



# HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	2004年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一; Inoue, Jun-ichi
Description	当講義資料は著者のホームページ <a href="http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/">http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/</a> からダウンロードできます。 <a href="http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/">http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/</a>
Issue Date	2004
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/371">https://hdl.handle.net/2115/371</a>
Rights(URL)	<a href="https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/">https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/</a>
Type	learning object
File Information	graph_ens2004_1ans.pdf, 第1回情報工学演習II(B)(グラフ理論)解答



# 情報工学演習 II(B) (グラフ理論) #1 解答例

担当：井上 純一 (情報エレクトロニクス系棟 8-13)

平成 16 年 7 月 26 日

## 問題 1

図 1 のように各点に A~H の名前を付ける. 教科書にならって, 各点  $x$  までの最短路を  $l(x)$  と書くことにす

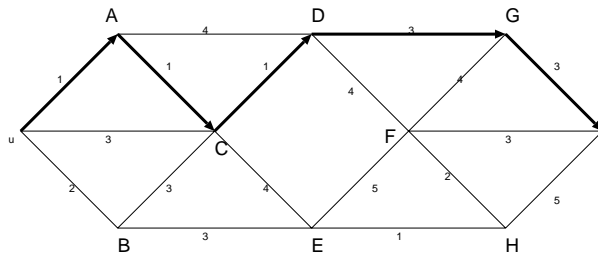


図 1: 図のように各点に名前を付ける. 太線矢印が求める最短路である.

れば, これらは順次に求めることができ

$$\begin{aligned}
 l(u) &= 0 \\
 l(A) &= l(u) + 1 = 1 \\
 l(B) &= l(u) + 2 = 2 \\
 l(C) &= \min\{l(u) + 3, l(A) + 1, l(B) + 3\} = \min\{3, 2, 5\} = 2 \\
 l(D) &= \min\{l(A) + 4, l(C) + 1\} = \min\{5, 3\} = 3 \\
 l(E) &= \min\{l(C) + 4, l(B) + 3\} = \min\{6, 5\} = 5 \\
 l(F) &= \min\{l(D) + 4, l(E) + 5\} = \min\{7, 10\} = 7 \\
 l(G) &= \min\{l(D) + 3, l(F) + 4\} = \min\{6, 11\} = 6 \\
 l(H) &= \min\{l(F) + 2, l(E) + 1\} = \min\{9, 6\} = 6 \\
 l(v) &= \min\{l(G) + 3, l(H) + 5, l(F) + 3\} = \min\{9, 11, 10\} = 9
 \end{aligned}$$

のようになる. 従って, 最短路は  $u \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow G \rightarrow v$  であり, そのときの最短路長は 9 である.

## 問題 2

- (1) 5 本
- (2)  $\bar{m} = 4$
- (3) 基本閉路 4 つ  $C_1, C_2, C_3, C_4$  を描くと図 2 のようになる.

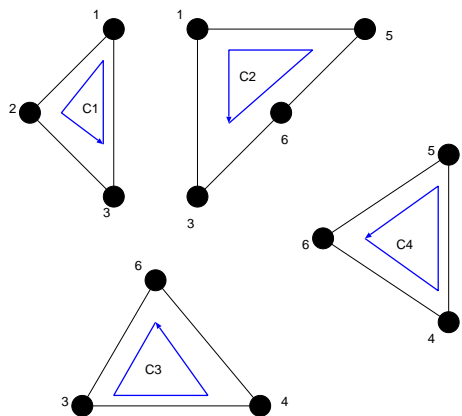


図 2: 求める基本閉路. 閉路行列式法を用いるために, 各閉路には図のように向き付けをしておく.

(4) グラフ  $G$  の閉路行列  $R$  は (3) で求めた基本閉路に注意して

$$R = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

と書けるので, 全域木の総数  $\tau(G)$  は

$$\begin{aligned} \tau(G) = |\mathbf{G}| &= 3 \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 3 \left\{ 4 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \right\} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 64 \text{ (個)} \end{aligned} \quad (2)$$

である.

### 問題 3

まずは準備として次のような  $m \times m$  の対称行列の行列式を求める公式を作っておくことにする.

$$\begin{aligned} b_m &\equiv \begin{vmatrix} a & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & a & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & a & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -(a+1) & a & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \end{vmatrix} \\ &= (a+1)b_{m-1} + (a+1)c_{m-1} \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、下付きの添え字はその行列式のサイズを表し、 $c_{m-1}$  は次のような漸化式で定義される行列式である。

$$c_{m-1} \equiv \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & a & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -(a+1) & a & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & a \end{vmatrix} \\ = (1+a)c_{m-2} \quad (4)$$

従って、 $b_m$  を求めるためには  $b_m, c_{m-1}$  に関する次の連立漸化式を解けばよい。

$$\begin{cases} b_m &= (a+1)b_{m-1} + (a+1)c_{m-1} \\ c_{m-1} &= (a+1)c_{m-2} \end{cases} \quad (5)$$

$c_{m-1}$  に関する漸化式は直ちに解けて、 $c_{m-1} = (a+1)^{m-2}c_1$  が得られるので、これを  $b_m$  に関する漸化式に代入すれば、求めるべき  $b_m$  は簡単に

$$b_m = (a+1)^{m-1}b_1 + (m-1)(a+1)^{m-1}c_1 \quad (6)$$

のように定まる。完全グラフの全域木の総数はこの公式 (6) で求めることができる。

そこで問題の解答に移ろう。

(1)(2) 完全グラフ  $K_5, K_6$  の点行列はそれぞれ

$$D_{K_5} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad D_{K_6} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad (7)$$

と書くことができる。従って、一般に完全グラフ  $K_n$  の全域木の総数は、前に求めた公式 (6) で

$$m = n-1, a = n-1, b_1 = a, c_1 = -1 \quad (8)$$

と置けばよいので、これらの値を代入すれば直ちに

$$\tau(K_n) = b_{n-1} = n^{n-2} \quad (9)$$

が求める全域木の総数であることがわかる<sup>1</sup>。もちろん、この式から

$$\tau(K_5) = 5^{5-2} = 5^3 = 125, \quad \tau(K_6) = 6^{6-2} = 6^4 = 1296 \quad (10)$$

である。

#### 問題 4

故障したサーバ数が  $k = 0, 1, 2$  のときに生き残るサーバからなる正常なネットワークを描くと図のようになる ( $k = 3, 4$  の場合は問題外なことは明らか)。従って、求める確率  $p_k$  は

<sup>1</sup> この結果は講義ノート #7 の p.7 系 10.2 に示した異なる考察からの結果と一致します。再度確認しておくこと。

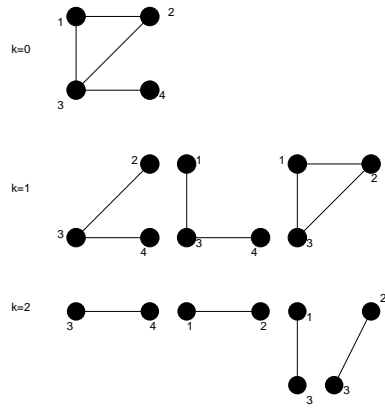


図 3: 正常なネットワーク.

$$p_0 = (1-p)^4, \quad p_1 = 3p(1-p)^3, \quad p_2 = 4p^2(1-p)^2, \quad p_3 = 0, \quad p_4 = 0 \quad (11)$$

であり, この結果からシステムの信頼度  $R(G)$  は

$$R(G) = \sum_{k=0}^4 p_k = (1-p)^4 + 3p(1-p)^3 + 4p^2(1-p)^2 \quad (12)$$

となる. これを  $p$  の関数としてプロットしたものを図 4 に載せる.

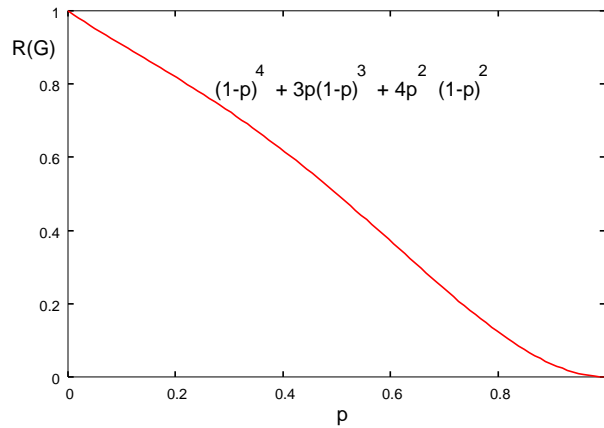


図 4: 信頼度:  $R(G) = (1-p)^4 + 3p(1-p)^3 + 4p^2(1-p)^2$

### 問題 5

(1) 明らかに,  $S_3(n)$  は初項 1, 公比 3 の等比数列の第  $n$  項までの和であるから

$$S_3(n) = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2} \quad (13)$$

である. 一方,  $T_3(n)$  の端点の総数  $Q_3(n)$  は  $T_3(n)$  の作り方から明らかに  $Q_3(n) = 3^n$  であるので, こ

これらの比  $P_3(n) = Q_3(n)/S_3(n)$  は

$$P_3(n) = \frac{2 \cdot 3^n}{3^{n+1} - 1} \quad (14)$$

であり、問題の極限值は

$$p_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} P_3(n) = \frac{2}{3} \quad (15)$$

と求まる。

(2)  $k = K$  の場合には

$$S_K(n) = \frac{K^{n+1} - 1}{K - 1}, \quad Q_K(n) = K^n, \quad P_K(n) = \frac{(K - 1)K^n}{K^{n+1} - 1} \quad (16)$$

となるので、 $P_K(n)$  に関して  $n \rightarrow \infty$  の極限をとると

$$p_K = \lim_{n \rightarrow \infty} P_K(n) = \frac{K - 1}{K} \quad (17)$$

が得られる ( $K = 3$  と置けば (1) の結果と一致することに注意)。さらに、この確率で  $K \rightarrow \infty$  の極限をとれば  $p_{K \rightarrow \infty} = 1$  が得られるが、この結果はほとんど全ての点が木の末端に分布しており、中心からその末端に至るまでの間に存在する点の数は末端の点数と比べて無視できるほど少ないことを意味している。末端が密に詰まっているのに対して、中心から末端にいたるまでの間がスカスカの状態なわけである。ちなみに、このような作り方で出来上がる木のことをケーリーの木 (Caley's tree)、あるいはベーテ格子 (Bethe lattice) と呼んでいる<sup>2</sup>

### 問題 6

(1) 全ての辺は 3 本の辺で囲まれており、全ての辺は 2 つの面の境界となっているので、面数  $f$ 、辺数  $m$  の間には

$$3f = 2m \quad (18)$$

が成り立つ。これとオイラーの公式 :  $n - m + f = 2$  から面数  $f$  を消去すれば

$$m = 3n - 6 \quad (19)$$

が得られる。

(2) (19) を 2 倍したものに

$$n = \sum_{k=3} n_k \quad (20)$$

$$2m = \sum_{k=3} kn_k \quad (21)$$

を代入すれば

$$\sum_{k=3} kn_k = 6 \sum_{k=3} n_k - 12 \quad (22)$$

<sup>2</sup> このベーテ格子は「パーコレーション (浸透)」と呼ばれる概念で特徴づけられる「森林火災」「伝染病感染」等、様々な自然現象のモデル化において広く用いられています。歴史的には磁性体の性質を説明するための数理モデルとして重要な役割を果たしており (この「ベーテ」というのは物理学者)、「1 本の辺を切れば全体が二つに分かれる」という意味でこの格子は 1 次元的であり、厳密な数理解析が可能となります。一般に、これら格子上で確率過程は「フラクタル」と呼ばれる概念とも密接に関連します。このことに関しては後期 情報工学実験 II (井上担当) で詳しく学習する予定です。[参考文献 : "Introduction to PERCOLATION THEORY", by D. Stauffer and A. Aharonoy, (Taylor & Francis, 1985)]

が得られるが、和の中のはじめの数項を書き出してみると

$$3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + 6n_6 + 7n_7 + 8n_8 + \cdots = 6(n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8 + \cdots) - 12 \quad (23)$$

すなわち

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 - n_7 - 2n_8 - \cdots = 12 \quad (24)$$

が成り立つ.

(3) (2) で得られた関係式から

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 - n_7 - 2n_8 - \cdots - 12 = 0 \leq 3n_3 + 2n_4 + n_5 - 12 \quad (25)$$

であるから

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 \geq 12 \quad (26)$$

である. また, 明らかに  $(3n_3 + 3n_4 + 3n_5) \geq 3n_3 + 2n_4 + n_5$  であるから, これらの不等式から直ちに

$$n_3 + n_4 + n_5 \geq \frac{1}{3}(3n_3 + 2n_4 + n_5) \geq \frac{1}{3} \times 12 = 4 \quad (27)$$

従って, グラフ G には次数が 5 以下の点が 4 つ以上含まれることが示せた.

(4) 握手補題から  $3n = 2m$  が成り立つが, これとオイラーの公式から  $n$  を消去して

$$6 + m = 3f \quad (28)$$

が成り立つ.

(5) (28) 式を 2 倍したものに

$$f = \sum_{k=3} \varphi_k \quad (29)$$

$$2m = \sum_{k=3} k\varphi_k \quad (30)$$

を代入し, 和の中のはじめの数項を書き出してみると

$$3\varphi_3 + 2\varphi_4 + \varphi_5 - \varphi_7 - 2\varphi_8 - \cdots = 12 \quad (31)$$

が成り立つことがわかる.

(6) (3) と同様にして

$$\varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 \geq \frac{1}{3}(3\varphi_3 + 2\varphi_4 + \varphi_5) \geq \frac{1}{3} \times 12 = 4 \quad (32)$$

すなわち, グラフ G には 5 角形以下の面が 4 つ以上含まれることがわかる.