情報工学演習 II(B) (グラフ理論) 配布資料 #2

担当：井上 純一 (情報エレクトロニクス系棟 8-13)

平成 16 年 6 月 28 日

問題

第 2 回の情報工学演習 II(B)(グラフ理論) では連結グラフを地下鉄の路線図に見立てた場合の交通量, 乗客の流れ等をグラフ理論を用いて考察する方法を演習問題形式で見ていく．もちろん, ここで取り上げるグラフで話が済むような, そんな単純な地下鉄路線は東京にもロンドンにもなく (札幌の地下鉄はかなりシンプルだが, ほとんど閉路を含まない「木」であるように思われる), その意味で現実の問題とは程遠いが, この演習で学ぶ方法・概念を, より大きなサイズの複雑なグラフへと応用することで実際の地下鉄路線の問題を扱うことは, サイズ増加にともなう計算技術上の問題をクリアしさえすれば, いつでも可能であることに注意されたい．下記の小問 (1)-(6) は我々が最終的に調べたい (7) へ向けての誘導となっている (はずである). 各小問には講義の復習となる内容の他, 新しい内容をも含むが, その場合には問題文中にそれが説明されている (その説明でわからない場合には遠慮なく出題者 (井上) に質問すること). 以下の問いに答えよ.

(1) グラフ G の任意の 2 点 u, v 間の距離を $d(\mathsf{u},\mathsf{v})$ とする．今, 点 u を固定し, v $(\neq \mathsf{u})$ を任意の G 内の点とするとき, $d(\mathsf{u},\mathsf{v})$ の最大値を点 u からの**最遠距離**と定義し, $\mathrm{e}(\mathsf{u})$ と書くことにする．また, G 内の全ての点 u に対する $\mathrm{e}(\mathsf{u})$ の最小値をグラフ G の**半径**と呼び, $R(\mathsf{G})$ と書く．さらに, 全ての u に対する $\mathrm{e}(\mathsf{u})$ の最大値を G の直径と呼び, $D(\mathsf{G})$ と書く．また, 半径に等しい最短距離を持つ点の集合を G の**中心**と呼び, 最遠距離を持つ点の集合を G の**周辺**と言う．例えば図 1 のグラフ G を例にとれば各点の最遠距離は $\underline{\mathrm{e}(1) = \mathbf{2}}, \mathrm{e}(2) = 2, \mathrm{e}(3) = 2, \underline{\mathrm{e}(4) = \mathbf{2}}, \mathrm{e}(5) = 2$ であり, $R(\mathsf{G}) = 2$, $\underline{\mathbf{D}(\mathsf{G}) = \mathbf{2}}$, 中心は $\underline{\{1,2,3,4,5\}}$, 周辺は $\underline{\{1,2,3,4,5\}}$ である．これを参考にして図 2 のグラフの各点の最遠距離, 半径, 直径, 中心, 及

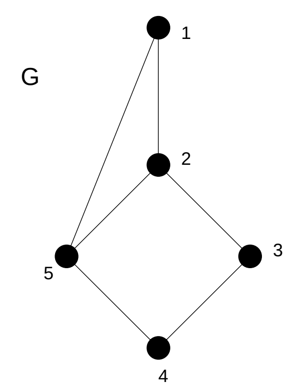

図 1: グラフ G の各点の最遠距離は $\underline{\mathrm{e}(1) = \mathbf{2}}, \mathrm{e}(2) = 2, \mathrm{e}(3) = 2, \underline{\mathrm{e}(4) = \mathbf{2}}, \mathrm{e}(5) = 2$ であり, $R(\mathsf{G}) = 2$, $\underline{\mathbf{D}(\mathsf{G}) = \mathbf{2}}$, 中心は $\underline{\{1,2,3,4,5\}}$, 周辺は $\underline{\{1,2,3,4,5\}}$ である.

び, 周辺を求めよ.

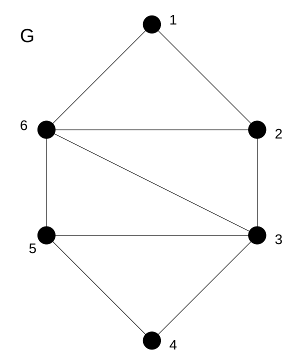

図 2: ここで考える連結グラフ G(地下鉄路線図).

(2) $\boldsymbol{A}$ をグラフ G の隣接行列とするとき, 次の和：

$$\boldsymbol{S}(r) = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}^3 + \cdots + \boldsymbol{A}^r = \sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{A}^k \tag{1}$$

の要素 $[\boldsymbol{S}(r)]_{ij}$ は点 i から点 j に至る長さ r 以下の歩道の総数であることを図 2 のグラフ G の例を用いて示せ. また, (1) 式で r の値を 1 から徐々に増やしていったとき, $\boldsymbol{S}(r)$ の非対角要素が全て **非ゼロ** になったときの r の値は, (1) で述べた直径 D(G) になっていることを図 2 の G に対して示せ.

(3) (2) での $\boldsymbol{S}(r)$ の代わりに, η を $\eta \geq 1$ の定数として

$$\boldsymbol{W}(r) = \frac{\boldsymbol{A}}{\eta} + \left(\frac{\boldsymbol{A}}{\eta}\right)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{A}}{\eta}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{\boldsymbol{A}}{\eta}\right)^r = \sum_{k=1}^{r} \left(\frac{\boldsymbol{A}}{\eta}\right)^k \tag{2}$$

を考える. 例えば, これは図 2 のグラフ G が地下鉄の路線図であるとするならば, 「近い駅間ほど乗客の利用頻度 (価値) が高い」などのように現実の問題と関連させ, 意味づけすることができる. さて, この行列 $\boldsymbol{W}(r)$ に対し

$$C_r(i,r) = [\boldsymbol{W}(r)]_{1i} + [\boldsymbol{W}(r)]_{2i} + \cdots + [\boldsymbol{W}(r)]_{ni} = \sum_{j=1}^{n} [\boldsymbol{W}(r)]_{ji} \tag{3}$$

を点 i における長さ r の**ターミナル容量**と呼ぶ. 図 2 のグラフ G の各点に対して長さ 2 のターミナル容量を求めよ. ただし, $\eta = 6$ とする. また, 図 2 のグラフを地下鉄の路線図と考えた場合, ここで得られた結果は何を意味するか, を簡潔に述べよ.

(4) 図 2 のグラフの各辺に図 3 のような重みをつける. この重みは地下鉄の各区間の「非混雑度」を表すものとし, この値が大きなほど, 客は快適に乗車することができる. このように各辺が「重み付け」されたグラフを**重み付きグラフ**と呼ぶが, この重み付きグラフの場合には隣接行列 $\boldsymbol{A}$ の各要素 $[\boldsymbol{A}]_{ij}$ は i, j 間の辺数ではなく, 重みを付けた辺数の和となる. これをふまえて, 図 3 の重み付きグラフ G に対して隣接行列 $\boldsymbol{A}$ を求めよ.

(5) (4) での隣接行列に対し, $\boldsymbol{X} \equiv \boldsymbol{A}/\eta$ とおこう ($\eta = 6$). このとき, 図 3 のグラフ G に対し

$$\boldsymbol{X}^{\infty} = \lim_{r \to \infty} \boldsymbol{X}^r = \boldsymbol{0}\,(\text{ゼロ行列}) \tag{4}$$

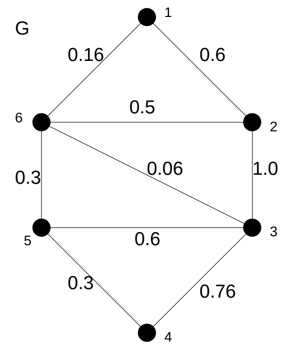

図 3: 図 2 のグラフの各辺に重みを付けたグラフ G.

となることを示せ.

(6) $\boldsymbol{X}^{\infty} = \boldsymbol{0}$ となる (単位行列ではない) 正方行列 $\boldsymbol{X}$ に対し

$$\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{X}^k \quad = \quad (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X})^{-1} - \boldsymbol{I} \tag{5}$$

が成り立つことを示せ. ただし, $\boldsymbol{I}$ は単位行列である. また, この事実を用いて, (4) で求めた隣接行列に対し $\boldsymbol{W}(\infty)$ を計算せよ.

(7) (6) の結果から図 3 の連結グラフ G で与えたれた地下鉄路線図及び, 各駅での乗客量等に関して何が言えるか ? また, ここでのグラフ理論的考察から, この地下鉄をより快適なものとするためにはどのような改善点が考えれるか, を自由に論じよ.

注意

- レポートの締め切りは **9 月 6 日 (月) 第 3 講時 グラフ理論補講開始時まで**です. その際に解答例を配布し, 簡単な解説を行います. なお, 早くできてしまった人は井上の部屋の前のポストへ提出してください.
- **この演習の得点は講義「グラフ理論」の成績とは一切関係がありません**.
- この情報工学演習 II(B)(グラフ理論) の成績は第 1 回レポート (6/14 出題) の点数と合わせて出します. ただし, **情報工学演習 II(B) の総合成績は各担当先生の提出される成績の平均として出される**ことに注意してください.
- この演習問題は全て「手計算」で話が済む程度のグラフサイズを扱っていますが, 大きなサイズのグラフへの適用を考えると, 各小問での計算を C 言語等でプログラミングし, グラフのデータを入力するだけで答えが出るようなプログラムを用意しておくことは好ましいことです. そこで, 余裕のある人はこれを試み, 簡単なコメントを記したプログラムソース, 及び, いくつかの実行例をレポートに加えて提出してくだされば加点の対象とします.