



# HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	2004年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一; Inoue, Jun-ichi
Description	当講義資料は著者のホームページ <a href="http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/">http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/</a> からダウンロードできます。 <a href="http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/">http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/</a>
Issue Date	2004
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/371">https://hdl.handle.net/2115/371</a>
Rights(URL)	<a href="https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/">https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/</a>
Type	learning object
File Information	graph_ens2004_1.pdf, 第1回情報工学演習II (B) (グラフ理論) 問題



# 情報工学演習 II(B) (グラフ理論) 配布資料 #1

担当：井上 純一 (情報エレクトロニクス系棟 8-13)

平成 16 年 6 月 14 日

## 問題 1

教科書 p.53 ~ p.55 に書かれたアルゴリズムを参考にし, 図 1 に与えたグラフの始点  $u$  から終点  $v$  へ至る全ての経路の中で最短のものを求めよ. なお, グラフの各辺に記された数字はその区間の距離であるものとする. なお, 同じ最短距離を与える経路が複数存在する場合には, それら全てを答えること.

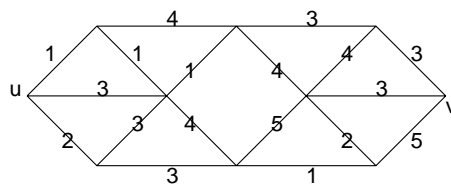


図 1:  $u$  から  $v$  へ至る最短路を求める. 各辺に記された数字はその区間の距離である.

## 問題 2

図 2 のグラフ  $G$  に対し, 以下の問いに答えよ.

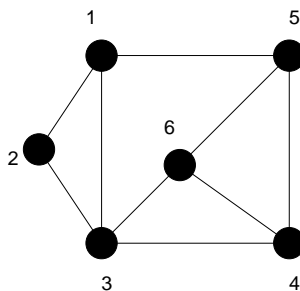


図 2: ここで全域木を考えるグラフ  $G$ .

- (1) グラフ  $G$  から全域木  $T$  を作ったとしよう. このとき,  $T$  の辺数を求めよ.
- (2) (1) で全域木を作るまでに削除しなければならない辺数  $m$  を求めよ.
- (3)  $T$  に (2) で求めた辺を 1 つずつ付加すると必ず閉路が 1 つだけできる. このようにして作られる閉路を基本閉路と呼ぶが, この基本閉路を  $m$  個全てを描け.
- (4) (3) で求めた閉路  $C_1, C_2, \dots, C_m$  に対し, 閉路行列法を用いることにより, 全域木の総数  $\tau(G)$  を求めよ.

### 問題 3

- (1) 完全グラフ  $K_5, K_6$  の点行列を求め、それぞれの全域木の総数  $\tau(K_5), \tau(K_6)$  を求めよ.
- (2) 完全グラフ  $K_n$  の全域木の総数  $\tau(K_n)$  を求めよ.

### 問題 4

図 3 のグラフ  $G$  の各点はネットワーク  $G$  内のサーバを表すとして、各サーバは確率  $p$  で故障する。故障

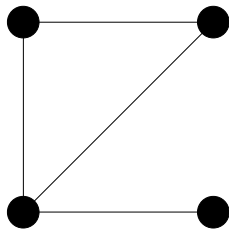


図 3: ここで考えるネットワーク  $G$ . 各点は「サーバ」を表すものとする.

したサーバは他のサーバと情報のやりとりができないので、ネットワークから除去する。  $k$  個のサーバが故障したとき、ネットワーク内に残るサーバからなる部分ネットワークが正常である (連結である) 確率  $p_k$  を求めよ。ただし、1つのサーバだけからなる「ネットワーク」は正常であるとは言わないことにする。また、システムの信頼度:

$$R(G) = \sum_k p_k$$

を計算し、 $p$  の関数として図示せよ。

### 問題 5

図 4 のように 1 点から  $k$  本の枝を出し、その  $k$  本の枝からさらに  $k$  本の枝を出すという操作を  $n$  回繰り返してできる木を  $T_k(n)$  と名付けよう。図 4 の例は  $T_3(2)$  である。このとき、次の問いに答えよ。

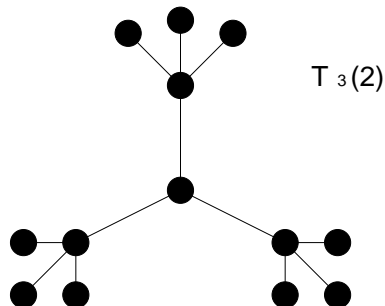


図 4: ここで述べた「操作」によって作られた木  $T_3(2)$ .

- (1)  $T_3(n)$  に含まれる点の総数  $S_3(n)$  を求めよ. また,  $T_3(n)$  の端点の総数を  $Q_3(n)$  を求め, 比  $P_3(n) = Q_3(n)/S_3(n)$  に対し, 極限值 :

$$p_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} P_3(n)$$

を計算せよ.

- (2) (1) を参考にして, 任意の自然数  $K$  に対して  $P_K(n)$  を計算し,  $n$  に関する極限值 :

$$p_K = \lim_{n \rightarrow \infty} P_K(n)$$

を求め, さらに  $K$  に関する極限值 :

$$p_\infty = \lim_{K \rightarrow \infty} p_K$$

を計算し, 木  $T_K(n)$  の構造と極限值  $p_\infty$  からわかることを簡潔に述べよ.

(注) :  $n$  と言うと普通はグラフの点の数を示しますが, ここでは「操作」の回数であることに注意.

### 問題 6

グラフ  $G$  (点の数 :  $n \geq 4$ ) を三角形のみを含む平面グラフであるとする.  $G$  に含まれる次数  $k$  の点の個数を  $n_k$  とするとき

- (1)  $G$  の辺数  $m$  が

$$m = 3n - 6$$

で与えられることを示せ.

- (2) 次の関係式 :

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 - n_7 - 2n_8 - \dots = 12$$

が成り立つことを示せ.

- (3)  $G$  は次数 5 以下の点を 4 つ以上含むことを示せ.

今度はグラフ  $G$  は全ての点の次数が 3 である平面グラフであり,  $\varphi_k$  個の  $k$  角形を含むとしよう. このとき

- (4)  $G$  の辺数  $m$ , 面数  $f$  の間には

$$m + 6 = 3f$$

なる関係が成立することを示せ.

(5) 次の関係式：

$$3\varphi_3 + 2\varphi_4 + \varphi_5 - \varphi_7 - 2\varphi_8 - \dots = 12$$

が成り立つことを示せ.

(6)  $G$  には 5 角形以下の面が 4 つ以上含まれることを示せ.

(# レポート提出等)：

- 以上の **問題 1** から **問題 6** までを全て解き、レポートとして提出すること.
- レポート締め切りは 7 月 26 日 (月) のグラフ理論の講義開始時までとします. 問題の解答例もこの日に配布し、簡単に解説します. なお、井上の部屋の前にポストを用意しますので、早くできてしまった人はこのポストに提出してください.
- このレポートの得点は「情報工学演習 II(B)」の成績のみに関わるのであって、講義「グラフ理論」の成績とは一切関係がないことに注意してください.
- 第 2 回「情報工学演習 II(B) (グラフ理論)」は 6 月 28 日 (月) の講義「グラフ理論」の時間帯 (第 3 講時) に行います.