



# HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	2004年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一; Inoue, Jun-ichi
Description	当講義資料は著者のホームページ <a href="http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/">http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/</a> からダウンロードできます。 <a href="http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/">http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/</a>
Issue Date	2004
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/371">https://hdl.handle.net/2115/371</a>
Rights(URL)	<a href="https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/">https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/</a>
Type	learning object
File Information	GraphTheory04_9.pdf, 第9回講義ノート



# グラフ理論 配布資料 #9

教科書 pp. 102 ~ 124 の内容

担当：井上 純一 (情報エレクトロニクス系棟 8-13)

平成 16 年 6 月 18 日

## 演習問題 8 の解答例

1. 図 1 のように 3 つの閉路を  $c_1 = 1231, c_2 = 1241, c_3 = 1341$  と定める. すると, 閉路行列  $R$  は

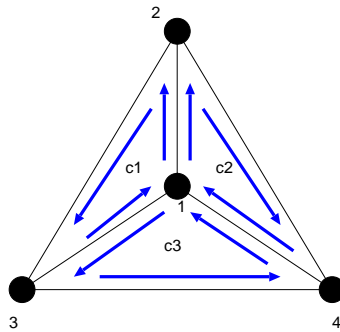


図 1: 完全グラフ  $K_4$  とその基本閉路  $c_1, c_2, c_3$ .

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

として与えられる.

ところで, 図のように閉路を選んだとき, 一番外側の 234 なる三角形を 4 番目の閉路として選んではいけないのか, あるいは, 閉路の選び方に任意性がある場合にはどうするのか, が問題になるのだが, その際は基本閉路を選ぶことにする. 基本閉路とは例えば図 2 のような完全グラフ  $K_4$  の全域木に対し, これに 1 つずつ辺を付加してできる閉路のことである. 図 2 の全域木に辺 23 を付加すると閉路が一つでき, それが  $c_1$  である. また, 辺 24 を付加すれば閉路  $c_2$  が, 辺 34 を付加すれば閉路  $c_3$  ができることになり, これらは全て基本閉路である. 閉路行列法を用いるときには基本閉路を選べば十分である. その際, 上述のように一番外側の三角形を 4 番目の閉路としてカウントしてもよいが, 結果として得られる全域木の総数は同じになる (各自が実際に余因子展開を用いて確かめてみること).

さて, このようにして定義される基本閉路に対し, 閉路行列 (1) を作れば, 完全グラフ  $K_4$  の全域木の総数  $\tau(K_4)$  は

$$\tau(K_4) = |R|$$

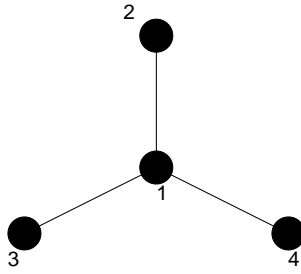


図 2: 完全グラフ  $K_4$  の全域木.

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 16 \quad (2)$$

となり, 計 16 個の全域木が存在することがわかる.

2. ピーターソン・グラフの場合には, 点数  $n$ , 辺数  $m$ , 及び内周の長さ  $\kappa$  はそれぞれ  $n = 10, m = 15, \kappa = 5$  であるから, これらを判別式 :

$$m \leq \frac{\kappa(n-2)}{\kappa-2} \quad (3)$$

に代入し,

$$15 \leq \frac{5 \cdot (10-2)}{5-2} = \frac{40}{3} = 13.3\dots \quad (4)$$

となるので不成立. 従って, ピーターソン・グラフは平面的ではないと結論つけられる.

3.

- (1) 三角形, 四角形が無いならば  $d(F)$  は

$$5 \leq d(F) \quad (5)$$

を満たす. 従って, この不等式は握手補題により

$$5f \leq \sum_{F \in \mathbf{F}(G)} d(F) = 2m \quad (6)$$

と書き直すことができるから, これとオイラーの公式:  $f = 2 - n + m$  より, 面数  $f$  を消去し, 辺数  $m$  についての不等式 :

$$m \leq \frac{5}{3}(n-2) \quad (7)$$

が成り立つ.

- (2) 一般に  $K$  角形まで無い場合,  $d(F)$  は

$$K+1 \leq d(F) \quad (8)$$

を満たす。従って、握手補題から

$$(K+1)f \leq \sum_{F \in \mathcal{F}(G)} d(F) = 2m \quad (9)$$

と書き直せるので、これとオイラーの公式  $f = 2 - n + m$  から  $f$  を消去し、 $m$  に関する不等式：

$$m \leq \left( \frac{K+1}{K-1} \right) (n-2) \quad (10)$$

が成り立つ。

(3) (2) の結果で、 $K \rightarrow \infty$  の極限をとる。しかし、必ず  $K \leq n$  であるから、この場合には  $K = n$  という条件下で  $n, K \rightarrow \infty$  の極限を考えなければならない点に注意する。すると次の不等式が得られる。

$$m \leq \left( \frac{n+1}{n-1} \right) (n-2) = n - 2 + 2 \left\{ 1 + \frac{1}{n-1} \right\} = n \quad (n \rightarrow \infty) \quad (11)$$

つまり、 $K(\infty)$  角形まで無いということは、グラフ  $G$  は  $n$  角形 (ただし  $n$  も無限大なので、いわば「無限角形」) 1 個からなるグラフである。

ちなみに、 $n$  が有限のまま (10) の右辺で  $K \rightarrow \infty$  の極限をとってしまうと  $m \leq n - 2$  なる不等式が得られるが、閉路が全く無い「木」の場合の辺数が  $n - 1$  であることを考えると (ある意味で「無限角形」まで無い状況だと言える)、 $n - 1 \leq n - 2$  となり (もちろん矛盾)、この場合、「一つだけ成分を持つ  $n$  点からなるグラフ」としてはドウニモコウニモ描きようがなくなってしまう。従って、極限をとる際には  $K = n$  の条件の下で  $n$  を無限大に飛ばす必要があるわけである。

### レポート #7 に関するコメント

以下に 2 点だけコメントしておきます。

- 配布の解答に間違いがありました。問題 2. (3) においてグラフ  $G$  の全域木を 7 つ描きましたが (配布資料 #8 の図 2)、これは間違いで正解は図 3 のようになります。この図では 4 つしか全域木がない

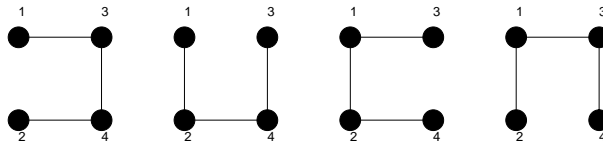


図 3: 隣接行列  $A$  によって定義されるグラフ  $G$  の全域木。

ように見えますが、辺  $3 \rightarrow 4$  を削除するか、辺  $4 \rightarrow 3$  を削除するかにより、これら 4 つのグラフの中で辺  $34$  があるグラフにはそれぞれ 1 つずつ異なるグラフが存在するので、計 7 つとなります<sup>1</sup>

<sup>1</sup> グラフ理論講義 URL : [http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j\\_inoue/graph2004/graph2004.html](http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/graph2004/graph2004.html) からダウンロードできる pdf ファイルは既に修正してあります。

- 問題 1. (3) で  $P(n)$  の極限値を「自然対数  $e$  の定義であるから」として簡単に

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \quad (12)$$

としましたが、この極限値の導出に関してもう少し説明した方が親切だったかもしれません。様々な示し方があるかとは思いますが、例えば次の極限値：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad (13)$$

を考えることによって「間接的」に (12) を示すこともできます。(13) の極限値はこのままでは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0 \quad (14)$$

なので、 $\infty \times 0$  を評価することになって厄介なのですが、 $\log(1 - 1/n)$  を  $(1/n)$  で展開すれば

$$\log \left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad (15)$$

となりますから、

$$n \log \left(1 - \frac{1}{n}\right) = -1 - \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (16)$$

であり、極限値 (13) は簡単に

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = -1 \quad (17)$$

のように求めることができます。従って、 $n \rightarrow \infty$  のときに上式の  $\log$  の中身が  $1/e$  に近づくべきことは明らかであり、これで極限値 (12) が示せたこととなります。

## 9.4 双対グラフ

ここでは次節の「彩色」を初めとし、様々な場面に応用されている重要な概念である「双対性」「双対グラフ」について学ぶ。

### 9.4.1 幾何学的双対グラフの作り方とその性質

幾何学的双対グラフは、与えられた平面グラフから、あるルールに従って作られる。まず、この双対グラフの作り方を知らなければならない。そこで、ここではまず、幾何学的双対グラフの描き方を学び、具体的に与えられた平面グラフの幾何学的双対グラフを求めてみる。次いで、一般のグラフにおいて、そのグラフと双対グラフの間にどのような関係が成り立つのかを詳しく見て行く。

#### 幾何学的双対グラフの作り方

以下の作り方を図に載せたグラフ  $G$  を参考にしながら見て頂きたい。

- (1) グラフ  $G$  の各面  $f$  の内側の点  $v^*$  を選ぶ。⇒ こうして打たれる点が双対グラフ  $G^*$  の点となる。
- (2) グラフ  $G$  の各辺  $e$  に対応させて、 $e$  にできるだけ交差する線  $e^*$  を描いて、 $e$  に接する 2 つの面  $f$  の点  $v^*$  を結ぶようにする。⇒ こうしてできる辺が双対グラフ  $G^*$  の辺となる。

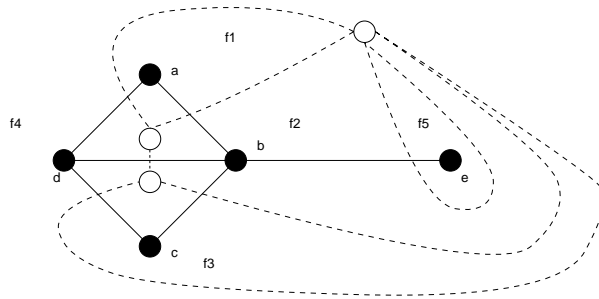


図 4: 考える平面グラフ  $G$  とその幾何学的双対 (図の白丸と破線からなるグラフ).

具体的に双対グラフの作り方を練習してみるために次の例題をやってみよう.

(例題)

完全グラフ  $K_4$  の双対グラフは、やはり、完全グラフ  $K_4$  であることを示せ.

(答え)

上に提示した「作り方」に従って、双対グラフを作ってみると、図 5 の右側のようになり、これは完全グラフ  $K_4$  である. 上に提示した「作り方」によってグラフ  $G$  から作ることのできる双対グラフ  $G^*$  の点、辺、

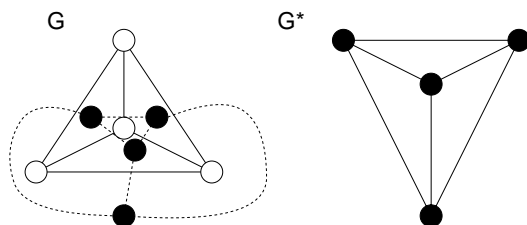


図 5: 完全グラフ  $K_4$  とその幾何学的双対グラフ (右).

面の数  $n^*$ ,  $m^*$ , 及び,  $f^*$  はもとのグラフ  $G$  のそれぞれの数とどのように関係するのであろうか? これに関しては次の補題にまとめられている.

補題 15.1

平面連結グラフ  $G$  には  $n$  個の点,  $m$  本の辺,  $f$  個の面があるとする. このとき, その幾何学的双対グラフ  $G^*$  には  $n^*$  個の点,  $m^*$  本の辺,  $f^*$  個の面があるならば

$$n^* = f, \quad m^* = m, \quad f^* = n$$

が成り立つ.

(証明)

双対グラフの作り方から、「グラフ  $G$  の各面に双対グラフの点を打ち込む」ことから  $n^* = f$  が、「グラフ

G の各辺  $e$  に交差するように双対グラフの辺  $e^*$  を描く」ということから  $m^* = m$  が直ちに言える。  
 一方、双対グラフについてのオイラーの公式から

$$f = n^* = 2 + m^* - f^* \quad (18)$$

であるから、これをグラフ G に関するオイラーの公式

$$n - m + f = 2 \quad (19)$$

つまり、 $n - m^* + f = 2$  に代入して整理すると  $n - m^* + 2 + m^* - f^* = 2$ 、すなわち

$$f^* = n \quad (20)$$

が得られる。(証明終わり)。

#### 定理 15.2

グラフ G が連結平面ならば、 $G^{**}$  はグラフ G と同形である。

(証明略) (各自、教科書 p.104 を読んでおくこと)

この定理に関連する問題 ⇒ 今週の **演習問題 9** 参照。

#### 定理 15.3

平面グラフ G の幾何学的双対を  $G^*$  とする。このとき、グラフ G の各辺の、ある集合がグラフ G において閉路であるための必要十分条件は、それに対応する双対グラフ  $G^*$  の辺集合が、グラフ  $G^*$  においてカットセットになっていることである。

(証明)

平面グラフ G の任意の閉路 C を選ぶと、C の中には面が一つ以上あるので、この面内に点を一つ置き、これを双対グラフ  $G^*$  の点  $v^*$  に対応させる。この点  $v^*$  と閉路 C を構成する各辺を交差させるように新たな辺を引き、これを双対グラフの辺に対応させると、この手続きによって、交差されたグラフ G における辺集合  $\{\overline{c_1c_2}, \overline{c_2c_3}, \overline{c_3c_4}, \overline{c_4c_5}, \overline{c_5c_6}, \overline{c_6c_1}\}$  の元に対応する幾何学的双対グラフ  $G^*$  の辺集合  $\{\overline{v^*a}, \overline{v^*b}, \overline{v^*c}, \overline{v^*d}, \overline{v^*e}, \overline{v^*f}\}$  は、双対グラフ  $G^*$  においてはカットセットとなっている (図 6 参照)。つまり、これらを除去すると、 $G^*$  は  $v^*$  とそれ以外の部分に分離する。

また、以上の手続きの逆をたどることにより題意は示される。(証明終わり)。

#### 系 15.4

グラフ G の辺のある集合が G のカットセットであるための必要十分条件は、対応する幾何学的双対グラフ  $G^*$  の辺集合が  $G^*$  の閉路となることである。

証明を与える前に、図 7 に載せたグラフ G に対して、上記の事実を確かめておこう。グラフ G のある辺集合  $\{\overline{17}, \overline{28}, \overline{39}, \overline{410}, \overline{511}, \overline{612}\}$  がグラフ G のカットセットであるが、これに対応する幾何学的双対グラフ  $G^*$  の辺集合は  $\{\overline{fa}, \overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd}, \overline{de}, \overline{ef}\}$  であり、これらは  $G^*$  において閉路となっている。2 つの集合の要素間に

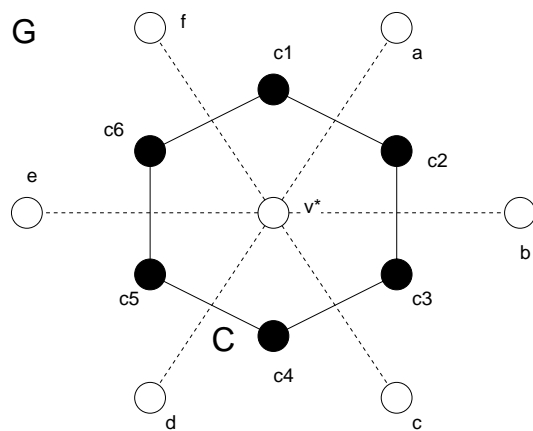


図 6: グラフ  $G$  に含まれる閉路  $C$  と,  $G$  の幾何学的双対グラフの一部 (白丸と破線).

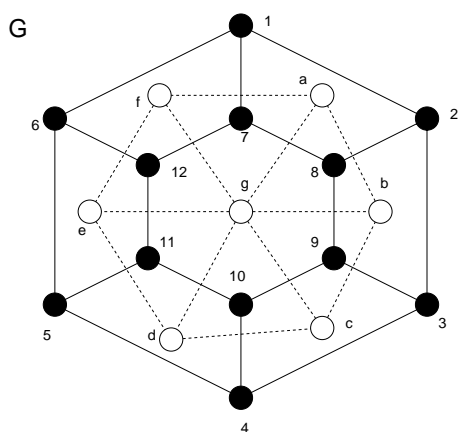


図 7: グラフ  $G$  (黒丸と実線) とその幾何学的双対グラフ (白丸と破線).

は 1 対 1 の対応関係がある.

(証明)

定理 15.3 を  $G \rightarrow G^*$ ,  $G^* \rightarrow G^{**}$  として読みかえると, 定理 15.2 から, グラフ  $G$  が平面連結ならば,  $G^{**} \cong G$  であるから,

「平面グラフ  $G^*$  の幾何学的双対を  $G$  とすると,  $G^*$  のある集合が  $G^*$  において閉路であるための必要十分条件は, それに対応する  $G$  の辺集合が  $G$  においてカットセットであることである」

と言える. 従ってこの系を示すことができた. (証明終わり).

(例題)

- (1) 車輪の双対は車輪であることを示せ.
- (2) 平面グラフ  $G$  が非連結ならば,  $G^{**}$  は  $G$  に同形でないことを例で示せ.
- (3)  $G$  が連結な平面グラフであるとき,  $G$  の全域木は  $G^*$  のある全域木の補グラフに対応することを例で示せ.

(解答)

- (1) 「車輪  $W_n$  とは,  $n-1$  個の点を持つ閉路  $C_{n-1}$  に一つの新しい点  $v$  を加え,  $v$  と他の全ての  $n-1$  個の点をつないでできるグラフである」ことを思い出す. 補題 15.1 より  $n^* = f$ , つまり, 双対グラフの点の数は元々のグラフの面数に等しく,  $G \equiv C_{n-1}$  の無限面を除く面数は  $n-1$  個であり, 従って,  $n-1$  個のそれぞれの面に  $n-1$  個の点を一一つ置き (これらが  $G^*$  中の  $n-1$  個の点になる), それらを結んで  $C_{n-1}^*$  を作り, 最後に無限面に一点  $v^*$  を置き (これで  $G^*$  の点の総数は  $n$ ), それと  $C_{n-1}^*$  の  $n-1$  個の点とを相互に結べば (これらの線が  $G$  の各辺と一辺ずつ交差することは明らか) 出来上がるグラフは  $W_n^*$  であり, 従って, 「車輪の双対は車輪である」ことがわかる. 図 8 に  $W_7$  の場合の例を示そう.

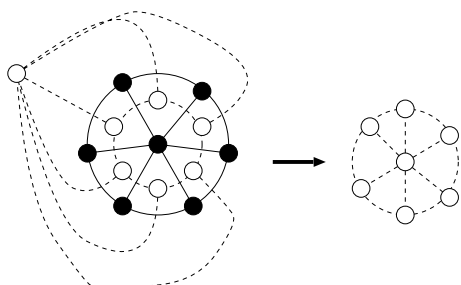


図 8:  $W_7$  (左図の黒丸と実線) とその幾何学的双対グラフ (左図の白丸と破線及び右図, これらは同形である).

- (2) まず, 例として図 9 の黒丸と実線で与えられる非連結グラフ  $G$  を考える. この非連結なグラフ  $G$  から

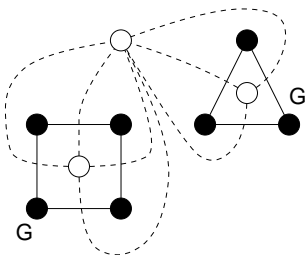


図 9: 非連結グラフ  $G$  (黒丸と実線) とその幾何学的双対グラフ  $G^*$  (白丸と破線).

で幾何学的双対グラフ  $G^*$  を描くと, 図 9 の白丸と破線が得られる. これが  $G^*$  であり, さらにこの  $G^*$  の幾何学的双対グラフを描くと 図 10 の黒丸と実線のグラフとなり, 明らかにこのグラフは  $G$  と同形ではないことがわかる ( $G^{**}$  は連結グラフとなっている).

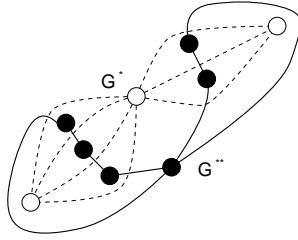


図 10:  $G^*$  (黒丸と実線) とその幾何学的双対グラフ  $G^{**}$  (白丸と破線).

(3) まず, 平面連結グラフ  $G$  を図 11 の黒丸と実線のように選ぶ. これに対する幾何学的双対グラフ  $G^*$  は同図 11 の白丸と破線で与えられる.

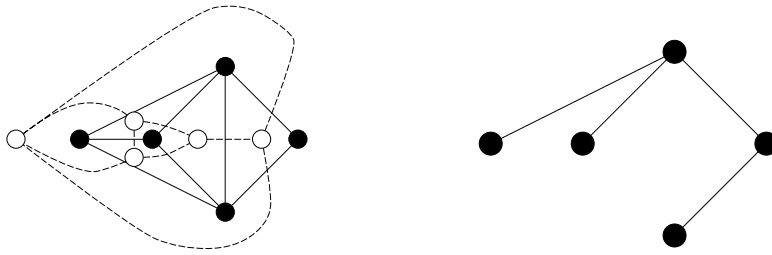


図 11: 連結平面グラフ  $G$  (黒丸と実線) とその幾何学的双対グラフ  $G^*$  (白丸と破線). 右図は  $G$  の全域木

一方, 平面連結グラフ  $G$  の全域木の一つは図 11 の右側で与えられる.  $G$  の幾何学的双対グラフ  $G^*$  の全域木を図 12 の左側のように選ぶと, その補グラフは同 12 の右側のような木として得られるので, これはグラフ  $G$  の全域木と等しい. 従って, この例に関して題意が示せた.

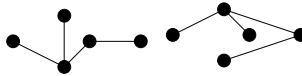


図 12: 幾何学的双対グラフ  $G^{**}$  の全域木 (左) とその補グラフ (右).

#### 9.4.2 抽象的双対という概念

抽象的双対 (abstract dual) :  $G$  の辺集合と  $G^*$  の辺集合の間に 1 対 1 対応があり, しかも,  $G$  の辺のある集合が  $G$  において閉路になるのは, 対応する  $G^*$  の辺集合が  $G^*$  においてカットセットになるときであり, かつ, そのときに限る場合,  $G^*$  を  $G$  の抽象的双対と呼ぶ.

(注) :  $G^*$  が平面グラフ  $G$  の幾何学的双対ならば,  $G^*$  は  $G$  の抽象的双対でもある.

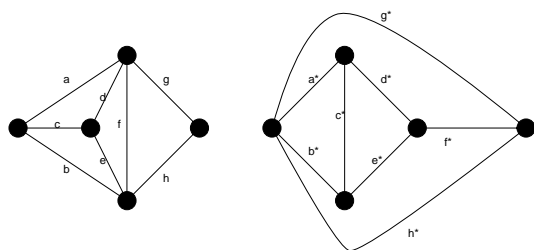


図 13: グラフ  $G$  とその抽象的双対グラフ (右).

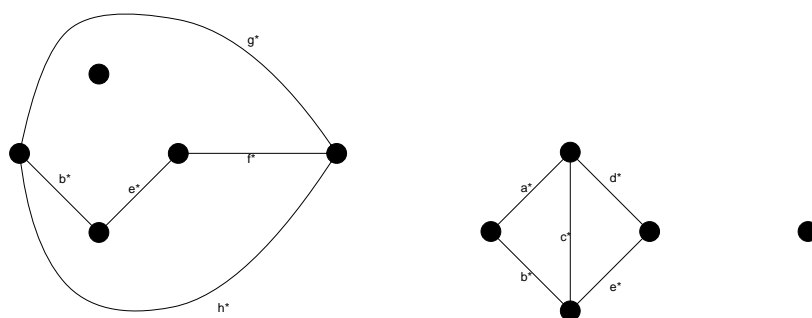


図 14: カットセット  $a^*, c^*, d^*$  によってできるグラフ (左側) とカットセット  $f^*, g^*, h^*$  によりできるグラフ (右側).

証明は省略するが, 抽象的双対にまつわる定理を 2 つだけあげておく.

**定理 15.5**

$G^*$  が  $G$  の抽象的双対ならば,  $G$  は  $G^*$  の抽象的双対である.

**定理 15.6**

平面グラフであるための必要十分条件は抽象的双対が存在することである.

### 9.5 無限グラフとその性質

ここでは, 今まで扱ってきた有限個の点, 及び, 辺集合からなる有限グラフを拡張し, 無限個の点, 辺集合からなるグラフ — 無限グラフ — を取り上げ, その性質を詳しく調べて行くことにする.

### 9.5.1 定義

$V(G)$  : 点の無限集合.

$E(G)$  :  $V(G)$  の非順序対の無限族.

このようにして, 要素数無限大の場合に拡張した  $V(G)$  と  $E(G)$  に対して

加算グラフ (countable graph) :  $V(G), E(G)$  の両方が加算無限である ( $V(G), E(G)$  のそれぞれの要素が自然数に対応つけることができ, しかも, その要素数が無限大である).

局所有限グラフ (locally finite graph) : 各点の次数が全て有限な無限グラフ.

局所加算無限グラフ (locally countable infinite graph) : 各点の次数が加算な無限グラフ<sup>2</sup>

#### 定理 16.1

連結な局所加算無限グラフは全て加算グラフである.

(証明)

無限グラフの任意の点を  $v$  とする. このとき

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 : v \text{ に隣接している全ての点集合} \\ A_2 : A_1 \text{ に隣接している全ての点集合} \\ \dots \\ \dots \\ A_n : A_{n-1} \text{ に隣接している全ての点集合} \\ \dots \end{array} \right.$$

とする (図 15 参照). 仮定より,  $A_1$  は加算である ( $v$  の点の次数は加算). 従って, 「加算集合の加算個の和

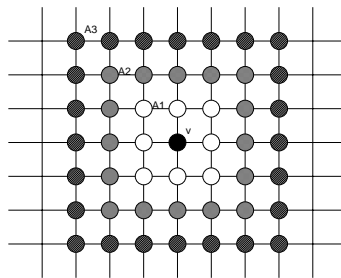


図 15: 無限グラフ  $G$ .

<sup>2</sup> ここで, 「局所有限」と「局所加算」はどこが違うのか? という疑問が生じるに違いない. 平たく説明すればこうである. 各点に次数を割り当てグラフを構成することを考えよう. 例えば, ここでは最大次数が有限値の 100 である場合を考える. このとき, 「局所有限」とは, 各次数の最大値が 100 以内に収まっていればそれでよく, 極端な場合, 各点の次数が 50 と 100 の 2 通りの場合しかない, 無限点からなる場合も OK である. 一方, 「加算有限」とは, 各次数の最大値が 100 以内に収まっていて, かつ, 1 から 100 までの自然数の全てをどれかしらの点が次数として持つ場合である. この意味で両者は異なる.

は加算」であるから、 $A_2, A_2, \dots$ , も加算となる。よって、 $\{v\}, A_1, A_2, \dots$ , はその和が加算。この無限グラフは連結であるから、その点は系列  $\{v\}, A_1, A_2, \dots$ , のどこかに入っている。(証明終わり)。

### 9.5.2 歩道概念の無限グラフへの拡張

G の有限歩道 (finite walk) : 有限グラフの場合と同じ。

G の一方向無限道 (one-way infinite walk) :  $\dots, v_0v_1, v_1v_2, v_2v_3, \dots$ , の形をした  $v_0$  を始点とする辺の無限集合。

二方向無限歩道 (two-way infinite walk) :  $\dots, v_{-2}v_{-1}, v_{-1}v_0, v_0v_1, v_1v_2, \dots$ , の形をした辺の無限系列。

#### 定理 16.3

G は連結な局所有限な無限グラフとする。このとき、G の任意の点  $v$  に対して、 $v$  を始点とする一方向無限道が存在する。

(証明)

$v$  を始点とする道が G には無限個あり、 $v$  の次数が有限個であることを考えると、最初の辺が同一の道が無限個ある。このような辺を  $vv_1$  として、 $v_1$  に対して同じ議論をすると、 $v_1v_2$  が決まり、これを繰り返すと

$$v \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots$$

という一方向無限道が得られる。(証明終わり)。

#### 定理 16.4

G は加算グラフであり、その有限な部分グラフが全て平面的であるならば、グラフ G は平面的である。

(証明)

G は加算なので、その点は  $v_1, v_2, \dots$ , のように勘定することができる。

さて、G の部分グラフを次の関係が満たされるように作る。

$$G_1 \subset G_2 \subset G_3 \subset \dots$$

のように作る。このようにしてできる系列  $G_1, G_2, \dots$ , を真増大系列と呼ぶ。この系列のそれぞれの要素、例えば  $G_k$  は点  $v_1, \dots, v_k$  からなる。これらの点を結ぶ G 全体の辺全体が  $G_k$  の辺である (図 16 参照)。ここで、 $m(i)$  を次のように定義する。

$$m(i) = G_i \text{ の平面への描き方で、位相幾何学的に異なるものの数}$$

明らかに全ての  $i$  に対しては  $m(i)$  はゼロではないから、G とは位相幾何学的に異なるグラフ H を作ることができる。

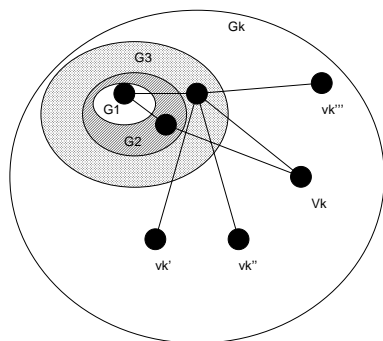


図 16: 部分グラフ  $G_k$  に含まれる点  $v_k$  の自由度が, 異なる  $G_k$  を生む.

そこで,  $w_{ij}$  ( $i \geq 1, 1 \leq j \leq m(i)$ ) をこの新しいグラフ H の辺とする. この変数のインデックス  $i$  は部分グラフの名前を表し,  $j$  は位相幾何学的に異なる点の置き方のパラエティを表す. 図 17 より, グラフ H の点  $w_{ij}$  と  $w_{kl}$  を結ぶのは

$$k = i + 1$$

かつ,  $w_{kl}$  に対応する平面描画が,  $w_{ij}$  に対応する描画を「拡張」しているときである (図 17 参照). グラフ

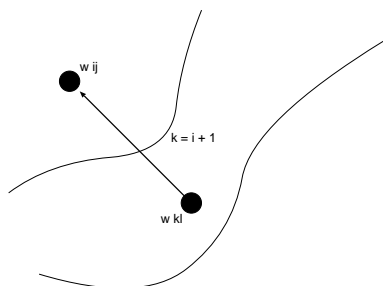


図 17:  $w_{ij}$  と  $w_{kl}$  を結ぶのは  $k = i + 1$  のときのみである.

H は明らかに連結で, 局所有限であるので, 直前に見た定理 16.3 より H には一方向無限道があり, グラフ G は加算であるから, この無限道から G の平面描画が得られる. (証明終わり).

### 9.5.3 オイラー・グラフの拡張

無限オイラー・グラフ : 連結無限グラフ G の全ての点を含む二方向無限小道 (二方向オイラー小道) が存在するようなグラフ G.

### 定理 16.5

$G$  が連結加算オイラー・グラフであるときの必要条件 :

- (1)  $G$  には奇数次の点が無い.
- (2)  $G$  の全ての有限部分グラフ  $H$  に対し,  $G$  から  $H$  の辺を除去して得られる無限グラフ  $\bar{H}$  の無限連結成分は高々2つしかない.
- (3) さらに,  $H$  の各点が偶数次ならば,  $\bar{H}$  の無限連結成分は1つしかない.

(証明)

- (1) 有限グラフに対する結論 : 「連結グラフ  $G$  がオイラーであるための必要十分条件は,  $G$  の点の次数が全て偶数である」より,  $G$  の点の次数は全て偶数か, あるいは, 無限である. (証明終わり).
- (2) 図 18 のように, オイラー小道  $P$  を  $P_-, P_0, P_+$  に分割する.  $P_0$  はグラフ  $H$  の全ての辺, 及び, 幾つか

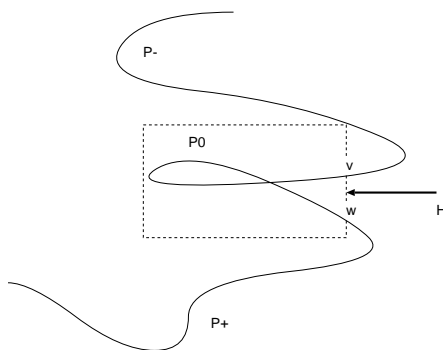


図 18:  $P_-, P_0, P_+$  に分割されたオイラー小道.

他の辺を含む有限道である. 一方,  $P_-, P_+$  は一方向無限道である.  $P_-, P_+$  の辺, 及び, それらに接続している点からできる無限グラフ  $K$  には無限成分が高々2個 ( $\bar{H}$  は  $K$  に有限個の辺を付加してできる). (証明終わり).

- (3) 図 18 のように  $v$  を  $P_0$  の始点,  $w$  を終点とする  $\bar{H}$  において,  $v$  と  $w$  が連結していれば,  $\bar{H}$  の無限連結成分は一つ.

$v = w$  なら自明なので, 以下  $v \neq w$  のときを考えるが,  $P_0$  から  $H$  の辺を除去して得られるグラフには, 仮定より, 奇数次の点がちょうど2個 ( $v, w$ ) だけある. この事実と, 系 6.4 「連結グラフがオイラー・グラフであるための必要十分条件は, ちょうど2個だけの奇数次の点があることである」から, 題意が示せる. (証明終わり).

### 定理 16.6

グラフ  $G$  は連結な加算グラフであるとする.  $G$  がオイラー・グラフであるための必要十分条件は定理 16.5 の条件 (1)(2)(3) が成立することである.

証明略.

## 10 グラフの彩色

ここからはグラフの彩色に入る.

### 10.1 点彩色

$k$ -彩色可能 ( $k$ -colourable) :  $k$  個の色の一つを  $G$  の各点に割り当て, 隣接するどの 2 つの点も同じ色にならないようにできるとき.

$k$ -彩色的 ( $k$ -chromatic) : グラフ  $G$  が  $k$  彩色可能であるが,  $(k-1)$  彩色不可能であるとき.

⇒ グラフ  $G$  の彩色数 (chromatic number) は  $k$  である. そして

$$\chi(G) = k$$

のように表記する. 例えば, 図に載せたグラフ  $G$  の彩色数は 4 である. 代表的グラフに関する, それぞれの

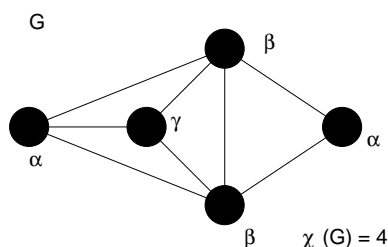


図 19: このグラフ  $G$  の彩色数は  $\chi(G) = 4$  である.

彩色数は

$$\begin{cases} \chi(K_n) & = n \\ \chi(N_n) & = 1 \\ \chi(K_{r,s}) & = 2 \end{cases}$$

のようになる.

そこで, 点彩色に対して, 幾つかの重要な定理を見てゆこう.

#### 定理 17.1

単純グラフ  $G$  の最大次数が  $\Delta$  ならば, グラフ  $G$  は  $(\Delta + 1)$ -彩色可能である.

(証明)

図 20 のように, 任意の点  $v$  及び,  $v$  に接続する辺を除去してできるグラフには  $n-1$  個の点があり, その最大次数は  $\Delta$  以下. そこで, この  $n-1$  個の点からなるグラフは  $(\Delta + 1)$ -彩色可能であると仮定する. このとき,  $v$  に隣接している  $\Delta$  個以下の点とは異なる色で  $v$  を彩色すれば, グラフ  $G$  の  $(\Delta + 1)$ -彩色が得られる. (証明終わり).

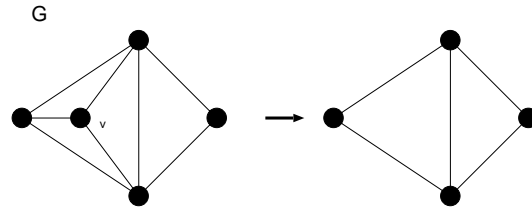


図 20: 任意の点  $v$  を切除してできるグラフの最大次数を考える.

**定理 17.2**

グラフ  $G$  は単純連結グラフであり, 完全グラフでないとする. このとき, グラフ  $G$  の最大次数が  $\Delta(\geq 3)$  であるならば,  $G$  は  $\Delta$ -彩色可能である.

**定理 17.3**

全ての単純平面グラフは 6-彩色可能である.

(証明)

グラフ  $G$  は  $n(> 6)$  個の点を持つ単純平面グラフであるとする. そして,  $n - 1$  個の点を持つ全ての単純平面グラフは 6-彩色可能であるとする. 定理 13.6: 「全ての単純平面グラフには次数 5 以下の点がある」より,  $G$  には 5 次以下の点  $v$  がある. 図 21 のように,  $v$  と  $v$  に接続する辺を除去すると, 残りのグラフには

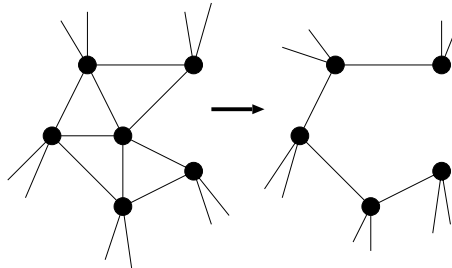


図 21: ここで考えるグラフ.

$n - 1$  個の点しかないので, 仮定から 6-彩色可能である.  $v$  に隣接している 5 個以下の点とは異なる点で  $v$  を彩色すれば,  $G$  の 6-彩色が得られる. (証明終わり).

**定理 17.4**

全ての単純平面グラフは 5-彩色可能である.

(証明)

$n > 5$  とする. 「 $n - 1$  個以下の点を持つ全ての単純平面グラフは 5-彩色可能である」とする. これが帰納法の仮定となる. 定理 13.6 より,  $G$  には次数 5 以下の点  $v$  がある.  $\deg(v) < 5$  ならば証明は終わり. 従って, 以下では  $\deg(v) = 5$  であるとする.

$v_1, \dots, v_5$  はこの順に  $v$  のまわりに配置されているとする (図 22 参照).  $v_1, \dots, v_5$  が全て隣接していれば

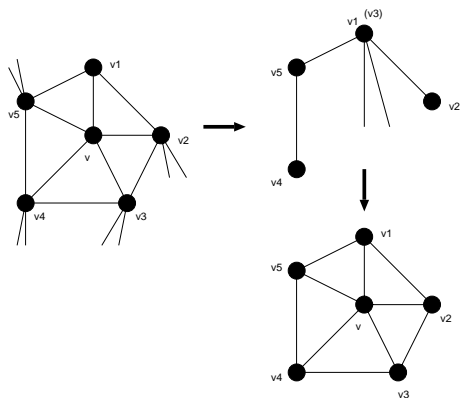


図 22: ここで考えるグラフ.

完全グラフ  $K_5$  になってしまうので, 全ては隣接していないとする. 2本の辺  $vv_1, vv_3$  を縮約すると, 平面グラフができて, それには高々  $n-1$  個しか点がないので, 5-彩色可能. 次に2本の辺を元に戻し,  $v$  に当てられた色で  $v_1, v_3$  の両方を彩色する. 点  $v$  に割り当てられた色とは異なる色で  $v$  を彩色すれば  $G$  の5彩色が得られる. (証明終わり).

**定理 17.5**

全ての単純平面グラフは4-彩色可能である.

証明略.

最後に彩色の応用問題を1題, 例題として見ておこう.

(例題)

講義の時間割を作りたい。複数の講義を受けたい学生も居るので、講義によっては同じ時間帯を避けなければならない。下表の星印 (\*) は同じ時間帯にあってはいけない講義を表している。

	a	b	c	d	e	f	g
a	—	*	*	*	—	—	*
b	*	—	*	*	*	—	*
c	*	*	—	*	—	*	—
d	*	*	*	—	—	*	—
e	—	*	—	—	—	—	—
f	—	—	*	*	—	—	*
g	*	*	—	—	—	*	—

このとき以下の問い (1)(2) に答えよ。

- (1) a, b, c, d, e, f, g の 7 つの講義を点で表し、同じ時間帯にあってはいけない講義に対応する 2 点が隣接するようなグラフを描け。
- (2) (1) で得られたグラフの各点をギリシャ文字  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  で彩色することにより、この 7 つの講義の時間割には何時間が必要となるかを答えよ。

(解答)

- (1) 問題文に与えられた表に従って、星印のついた講義同士を隣接するようにグラフを描くと図 23 のようになる。

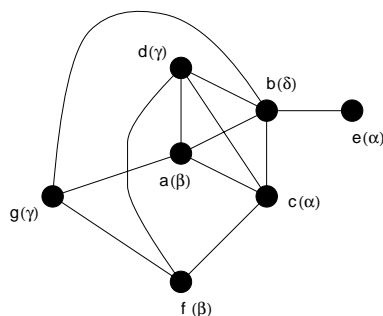


図 23: 講義間の関係を表すグラフ。同時間帯に開講される講義は互いに隣接している。括弧内は開講すべき時間帯 (色)。

- (2) 実際に図 23 に見るように、このグラフを点彩色するために必要な色数は  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  の 4 色であるが、これは最も次数の大きな点が  $b$  であり、また、 $b$  に隣接している 4 点の中で  $b$  を除く他点とも隣接している点が 3 点 ( $a, c, d$ ) であることから、 $b$  は  $\delta$  で彩色せざるを得ず、この  $\delta$  までのギリシャ文字の数が求める彩色数 4 であることから容易にわかる。以上より

講義  $c, e$  は  $\alpha$  講時に開講  
講義  $a, f$  は  $\beta$  講時に開講  
講義  $d, g$  は  $\gamma$  講時に開講  
講義  $b$  だけは  $\delta$  講時に開講

するように時間割を作れば良いことがわかる.

### 演習問題 9

1. 図 24 のグラフ  $G$  に関して以下の問いに答えよ.

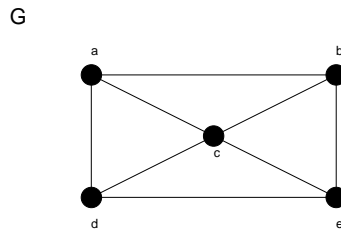


図 24: 問題のグラフ  $G$ .

- (1) グラフ  $G$  の幾何学的双対グラフ  $G^*$  を描け.
- (2) (1) で得られたグラフ  $G^*$  の幾何学的双対グラフ  $G^{**}$  を描き,  $G^{**}$  と  $G$  の間の同形写像を求めよ.

(注): 「同形」「同形写像」に関しては, 講義ノート #2 の 2.2 同形の部分を読み返して見ること.

2. グラフ  $G$  の点彩色に関して以下の問いに答えよ.

- (1) グラフ  $G$  は三角形を含まないとする. オイラーの公式を用いて, このグラフ  $G$  には次数 3 以下の点が存在することを示せ.
- (2) グラフ  $G$  は 3 色で点彩色可能であることを示せ.
- (3) (1) の結果をグラフ  $G$  が  $K$  角形まで含まないという場合に拡張せよ.

# 今回のレポート締め切りは少しタイトですが 6 月 21 日 (月) のグラフ理論講義開始時までとします.