



# HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	2004年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一; Inoue, Jun-ichi
Description	当講義資料は著者のホームページ <a href="http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/">http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/</a> からダウンロードできます。 <a href="http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/">http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/</a>
Issue Date	2004
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/371">https://hdl.handle.net/2115/371</a>
Rights(URL)	<a href="https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/">https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/</a>
Type	learning object
File Information	GraphTheory04_8.pdf, 第8回講義ノート



# グラフ理論 配布資料 #8

教科書 pp. 83 ~ 102 の内容

担当：井上 純一 (情報エレクトロニクス系棟 8-13)

平成 16 年 6 月 7 日

## 演習問題 7 の解答例

1(1) 前回の講義で学習した Cayley の定理の証明の過程で得られた関係式：

$$T(n, k) = {}_{n-2}C_{k-1} (n-1)^{n-k-1} \quad (1)$$

に注目する。これは、 $n$  点からなる木における、ある点  $v$  の次数が  $k$  であるものの個数を与えるわけであるから、問題となっている「与えられた点  $v$  が端点である木の個数」は上関係式で  $k = 1$  と置いたものに等しい。従って、求める木の個数は

$$T(n, 1) = {}_{n-2}C_0 (n-1)^{n-2} = (n-1)^{n-2} \quad (2)$$

である。

(2) 求める確率  $P(n)$  は  $n$  個の点からなるラベル付き木の個数  $n^{n-2}$  で上の結果である  $T(n, 1)$  を割ったものに相当するので

$$P(n) = \frac{T(n, 1)}{n^{n-2}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-2} \quad (3)$$

が求める答えである。

(3) 自然対数  $e$  の定義から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \quad (4)$$

となり、題意が示された。

2. 隣接行列  $A$  により与えられるグラフ  $G$  は図 1 のようになる。従って、求める点行列  $D$  は

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

である。

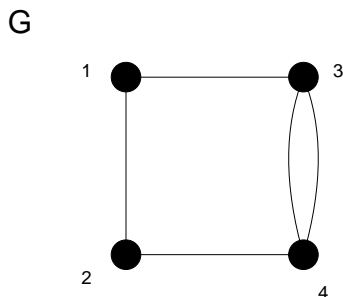


図 1: 隣接行列  $A$  によって定義されるグラフ  $G$ .

$i = j = 4$  で余因子展開することにより, グラフ  $G$  の全域木の個数  $\tau(G)$  は

$$\begin{aligned} \tau(G) &= (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -2 + 3 \cdot 3 = 7 \text{ (個)} \end{aligned} \tag{6}$$

となる.

(3) グラフ  $G$  の 7 通りの全域木を図示すると図 2 になる.

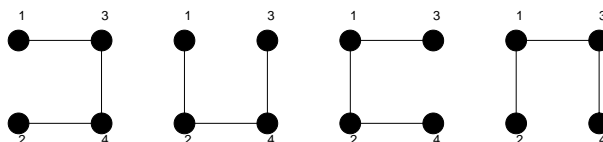


図 2: 隣接行列  $A$  によって定義されるグラフ  $G$  の全域木. ただし, 辺  $3 \rightarrow 4$  を削除するか, 辺  $4 \rightarrow 3$  を削除するかにより, これら 4 つのグラフの中で辺  $34$  があるグラフにはそれぞれ 1 つずつ異なるグラフが存在するので, 計 7 つの全域木が得られる.

(注 1)

隣接行列  $A$  と点行列  $D$  の間には, 次に定義する行列  $\delta$  を介して一般的な関係が存在する.

行列  $\delta$  はその要素  $\delta_{ij}$  が

$$\delta_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i) & (i = j \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases} \tag{7}$$

で定義される行列であり, この行列と, 隣接行列  $A$ , 点行列  $D$  の間には

$$D = \delta - A \tag{8}$$

なる関係がある. 各自がこの演習問題で扱ったグラフ  $G$  において, この関係式が成り立っていることを確認しておくこと.

(注 2)

ここで取り上げた点行列の行列式を計算することにより, ラベル付き全域木の数を数え上げる方法

を点行列式法と名付けるとすれば、この全域木の個数を勘定する方法としては、もう一つ、閉路行列式法と呼ばれる方法がある。ここでは、この方法に関していくつかコメントしておこう。

まず、行列要素  $R_{ij}$  が次のように与えられる閉路行列  $R$  を導入する<sup>1</sup>。

$$R_{ij} = \begin{cases} \text{閉路 } c_i \text{ を構成する辺の数} & (i = j) \\ \pm (\text{閉路 } c_i \text{ と } c_j \text{ に共通な辺の本数}) & (i \neq j) \end{cases} \quad (9)$$

ここで非対角成分の符号は  $c_i$  と  $c_j$  の共通な辺上で、これら 2 つの閉路の向きが同じであればプラスを、逆であればマイナスを選ぶことに約束する。

すると、この閉路行列  $R$  を有するグラフ  $G$  に関する全域木の総数  $\tau(G)$  は

$$\tau(G) = |R| \quad (10)$$

つまり、行列  $R$  の行列式で与えられる。この方法の有効性を確認するために、前回の演習問題 2. の隣接行列で与えられたグラフ (本配布資料図 1 のグラフ  $G$ ) に対して、この方法を適用してみよう。

まず、このグラフ  $G$  には閉路  $c_1, c_2$  が存在し、それぞれは点の順序でその向きを指定すれば、 $c_1 = 12431, c_2 = 343$  となる。従って、このグラフ  $G$  の閉路行列  $R$  は

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

である。よって、このグラフ  $G$  に対する全域木の総数  $\tau(G)$  は

$$\tau(G) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \quad (12)$$

となり、点行列式法による結果、つまり、前回の演習問題 2.(2) の答えと一致する。

ところで、あるグラフ  $G$  が与えられたとき、その全域木の総数を勘定する必要が生じた際、上述の点行列式法と閉路行列式法のどちらを使ったらよいのであろうか？ この疑問に対する一般的な答えはグラフ  $G$  に含まれる点の数が閉路の数より少ない場合には点行列式法を用い、その逆の場合には閉路行列式法を用いるのがよいということである。

上記指針の正しさを確認するため、閉路行列式法の点行列法に対する「優位性」が際立ってわかるような例を取りあげ、そのグラフに両方法を適用してみることにしよう。

図 3 に示したグラフ  $G$  に対して、まずは閉路行列式法を適用してみると、この平面グラフの閉路はいずれも三角形であり、 $c_1 = 1451, c_2 = 3453, c_3 = 1231$  である。従って、このグラフの閉路行列  $R$  は

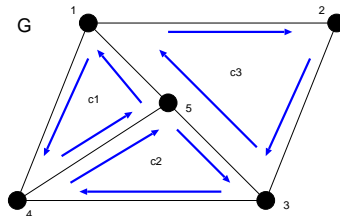


図 3: ここで点行列式法と閉路行列式法との計算手数を比較するために用いるグラフ  $G$ 。

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (13)$$

<sup>1</sup> この講義に出てきたものとしては 6 番目のグラフ行列。

となる. この行列式は直ちに計算できて, グラフ  $G$  の全域木の個数は

$$\tau(G) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times 8 = 24 \quad (14)$$

と求まる.

一方で点行列式法を使うとなると, 点行列を求めなければならないが, このグラフは 5 点からなるグラフなので, 点行列  $D$  のサイズは  $5 \times 5$  であり, 具体的に次のように与えられる.

$$D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (15)$$

従って, この行列  $D$  の 5 行 5 列における余因子によってグラフ  $G$  の全域木の本数が与えられて

$$\tau(G) = (-1)^{5+5} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \quad (16)$$

となる. しかし, 計算の手数から言うと, ここから所望の個数を求めるためには余因子展開法等を使って行列式を計算しなければならない. ここでは実際に展開を実行し, 行列式のサイズを段階的に落としていってみると

$$\begin{aligned} \tau(G) &= 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 3 \left\{ 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \right\} + \left\{ (-1) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \right\} \\ &+ \left\{ (-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \right\} = 3\{2 \times 8 - 3\} + \{-8 - 1\} + \{-1 - 5\} = 24 \end{aligned} \quad (17)$$

となり, 確かに閉路行列式法による結果と一致する. しかし, 計算の手間は閉路行列式法の方が少ないことがわかるであろう.

### レポート #6 に関するコメント

特にありません. よくできてました. 問題 (2)(3) に関しては細かく分類すればおびたしい数の示し方がありましたが, 論理的に正しいと判断できれば (当然ですが) 正解にしてあります. (4) の 2 つのグラフは両方正解です.

## 9 平面性

ここではグラフの平面性、つまり、一般のグラフが平面内にどの辺も交差することなく描くことのできる条件について学ぶ。また、そのようにして描けるグラフ — 平面グラフ — の性質、及び、与えられたグラフの「平面への描きやすさ」を測る指標である「交差数」「厚さ」についても詳しく見て行くことにする。なお、講義では教科書での説明順番を換え、まずオイラーの公式とその使い方 (pp. 90 ~ 97) を説明する。平面描画可能性の構成論的証明法、及び、Kuratowski (クラトウスキー) の定理とその系 (pp. 83 ~ 88) に関しては、トポロジー (位相幾何学) に関するかなりの素養と長い議論が必要となるため、本講義では省略する。また、「§ 14 他の種類の曲面上のグラフ」も講義では解説を省略するので、この部分に関しては各自が教科書を読んでおくように。

### 9.1 平面グラフとオイラーの公式

平面グラフ (planar graph) : どの 2 つの辺も、それが接続する点以外では幾何学的に交差しないように描かれたグラフ (図 4 参照)。

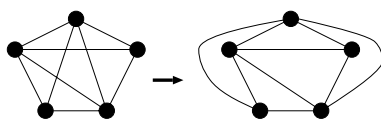


図 4: 平面グラフの例. 両者は位相同形形であるが、右のような描画において平面グラフとわかる。

面 (face) : 辺によって分割される領域

図 5 において、非有界な面  $f_4$  は無限面 (infinite face) と呼ばれる。

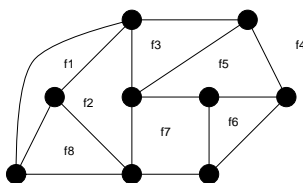


図 5: 8 つの領域に分割された平面グラフ. これら領域の中で、 $f_4$  は無限面である。

与えられたグラフ  $G$  を点数  $n$ 、辺数  $m$ 、面数  $f$  で特徴付けることにすると、これらの量の間にかなる関係があるとき、グラフ  $G$  は平面へ埋め込み可能であり、平面グラフとなりうるであろうか？ この答えはオイラーによって次の定理 (公式) としてまとめられている。

定理 13.1 (オイラーの公式)

グラフ  $G$  を連結な平面グラフとすると、次の公式が成り立つ。

$$n - m + f = 2 \quad (18)$$

(証明)

辺数  $m$  に関する数学的帰納法で証明する.

$m = 0$  のとき, 点数が 1 つだけの素グラフであるから  $n = 1$  であり, 面は無有限面が 1 つ, つまり,  $f = 1$  である. 従って

$$n - m + f = 1 - 0 + 1 = 2$$

となり, 関係式が成立する.

従って, 以下では  $m \neq 0$  のときを考える. このとき帰納法の仮定として

「 $m - 1$  本以下の辺を持つ全てのグラフ  $G$  について (18) が成り立つ」

としてみよう. この仮定のもとで, 辺数  $m$  のグラフに対しても関係式 (18) の成立が示せれば証明は終了である.

グラフ  $G$  が木の場合には,  $m$  本の辺を持つとすると, 当然のことながら  $m = n - 1$ ,  $f = 1$  (無限面) であるから, 関係式 (18) は

$$n - m + f = n - (n - 1) + 1 = 2$$

となり, 辺数  $m$  に対して成立する.

一方, グラフ  $G$  が木ではない場合. グラフ  $G$  の任意の辺を削除した場合, 辺数, 点数, 面数はそれぞれ

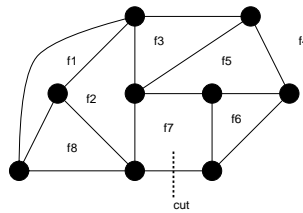


図 6: グラフの任意の辺を削除した場合の辺, 点, 面の数の変化量を考える. このグラフに関して言えば, 削除前:  $n = 9, m = 15, f = 8$  であり,  $9 - 15 + 8 = 2$  としてオイラーの公式を満たし, 削除後:  $n = 9, m = 14, f = 7$  であり,  $9 - 14 + 7 = 2$  としてオイラーの公式は満たされる.

のように変わるか, 調べると (例えば, 図 6 を参照)

$$\begin{cases} n & \Rightarrow & n \\ m & \Rightarrow & m - 1 \\ f & \Rightarrow & f - 1 \end{cases}$$

のように変化するから,  $m - 1$  本の辺に対して (18) が成立, すなわち, 上の矢印の右側の量に対して (18) が成り立つわけであるから

$$n - (m - 1) + f - 1 = 2$$

が成立すべきであり, この式を変形すると

$$n - m + f = 2$$

となり、変数  $m$  のときの関係式が導かれ、この成立が言えたことになる。(証明終わり).

まずはこの公式に慣れるため、次に挙げる例題を考えてみよう.

(例題)

オイラーの公式を用いて、次のグラフが平面的かどうか判別せよ.

- (1) 完全グラフ  $K_4$
- (2) 完全グラフ  $K_5$
- (3) 完全二部グラフ  $K_{3,3}$

(答え)

このオイラーの公式をダイレクトに用いずに、使いやすいように書き換えることから始めよう.

オイラーの公式の中には面数  $f$  が入ってくるが、この  $f$  は考えるグラフ  $G$  に同形であるグラフの中で、どのグラフを採用するかによって曖昧性がある. つまり、面の数は同形写像により変化する. 一方、点、辺の数は不変である. 従って、できることならば、この面数を他の量で置き換えて評価したい. この目的のために、まず、グラフ  $G$  に関していくつかの定義をしておく.

内周  $\kappa$ : グラフ  $G$  の最短の閉路長.

$d(F)$ : グラフ  $G$  における面  $F$  に含まれる点の次数和.

これらの定義のもとで、グラフ  $G$  の任意面  $F$  に対して、次の不等式が成り立つ.

$$\kappa \leq d(F) \tag{19}$$

例えば、完全グラフ  $K_4$  の描画としては図 7 に載せた 2 通りのどちらも正しいが (もちろん、平面的なのは右側)、内周  $\kappa$  はどちらも  $\kappa = 3$  である. 従って、直ちに

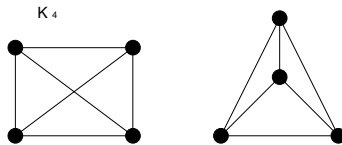


図 7: 完全グラフ  $K_4$  の二つの描画法.

$$\kappa f \leq \sum_{F \in \mathbf{F}(G)} d(F) = 2m \tag{20}$$

が成立する. ここで、 $\mathbf{F}(G)$  はグラフ  $G$  に含まれる面の集合であり、上の関係式の最後の等式では前出の握手補題を用いた. この式とオイラーの公式から面数  $f$  を消去すると

$$\kappa(2 - n + m) \leq 2m \tag{21}$$

つまり、グラフ  $G$  が平面的となるためには、辺数  $m$  が上から押さえられて (辺数が多くなると、辺と辺が交差する可能性も大きくなるので、平面グラフの辺数に上限があるのは自然である)

$$m \leq \frac{\kappa(n-2)}{\kappa-2} \tag{22}$$

なる不等式を満たさなければならない。以下ではこの不等式をもって、与えられたグラフに関する平面性の判別式としよう。

(1) 完全グラフ  $K_4$  :

このグラフにおいて、 $n = 4$ ,  $m = {}_4C_2 = 6$ ,  $\kappa = 3$  であるから、判別式 (21) は

$$6 \leq \frac{3 \cdot (4 - 2)}{3 - 2} = 6 \quad (23)$$

となり成立する。従って、完全グラフ  $K_4$  は平面的である。

(2) 完全グラフ  $K_5$  :

このグラフにおいては、 $n = 5$ ,  $m = {}_5C_2 = 10$ ,  $\kappa = 3$  であるから、判別式 (21) は

$$10 \leq \frac{3 \cdot (5 - 2)}{3 - 2} = 9 \quad (24)$$

となり、不成立。従って、完全グラフ  $K_5$  は平面的ではない。

(3) 完全二部グラフ  $K_{3,3}$  :

このグラフに関しては、 $n = 6$ ,  $m = 3^2 = 9$ ,  $\kappa = 4$  であるから、判別式 (21) は

$$9 \leq \frac{4 \cdot (6 - 2)}{4 - 2} = 8 \quad (25)$$

となり、不成立。従って、完全二部グラフ  $K_{3,3}$  は平面的ではない。

以上はグラフ  $G$  が連結グラフである場合の議論であった。しかし、グラフ  $G$  が非連結であり、 $k$  個の成分を持つ場合、オイラーの公式がどのように修正されるのかを見ることは実用的にも意義深い。

### 系 13.3

平面グラフ  $G$  には、 $n$  個の点、 $m$  本の辺、 $f$  個の面、 $k$  個の成分があるとする。このとき

$$n - m + f = k + 1 \quad (26)$$

である。

(証明)

グラフ  $G$  に  $k$  個の成分がある場合には、無限面を  $k - 1$  回だけ余分に勘定するので、面数は  $f - (k - 1)$  であり、これについてオイラーの公式を書き出してみると

$$n - m + \{f - (k - 1)\} = 2 \quad (27)$$

となり、これを整理すると

$$n - m + f = k + 1 \quad (28)$$

となり, 所望の関係式が得られる. (証明終わり).

### 系 13.4

(1) 連結単純平面グラフ  $G$  が,  $n(\geq 3)$  個の点と  $m$  本の辺を持つとき

$$m \leq 3n - 6 \quad (29)$$

が成り立つ.

(2) さらに,  $G$  に三角形が無ければ

$$m \leq 2n - 4 \quad (30)$$

が成立する.

(証明)

(1) グラフ  $G$  に含まれる最小な面は, 3 点からなる閉路, すなわち, 三角形であるから

$$3 \leq d(F) \quad (31)$$

が成り立つ. 従って, 握手補題により直ちに

$$3f \leq \sum_{F \in \mathbf{F}(G)} d(F) = 2m \quad (32)$$

となり, これとオイラーの公式:  $f = 2 - n + m$  より, 面数  $f$  を消去すると所望の不等式:

$$m \leq 3n - 6 \quad (33)$$

が得られる.

(2) 明らかに三角形が無い場合には,  $G$  に含まれる最小の面は 4 点からなる閉路であり, 不等式

$$4 \leq d(F) \quad (34)$$

が成り立つ. 従って, 握手補題から直ちに

$$4f \leq \sum_{F \in \mathbf{F}(G)} d(F) = 2m \quad (35)$$

が得られ, これとオイラーの公式から面数  $f$  を消去することにより, 所望の不等式

$$m \leq 2n - 4 \quad (36)$$

が得られる.

(証明終わり).

### 系 13.6

全ての単純平面グラフには次数 5 以下の点がある.

(証明)

グラフ  $G$  の任意の頂点  $v$  に対して

$$\delta \leq \deg(v) \quad (37)$$

とすると、握手補題と系 13.4(1) より

$$\delta n \leq \sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2m \leq 2(3m - 6) = 6m - 12 \quad (38)$$

すなわち

$$\delta \leq 6 - \frac{12}{n} \quad (39)$$

が成り立ち、従って、次数  $\delta$  に対して

$$\delta \leq 5 \quad (40)$$

が成立する。(証明終わり)<sup>2</sup> .

## 9.2 交差数と厚さ

グラフを 2 次元平面内に埋め込む場合、そのグラフがオイラーの公式より埋め込み不可能であるとわかったとしても、どの程度、埋め込むことが困難であるのか、を定量的に測る指標が必要となる。そこで、ここでは交差数と厚さという 2 つの指標について説明する。

交差数 (crossing number)  $\text{cr}(G)$  : グラフ  $G$  を平面描写した際に生じる、辺の最小交差の数.

厚さ (thickness)  $t(G)$  : いくつかの平面グラフを重ね合わせてグラフ  $G$  を作る時に必要な平面グラフの数.

(例題)

$r$  と  $s$  が偶数のとき

$$\text{cr}(K_{r,s}) \leq \frac{1}{16} rs(r-2)(s-2)$$

を示せ.

(答え)

図 8 のように黒、白丸を配置し、黒丸と白丸を結んでできる線分の交差点を勘定すればよい。このような配置の仕方による交差数は明らかに図 9 のような場合よりも少ない。さて、対称性より、図 8 の第 3 象限だけを考えればよい。Y 軸上の点を原点から近い順に  $v_1, v_2, \dots, v_{s/2}$  とし、X 軸上の点を原点から近い順に  $w_1, w_2, \dots, w_{r/2}$  と名前を付けることにする。すると、 $v_{s/2}$  と  $w_1, w_2, \dots, w_{r/2}$  を結ぶ線分と、 $v_{s/2-1}$  と  $w_1, w_2, \dots, w_{r/2}$  を結ぶ線分の交点の数  $q_1$  は

$$q_1 = \left(\frac{r}{2} - 1\right) + \left(\frac{r}{2} - 2\right) + \dots + \left(\frac{r}{2} - \left(\frac{r}{2} - 2\right)\right) + 1 \quad (41)$$

<sup>2</sup> この系での結論は後に学ぶ「グラフの彩色」の節の定理 17.2 の証明で用いることになります。

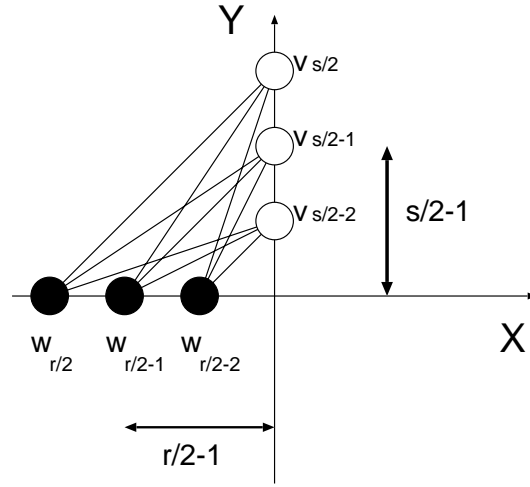


図 8: 線分の交点の個数を数える.

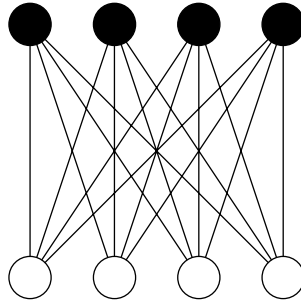


図 9:  $r = s = 4$  の場合の配置の一例.

である. 同様にして  $v_{s/2}$  と  $w_1, w_2, \dots, w_{r/2}$  を結ぶ線分及び  $v_{s/2-1}$  と  $w_1, w_2, \dots, w_{r/2}$  を結ぶ線分と  $v_{s/2-2}$  と  $w_1, w_2, \dots, w_{r/2}$  とを結ぶ線分の交点の数  $q_2$  は

$$q_2 = 2 \left( \frac{r}{2} - 1 \right) + 2 \left( \frac{r}{2} - 2 \right) + \dots + 2 \left( \frac{r}{2} - \left( \frac{r}{2} - 2 \right) \right) + 2 \quad (42)$$

となる. 同様の定義で  $q_3$  は

$$q_3 = 3 \left( \frac{r}{2} - 1 \right) + 3 \left( \frac{r}{2} - 2 \right) + \dots + 3 \left( \frac{r}{2} - \left( \frac{r}{2} - 2 \right) \right) + 3 \quad (43)$$

となり,  $v_1$  と全ての線分の交点の個数  $q_{s/2-1}$  は

$$q_{s/2-1} = \left( \frac{s}{2} - 1 \right) \left( \frac{r}{2} - 1 \right) + \left( \frac{s}{2} - 1 \right) \left( \frac{r}{2} - 2 \right) + \dots + \left( \frac{s}{2} - 1 \right) \left( \frac{r}{2} - \left( \frac{r}{2} - 2 \right) \right) + \left( \frac{s}{2} - 1 \right) \quad (44)$$

である.

従って, 第 3 象限内に現れる交点の個数  $Q$  は

$$\begin{aligned} Q &= q_1 + q_2 + \dots + q_{s/2-1} \\ &= \left( \frac{r}{2} - 1 \right) + \left( \frac{r}{2} - 2 \right) + \dots + \left( \frac{r}{2} - \left( \frac{r}{2} - 2 \right) \right) + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\left(\frac{r}{2}-1\right) + 2\left(\frac{r}{2}-2\right) + \cdots + 2\left(\frac{r}{2}-\left(\frac{r}{2}-2\right)\right) + 2 \\
& + 3\left(\frac{r}{2}-1\right) + 3\left(\frac{r}{2}-2\right) + \cdots + 3\left(\frac{r}{2}-\left(\frac{r}{2}-2\right)\right) + 3 \\
& + \cdots \\
& + \cdots \\
& + \left(\frac{s}{2}-1\right)\left(\frac{r}{2}-1\right) + \left(\frac{s}{2}-1\right)\left(\frac{r}{2}-2\right) + \cdots + \left(\frac{s}{2}-1\right)\left(\frac{r}{2}-\left(\frac{r}{2}-2\right)\right) + \left(\frac{s}{2}-1\right) \\
& \equiv p_1 + p_2 + \cdots + p_{s/2-1}
\end{aligned} \tag{45}$$

となる.

ここで

$$\begin{aligned}
p_1 & \equiv \left(\frac{r}{2}-1\right) + 2\left(\frac{r}{2}-1\right) + \cdots + \left(\frac{s}{2}-1\right)\left(\frac{r}{2}-1\right) \\
& = \left(\frac{r}{2}-1\right) \sum_{k=1}^{s/2-1} k \\
& = \left(\frac{r}{2}-1\right) \frac{1}{2} \frac{s}{2} \left(\frac{s}{2}-1\right) = \frac{s}{4} \left(\frac{r}{2}-1\right) \left(\frac{s}{2}-1\right)
\end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}
p_2 & \equiv \left(\frac{r}{2}-2\right) + 2\left(\frac{r}{2}-2\right) + \cdots + \left(\frac{s}{2}-1\right)\left(\frac{r}{2}-2\right) \\
& = \left(\frac{r}{2}-2\right) \sum_{k=1}^{s/2-1} k = \frac{s}{4} \left(\frac{r}{2}-2\right) \left(\frac{s}{2}-1\right)
\end{aligned} \tag{47}$$

そして

$$p_{s/2-1} = \sum_{k=1}^{s/2-1} k = \frac{s}{4} \left(\frac{s}{2}-1\right) \tag{48}$$

である. 従って  $Q$  は

$$\begin{aligned}
Q & = p_1 + p_2 + \cdots + p_{s/2-1} \\
& = \frac{s}{4} \left(\frac{s}{2}-1\right) \left(\frac{r}{2}-1\right) + \frac{s}{4} \left(\frac{s}{2}-1\right) \left(\frac{r}{2}-2\right) + \cdots \\
& + \frac{s}{4} \left(\frac{s}{2}-1\right) \left\{ \frac{r}{2} - \left(\frac{r}{2}-2\right) \right\} + \frac{s}{4} \left(\frac{s}{2}-1\right) \\
& = \frac{s}{4} \left(\frac{s}{2}-1\right) \sum_{k=1}^{r/2-1} \left(\frac{r}{2}-k\right) \\
& = \frac{s}{4} \left(\frac{s}{2}-1\right) \frac{r}{2} \sum_{k=1}^{r/2-1} -\frac{s}{4} \left(\frac{s}{2}-1\right) \sum_{k=1}^{r/2-1} k \\
& = \frac{s}{4} \left(\frac{s}{2}-1\right) \frac{r}{2} \left(\frac{r}{2}-1\right) - \frac{s}{4} \left(\frac{s}{2}-1\right) \frac{r}{2} \left(\frac{r}{2}-1\right) \frac{1}{2} \\
& = \frac{sr}{8} \left(\frac{s}{2}-1\right) \left(\frac{r}{2}-1\right) \left\{ 1 - \frac{1}{2} \right\} \\
& = \frac{sr}{16} \left(\frac{s}{2}-1\right) \left(\frac{r}{2}-1\right) = \frac{sr}{16 \cdot 4} (s-2)(r-2)
\end{aligned} \tag{49}$$

よって, 結局, 第1~第4象限に現れる交点の総数  $Q_{\text{total}}$  は

$$Q_{\text{total}} = 4 \times Q = \frac{sr}{16} (s-2)(r-2) \tag{50}$$

となる。これから交差数  $K_{r,s}$  の上限が

$$\text{cr}(K_{r,s}) \leq \frac{1}{16}rs(r-2)(s-2) \quad (51)$$

で与えられる。つまり、 $K_{r,s}$  を平面に描いたときの交差数の最小値は  $rs(r-2)(s-2)/16$  を超えることはない（この値を下回る配置が存在するかもしれないが、現段階では示せていない）。

(例題)

単純グラフ  $G$  に  $n(\geq 3)$  個の点、及び、 $m$  本の辺があるとき、 $G$  の厚さ  $t(G)$  は不等式：

$$t(G) \geq \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil \quad (52)$$

$$t(G) \geq \left\lceil \frac{m+3n-7}{3n-6} \right\rceil \quad (53)$$

を満たすことを示せ。

(答え)

厚さは整数でなければならないことと、系 13.4 (1) より

$$\begin{aligned} t(G) &\geq \left\lceil \frac{\text{辺の総数}}{\text{平面グラフとなるための辺の上限}} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil \end{aligned} \quad (54)$$

が成り立つ。

一方、この結果と正の整数  $a, b$  に対して成り立つ関係式：

$$\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil = \left\lfloor \frac{(a+b-1)}{b} \right\rfloor \quad (55)$$

を用いることにより、 $a = m$ ,  $b = 3n - 6$  として直ちに (53) の成立が言える。

(例題)

(1) 完全グラフ  $K_n$  の厚さ  $t(K_n)$  は次不等式を満たすことを示せ。

$$t(K_n) \geq \left\lceil \frac{1}{6}(n+7) \right\rceil \quad (56)$$

(2) 完全二部グラフ  $K_{r,s}$  の厚さ  $t(K_{r,s})$  が次不等式を満たすことを示せ。

$$t(K_{r,s}) \geq \left\lceil \frac{rs}{2(r+s)-4} \right\rceil \quad (57)$$

(答え)

(1) 完全グラフ  $K_n$  の辺の数は  $n(n-1)/2$  であるから、不等式：

$$t(G) \geq \left\lceil \frac{m+3n-7}{3n-6} \right\rceil \quad (58)$$

に代入して

$$\begin{aligned} t(K_n) &\geq \left\lfloor \frac{\frac{n(n-1)}{2} + 3n - 7}{3n - 6} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{n^2 + 5n - 14}{2(3n - 6)} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{n + 7}{6} \right\rfloor \end{aligned} \tag{59}$$

となり、題意の不等式は満たされることがわかる。

- (2)  $K_{r,s}$  においては、A グループの点が  $r$  個、B グループの点が  $s$  個で、A グループのそれぞれの点が B グループのそれぞれの点と結ばれるので、辺の数  $m$  及び点の数  $n$  は

$$m = rs \tag{60}$$

$$n = r + s \tag{61}$$

で与えられる。また、 $K_{r,s}$  には三角形が含まれないので、 $K_{r,s}$  の辺の数の上限は

$$m \leq 2n - 4 \equiv m_0 \tag{62}$$

で与えられる。従って、完全二部グラフ  $K_{r,s}$  の厚さ  $t(K_{r,s})$  は

$$\begin{aligned} t(K_{r,s}) &\geq \left\lfloor \frac{m}{m_0} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{m}{2n - 4} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{rs}{2(r + s) - 4} \right\rfloor \end{aligned} \tag{63}$$

となり、確かに題意の不等式を満たしている。

### 演習問題 8

- 閉路行列式法を用いて完全グラフ  $K_4$  の全域木の総数  $\tau(K_4)$  を求めよ。
- オイラーの公式を用いてピーターソン・グラフは平面描写可能かどうかを判定せよ。
- 講義中に見た系 13.4 を参考にして以下の問いに答えよ。
  - 連結グラフ  $G$  に三角形、四角形、及び、五角形が無い場合、グラフ  $G$  が平面的となるために辺数  $m$  が満たすべき不等式を求めよ。
  - (1) の議論を一般化し、グラフ  $G$  に  $K$  角形まで無い場合、グラフ  $G$  が平面的となるために辺数  $m$  が満たすべき不等式を求めよ。
  - (2) の結果で  $K \rightarrow \infty$  の極限をとった場合に辺数  $m$  の満たすべき不等式を求め、この結果が何を意味するのかを簡単に説明せよ。