について足し上げた

$$\sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik} a_{kl} a_{li} \tag{11}$$

は連結グラフ  $G$  に含まれる三角形の個数の 6 倍 ( $i, k, l$  の並べ方  $3! = 6$  通りに縮退) に等しい (図 6 参照). すなわち

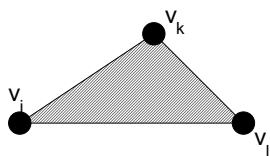


図 6: 点  $v_i$  を出発し, 点  $\{v_k, v_l\}$  を経て点  $v_i$  へと戻る閉路は三角形を形成する.

$$\sum_{i=1}^n c_{ii} = 6t \quad (12)$$

に等しい.

#### 定理 5.1

グラフ  $G$  が二部グラフであるとき, 閉路は全て偶数長である.

証明は教科書 p. 37 を参照のこと (この講義では触れない).

#### 定理 5.2

グラフ  $G$  は  $n$  個の点を持つ単純グラフであるとする.  $G$  には  $k$  個の成分があるとき,  $G$  の辺の本数  $m$  は次式を満たす.

$$n - k \leq m \leq \frac{1}{2}(n - k)(n - k + 1) \quad (13)$$

(証明)

まず, (13) における下界を表す不等式:  $m \geq n - k$  について示す. 空グラフ  $m = 0$  のときは自明であり,  $n = k$  より,  $0 \leq 0 - 0 = 0$  で成立する. 従って, 以下ではこの場合を除外して考える. 方針としては, 辺数が  $m_0 - 1$  のときに不等式の成立を仮定し,  $m_0$  のときの成立を示すという数学的帰納法により証明することにしよう.

このために, 単純グラフ  $G$  から任意の辺を 1 本削除した場合, 成分数, 点数, 辺数はどのように変化するかを考察すると

$$\text{成分数: } k \rightarrow k + 1$$

$$\text{点数: } n \rightarrow n$$

$$\text{辺数: } m_0 \rightarrow m_0 - 1$$

となるから, 上の矢印の右側のそれぞれの量  $(k + 1, n, m_0 - 1)$  に関して不等式を作ると

$$m_0 - 1 \geq n - (k - 1)$$

が成立する. 従って, この辺数  $m_0 - 1$  に関する不等式の成立を仮定し, これから辺数  $m_0$  についての不等式の成立を導けばよいわけであるが, これは上不等式を書き直せば直ちに

$$m_0 \geq n - k$$

が得られるので, 帰納法により, 全ての  $m$  に対して不等式:  $m \geq n - k$  の成立が示された.

次に, (13) の上界を示す不等式:  $m \leq (n - k)(n - k + 1)/2$  についての成立を示す. 辺の数の上界を考えるわけであるから, グラフ  $G$  を成分数が  $k$  のグラフで, 辺の数が一番多いものとするれば, このグラフ  $G$  の各成分は完全グラフであるとしてよい. そこで, この成分の中で任意の 2 成分  $C_i, C_j$  を選び,  $C_i$  には  $n_i$  個,

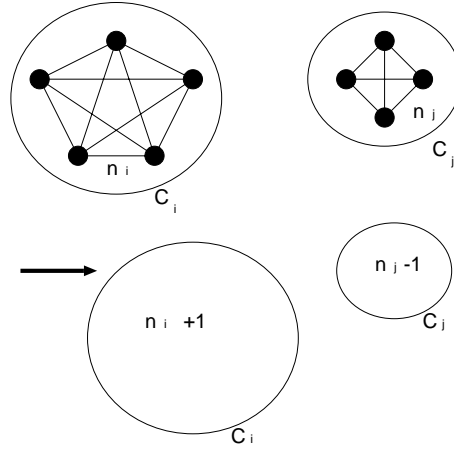


図 7: 完全グラフ  $C_i$  に点を一つ足して完全グラフを作り, 完全グラフ  $C_j$  から点を一つ引き, 完全グラフを作る.

$C_j$  には  $n_j$  個の点があったとする ( $n_i \geq n_j$ ). つまり,  $C_i + C_j$  の辺の総数  $\mathcal{N}_{ij}$  はそれぞれが完全グラフであることを考慮すると (図 7 を参照).

$$\mathcal{N}_{ij} = \frac{1}{2}n_i(n_i - 1) + \frac{1}{2}n_j(n_j - 1) \quad (14)$$

となる. さて, ここで次の操作を考える.

(操作)

$C_i \Rightarrow n_i + 1$  個の点を持つ完全グラフ

$C_j \Rightarrow n_j - 1$  個の点を持つ完全グラフ

この置き換えにより,  $C_i + C_j$  の点数は不変であるが, 辺数  $\mathcal{N}'_{ij}$  は

$$\mathcal{N}'_{ij} = \frac{1}{2}n_i(n_i + 1) + \frac{1}{2}(n_j - 1)(n_j - 2) \quad (15)$$

のように変化する. 従って, この (操作) により, 辺の数は

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{N}_{ij} &= \mathcal{N}'_{ij} - \mathcal{N}_{ij} \\ &= \frac{1}{2}n_i(n_i + 1) + \frac{1}{2}(n_j - 1)(n_j - 2) - \left\{ \frac{1}{2}n_i(n_i - 1) + \frac{1}{2}n_j(n_j - 1) \right\} \\ &= n_i - n_j + 1 > 0 \end{aligned} \quad (16)$$

だけ増加する.

この議論を進めると、結局、成分数が  $k$  であるグラフで最も辺数が多いグラフ  $G$  は点の数が  $n - (k - 1) = n - k + 1$  個の完全グラフと  $k - 1$  個の孤立点 (空グラフ) からなるグラフであると結論付けられるので、辺数  $m$  の上限は不等式:

$$m \leq \frac{1}{2}(n - k)(n - k + 1) \quad (17)$$

を満たすことがわかる (証明終わり).

(例題)

連結グラフにおいて、点  $v$  から  $w$  への距離  $d(v, w)$  は  $v$  から  $w$  への最短路の長さである。このとき、以下の問い (1)(2) に答えよ。

(1)  $d(v, w) \geq 2$  ならば

$$d(v, z) + d(z, w) = d(v, w) \quad (18)$$

なる点  $z$  が存在することを示せ。

(2) ピーターソン・グラフ (例えば教科書 p. 23 図 3.4 参照) において、任意の異なる 2 点  $v$  と  $w$  に対して  $d(v, w) = 1$  または  $d(v, w) = 2$  であることを示せ。

(答え)

(1) 図 8 のような状況を考える。点  $v$  から  $w$  への最短路を  $C$  とする。  $C$  の全長は  $d(v, w)$  である。この経

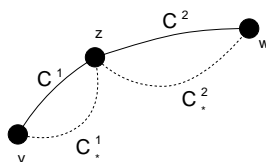


図 8:  $v \rightarrow z \rightarrow w$  の経路  $C = C^1 + C^2$  は  $v$  から  $w$  への最短路であり、その長さは  $d(v, w)$  で与えられる。

路  $C$  上に任意の点  $z$  をとり、この点  $z$  を中継点として経路  $C$  を 2 つの部分に分けて、部分路  $v \rightarrow z$  を  $C^1$ 、部分路  $z \rightarrow w$  を  $C^2$  とする。

この点  $z$  に対し、 $C^1$  は  $v$  と  $z$  を結ぶ全ての経路のうちで最短路である。なぜならば、もし  $v$  と  $z$  を結ぶ別の経路の中で  $C^1$  よりも短いものが存在するとすれば、その経路  $C_*^1$  と  $C^2$  を合わせた新しい経路  $C_*^1 + C^2$  が  $v$  と  $w$  を結ぶ全ての経路の中で最短となり、仮定に反する。従って、経路  $C^1$  が点  $v$  と  $z$  を結ぶ全ての経路の中で最短であり、 $C^1$  の全長が  $d(v, z)$  である。

次に、 $z$  と  $w$  を結ぶ経路の中で最短のものであるが、これが  $C^2$  であることは明らかである。なぜならば、この経路と別な経路  $C_*^2$  が存在するとすれば、 $C^1$  と  $C_*^2$  を足し合わせた経路  $C^1 + C_*^2$  が  $v$  と  $w$  を結ぶ全経路の中で最短となり、仮定に反する。従って、 $C^2$  が  $z$  と  $w$  を結ぶ全経路のうちで最短であり、その全長は  $d(z, w)$  である。従って、考えるグラフは連結であるから、経路  $C$  上に中継点  $z$  をいつでも任意にとることができ、この点  $z$  に対して

$$d(v, z) + d(z, w) = d(v, w) \quad (19)$$

が成り立つ。

(2) 図9のように、ピータースン・グラフの各点に番号を付ける。ピータースン・グラフの対称性から、点

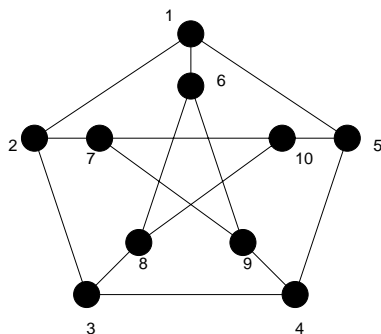


図 9: ピータースン・グラフ

1, 6 をスタート地点に選んだ場合の各他点への最短路を考えれば十分である (括弧内は長さ  $d$  を与える経路).

$$\begin{aligned}
 d(1,2) &= 1 \quad (1 \rightarrow 2) \\
 d(1,3) &= 2 \quad (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3) \\
 d(1,4) &= 2 \quad (1 \rightarrow 5 \rightarrow 4) \\
 d(1,5) &= 1 \quad (1 \rightarrow 5) \\
 d(1,6) &= 1 \quad (1 \rightarrow 6) \\
 d(1,7) &= 2 \quad (1 \rightarrow 2 \rightarrow 7) \\
 d(1,8) &= 2 \quad (1 \rightarrow 6 \rightarrow 8) \\
 d(1,9) &= 2 \quad (1 \rightarrow 6 \rightarrow 9) \\
 d(1,10) &= 2 \quad (1 \rightarrow 5 \rightarrow 10) \\
 d(6,1) &= 1 \quad (6 \rightarrow 1) \\
 d(6,2) &= 2 \quad (6 \rightarrow 1 \rightarrow 2) \\
 d(6,3) &= 2 \quad (6 \rightarrow 8 \rightarrow 3) \\
 d(6,4) &= 2 \quad (6 \rightarrow 9 \rightarrow 4) \\
 d(6,5) &= 2 \quad (6 \rightarrow 1 \rightarrow 5) \\
 d(6,7) &= 2 \quad (6 \rightarrow 9 \rightarrow 7) \\
 d(6,8) &= 1 \quad (6 \rightarrow 8) \\
 d(6,9) &= 1 \quad (6 \rightarrow 9) \\
 d(6,10) &= 2 \quad (6 \rightarrow 8 \rightarrow 10)
 \end{aligned}$$

以上より、ピータースン・グラフの任意の2点  $v, w$  に対して  $d(v, w) = 1$  または  $d(v, w) = 2$  であることが示せた.

## 5.2 非連結化集合と分離集合

ある連結グラフを「どの程度つながったグラフであるか」という観点から調べる際、「そのグラフから何本の辺を取り去ったら非連結グラフになるか?」「そのグラフから何個の点を取り去ったら非連結グラフになるか?」という指標を用いることが多い。前者を非連結化集合 (disconnecting set), 後者を分離集合 (separating set) と呼ぶ。ここではそれぞれを例を取りあえて見てゆくことにしよう。

### 5.2.1 非連結化集合

非連結化集合：それを除去するとグラフが非連結となる辺の集合。

カットセット：そのどのような真部分集合も非連結化集合でない、非連結化集合<sup>1</sup>。図 10 の非連結化集合  $\{e_1, e_6, e_7, e_8\}$  はカットセットでもある。

辺連結度 (edge-connectivity)  $\lambda(G)$ ：連結グラフ  $G$  の最小なカットセットの大きさ。図のグラフでは  $\lambda(G) = 2$  である。

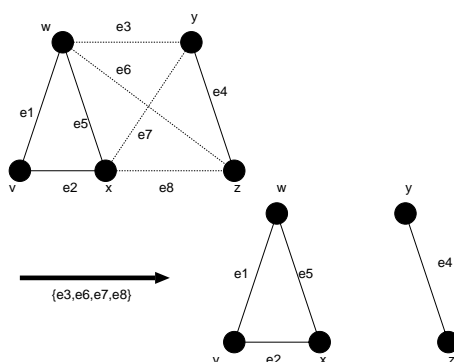


図 10: カットセット  $\{e_3, e_6, e_7, e_8\}$  を選ぶと図のような非連結グラフが得られる。

$\lambda(G) \geq k$  のとき、グラフ  $G$  は  $k$ -辺連結であるという。

### 5.2.2 分離集合

分離集合：それを除去するとグラフが非連結となる点の集合 (辺を除去するときにはその接続辺も除去することに注意)。

カット点：1 個の点だけからなる分離集合。

連結度  $\kappa(G)$ <sup>2</sup>：グラフ  $G$  の最小な分離集合の大きさ。

$\kappa(G) \geq k$  のとき、グラフ  $G$  は  $k$ -連結であるという。

<sup>1</sup> 「それを除去するとグラフの成分数が増える辺の集合」として定義し直せば、「非連結化集合」、「カットセット」はそれぞれ非連結グラフにも適用できる概念であることに注意しよう。

<sup>2</sup> この連結度は、前出の辺連結度と区別するために「点連結度」と呼ばれることもある。

(注)

連結度  $\kappa(G)$  とは通信系のネットワーク (インターネットを思い出して頂ければよいと思います) を構築する際に便利な量である。つまり, グラフの各点を「交換局」あるいは「サーバ」であるとすれば, そのグラフ (ネットワーク)  $G$  の連結度が  $\kappa(G)$  であるということは,  $\kappa(G)$  未満の交換局 (サーバ) が故障しても, 残りの交換局 (サーバ) の連結性が保障されていることになる。

⇒ 連結度  $\kappa(G)$  はネットワークの信頼度を反映し,  $\kappa(G)$  が大きなネットワークほど, その信頼性が高い。

一方, 前出の「辺連結度」 $\lambda(G)$  をこのネットワークに当てはめて考えれば,  $\lambda(G)$  未満の伝送路が故障しても, 交換局 (サーバ) の連結性が保障されていることになるので,  $\lambda(G)$  も一つのネットワークの信頼度の尺度として用いることができる。

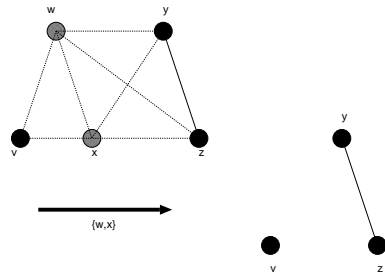


図 11: 分離集合  $\{w, x\}$  によってできる非連結グラフ。

(例題)

図 12 に与えられたグラフ  $G$  について以下の問い (1) ~ (5) に答えよ。

- (1)  $G$  の非連結化集合を一つ挙げよ。
- (2)  $G$  のカットセットを一つ挙げよ。
- (3)  $G$  の橋を挙げよ。
- (4)  $G$  の分離集合を一つ挙げよ。
- (5)  $G$  のカット点を一つ挙げよ。

(答え)

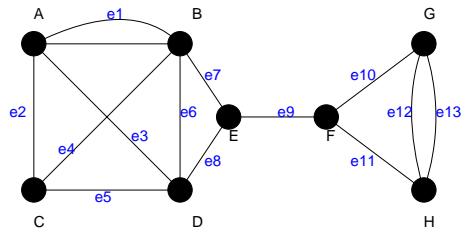


図 12: 問題文に与えられたグラフ  $G$ 。

- (1) グラフ  $G$  の非連結化集合は例えば,  $\{e_7, e_8\}, \{e_{10}, e_{11}\}, \{e_0, e_1, e_2, e_3\}$  などである.
- (2) グラフ  $G$  のカットセットは例えば,  $\{e_7, e_8\}, \{e_{10}, e_{11}\}, \{e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}\}$  などである.  
(カットセット)  $\subseteq$  (非連結化集合) であることに注意.
- (3) グラフ  $G$  の橋は  $e_9$  である.
- (4) グラフ  $G$  の分離集合は  $\{B, D, E\}$  などである.
- (5) グラフ  $G$  のカット点は  $E, F$  である.

#### 演習問題 4

前回の講義では隣接行列, 接続行列と呼ばれる行列を用いてグラフを表現する方法を学んだが, これら 2 つの行列の他にもグラフを表現するための行列は存在し, それらを用いることにより, より有効にグラフについての考察を進めることができる. ここでは, そのような行列であるタイセット行列, 及び, カットセット行列についての演習問題を解くことにより, これら行列に関する理解を深めることにしよう.

無向グラフ  $G$  のタイセット行列 (tie-set matrix)  $B$  とは, 各行が  $G$  の閉路  $L_i$  に, 各列  $j$  が枝  $j \in E(G)$  に対応し, 行列要素  $b_{ij}$  が

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & (L_i \text{ が枝 } j \text{ を含む}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (20)$$

と表される行列である.

一方, グラフ  $G$  のカットセット行列 (cut-set matrix)  $C$  とは, 各行  $i$  が  $G$  のカットセット  $C_i$  に, 各列  $j$  が枝  $j \in E(G)$  に対応し, 各行列要素がそれぞれ

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & (C_i \text{ が枝 } j \text{ を含む}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (21)$$

で与えられる. 例えば, 図 13 のグラフ  $G$  においては, タイセット行列, カットセット行列はそれぞれ

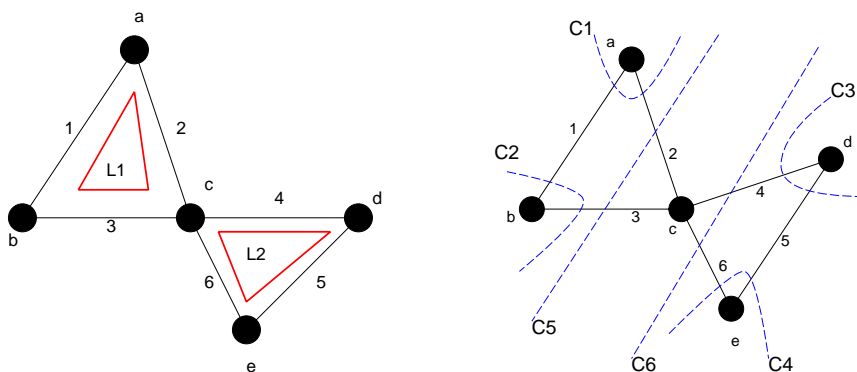


図 13: グラフ  $G$  の閉路 (左) とカットセット (右).

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

となる。これを踏まえて以下の問いに答えよ。

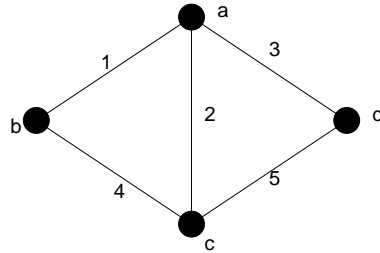


図 14: 問題のグラフ G.

- (1) 図 14 のグラフ G の閉路を全て求めよ (それぞれに  $L_1, L_2, \dots$  のようなラベルを付けよ).
- (2) グラフ G のカットセットを全て求めよ (それぞれに  $C_1, C_2, \dots$  のようなラベルを付けよ).
- (3) グラフ G のタイセット行列  $B$  を求めよ.
- (4) グラフ G のカットセット行列  $C$  を求めよ.
- (3) タイセット行列  $B$  とカットセット行列  $C$  の間に次の関係式が成り立つことを示せ.

$$BC^T \equiv \mathbf{0} \pmod{2} \quad (23)$$

ただし,  $C^T$  は行列  $C$  の転置行列を表し,  $\mathbf{0}$  は全ての成分がゼロである行列として定義される.

(# 注) : 今回のレポート締め切りは次週 17 日の講義開始時です。講義中にも言いましたが、講義開始時の回収以降に持って来てくださったレポートは原則として受け付けません。これは昨年度、レポートの解答を配布した後に回収したレポートの中で、配布した解答を大急ぎでそのまま写して提出したのではないかとと思われるものが散見されたからです。止むを得ない理由で講義開始時に教室に来れない場合には、予め井上の部屋までレポートを持ってきて頂くか、友人にレポートを提出してもらおうか等の対応をお願いいたします。