Title	2004年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一; Inoue, Jun-ichi
Description	当講義資料は著者のホームページ http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/ からもダウンロードできます。 http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/
Issue Date	2004
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/371
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	learning object
File Information	graph_ens2004_2ans.pdf, 第2回情報工学演習II(B)（グラフ理論）解答

情報工学演習 II(B) (グラフ理論) #2 解答例

担当：井上 純一 (情報エレクトロニクス系棟 8-13)

平成 16 年 9 月 6 日

ともかく, 問題文に与えられた誘導に従って見ていくことにしょう.

(1) まず, u, v 間の距離 $d(\mathsf{u},\mathsf{v})$ とは点 u から点 v へ至る経路の中での最短路であることに注意する. すると, 問題文の図 2 の点 1 を基点とした際の各他点への距離は

$$d(1,2)=2,\ \ d(1,3)=2,\ \ d(1,4)=3,\ \ d(1.5)=2,\ \ d(1,6)=1 \tag{1}$$

であるから, 点 1 に関する最遠距離 e(1) は

$$\mathrm{e}(1) \ = \ \max_{y\neq 1} d(1,y)=3 \tag{2}$$

となる. $2,\cdots,6$ を基点とした場合も (1)(2) と同様にして順次, 最遠距離を求めていくと

$$d(2,1)=1,\ \ d(2,3)=1,\ \ d(2,4)=2,\ \ d(2,5)=1,\ \ d(2,6)=1,\ \ \mathrm{e}(2)=\max_{y\neq 2} d(2,y)=2$$

$$d(3,1)=2,\ \ d(3,2)=1,\ \ d(3,4)=1,\ \ d(3,5)=1,\ \ d(3,6)=2,\ \ \mathrm{e}(3)=\max_{y\neq 3} d(3,y)=2$$

$$d(4,1)=3,\ \ d(4,2)=2,\ \ d(4,3)=1,\ \ d(4,5)=1,\ \ d(4,6)=2,\ \ \mathrm{e}(4)=\max_{y\neq 4} d(4,y)=3$$

$$d(5,1)=2,\ \ d(5,2)=1,\ \ d(5,3)=1,\ \ d(5,4)=1,\ \ d(5,6)=1,\ \ \mathrm{e}(5)=\max_{y\neq 5} d(5,y)=2$$

$$d(6,1)=1,\ \ d(6,2)=1,\ \ d(6,3)=2,\ \ d(6,4)=2,\ \ d(6,5)=1,\ \ \mathrm{e}(6)=\max_{y\neq 6} d(6,y)=2$$

以上の結果から, 問題文中, 図 2 のグラフ G の半径 $R(\mathsf{G})$, 及び, 直径 $D(\mathsf{G})$ は

$$R(\mathsf{G}) \ \equiv \ \min_{x} \mathrm{e}(x)=2 \tag{3}$$

$$D(\mathsf{G}) \ \equiv \ \max_{x} \mathrm{e}(x)=3 \tag{4}$$

となる. また, 中心は $\{2,3,4,5\}$, 周辺は $\{1,4\}$ である.

(2) まず, グラフ G の隣接行列 $\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{A} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

である．従って, やや退屈ではあるが, この隣接行列に関して $\boldsymbol{A}^2, \boldsymbol{A}^3$ を逐次計算してみると

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^3 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 3 & 3 & 5 \\ 6 & 6 & 8 & 3 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 4 & 5 & 7 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 2 & 6 & 3 \\ 3 & 9 & 7 & 6 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 4 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix} \tag{6}$$

となる ($\boldsymbol{A}$ が対称行列であるから, $\boldsymbol{A}^2, \boldsymbol{A}^3$ も対称行列であることに注意). よって, $\boldsymbol{S}(1), \boldsymbol{S}(2), \boldsymbol{S}(3)$ は順次に

$$\boldsymbol{S}(1) \quad = \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{S}(2) \quad = \quad \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{S}(3) \quad = \quad \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}^3 = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 & 3 & 5 & 8 \\ 8 & 10 & 10 & 5 & 12 & 10 \\ 4 & 10 & 7 & 7 & 10 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 4 & 8 & 4 \\ 5 & 12 & 10 & 8 & 10 & 10 \\ 7 & 10 & 6 & 4 & 10 & 7 \end{pmatrix} \tag{9}$$

となり, $r = 3$ で初めて, $\boldsymbol{S}(r)$ は要素が全て非ゼロとなる．従って, この $r = 3$ は (1) で求めた直径 $D(\mathsf{G})$ に等しいことがわかる．

(3) 問題文の定義に従って, $\boldsymbol{W}(2)$ を求めてみる．$\eta = 6$ であるから直ちに

$$\begin{aligned} \boldsymbol{W}(2) \quad &= \quad \frac{1}{\eta}\boldsymbol{A} + \frac{1}{\eta^2}\boldsymbol{A}^2 \\ &= \quad \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 6 & 0 & 6 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 6 & 0 & 6 \\ 6 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 0 & 2 & 7 \\ 7 & 4 & 7 & 2 & 8 & 8 \\ 1 & 7 & 3 & 7 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 8 & 8 & 7 & 4 & 7 \\ 7 & 8 & 2 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \tag{10}$$

となる.
従って, $C_2(i,2)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}
C_2(1,2) &= \frac{1}{36}(2+7+1+0+2+7) = \frac{19}{36} \\
C_2(2,2) &= \frac{1}{36}(7+4+7+2+8+8) = \frac{36}{36} \\
C_2(3,2) &= \frac{1}{36}(1+7+3+7+8+2) = \frac{28}{36} \\
C_2(4,2) &= \frac{1}{36}(0+2+7+2+7+1) = \frac{19}{36} \\
C_2(5,2) &= \frac{1}{36}(2+8+8+7+4+7) = \frac{36}{36} \\
C_2(6,2) &= \frac{1}{36}(7+8+2+1+7+3) = \frac{28}{36}
\end{aligned}$$

が得られる.
ここで, $\eta = 1$ の場合を考えてみると, 隣接行列の積の性質から $C_2(i,2)$ の値は, グラフ G の全ての点から点 i に至る 2 以下の歩道が何本あるか, を表し, $\eta = 6$ の場合には, 長さ 1 の歩道の方が, 長さ 2 の歩道よりも利用価値が高いということであるから, ここで得られた結果は, **利用価値をも考慮に入れた場合の地下鉄各駅 i の利用頻度 (乗客量) を表している**. この観点からは, 駅 $2,5$ が最も乗客量が多く, $1,4$ が最も少ない. これはグラフ G の形状から明らかであろう. しかし, グラフのサイズが大きくなり, 複雑になってくれば, ここでの系統的な分析方法が有効となってくる.

なお, $D(\mathsf{G}) = 3$ であるから, $\boldsymbol{W}(3)$, 及び, $C_3(i,3)$ をついでに求めておくと

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{W}(3) &= \frac{1}{\eta}\boldsymbol{A} + \frac{1}{\eta^2}\boldsymbol{A}^2 + \frac{1}{\eta^3}\boldsymbol{A}^3 \\
&= \boldsymbol{W}(2) + \frac{1}{\eta^3}\boldsymbol{A}^3 \\
&= \frac{1}{216}\begin{pmatrix} 12 & 42 & 6 & 0 & 12 & 42 \\ 42 & 24 & 42 & 12 & 48 & 48 \\ 6 & 42 & 18 & 42 & 48 & 12 \\ 0 & 12 & 42 & 12 & 42 & 6 \\ 12 & 48 & 48 & 42 & 24 & 42 \\ 42 & 48 & 12 & 6 & 42 & 18 \end{pmatrix} + \frac{1}{216}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 3 & 3 & 5 \\ 6 & 6 & 8 & 3 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 4 & 5 & 7 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 2 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 7 & 6 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 4 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{216}\begin{pmatrix} 14 & 48 & 9 & 3 & 15 & 47 \\ 48 & 30 & 50 & 15 & 57 & 55 \\ 9 & 50 & 22 & 47 & 55 & 16 \\ 5 & 15 & 47 & 14 & 48 & 9 \\ 15 & 57 & 55 & 48 & 30 & 50 \\ 47 & 55 & 16 & 9 & 50 & 22 \end{pmatrix} \qquad (11)
\end{aligned}$$

従って

$$
\begin{aligned}
C_3(1,3) &= \frac{1}{216}(14+48+9+3+15+47)=\frac{136}{216}\\
C_3(2,3) &= \frac{1}{216}(48+30+50+15+57+55)=\frac{255}{216}\\
C_3(3,3) &= \frac{1}{216}(9+50+22+47+55+16)=\frac{199}{216}\\
C_3(4,3) &= \frac{1}{216}(3+15+47+14+48+9)=\frac{136}{216}\\
C_3(5,3) &= \frac{1}{216}(15+57+55+48+30+50)=\frac{255}{216}\\
C_3(6,3) &= \frac{1}{216}(47+55+16+9+50+22)=\frac{199}{216}
\end{aligned}
$$

となり, 乗客量に関する順位は $r=2$ の場合と変わらない.

(4) 重み付きグラフに対する隣接行列の定義に従えば, 問題文中の図 3 に与えられたグラフ G に対する隣接行列 $\boldsymbol{A}$ は

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}
0.00 & 0.16 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.60\\
0.16 & 0.00 & 0.30 & 0.00 & 0.06 & 0.50\\
0.00 & 0.30 & 0.00 & 0.30 & 0.60 & 0.00\\
0.00 & 0.00 & 0.30 & 0.00 & 0.76 & 0.00\\
0.00 & 0.06 & 0.60 & 0.76 & 0.00 & 1.00\\
0.60 & 0.50 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00
\end{pmatrix} \tag{12}
$$

となる.

(5) $\boldsymbol{A}^r$ の第 ij 要素は

$$
[\boldsymbol{A}^r]_{ij} = \sum_{l_1=1}^{6}\sum_{l_2=1}^{6}\cdots\sum_{l_{r-1}=1}^{6} A_{il_1}A_{l_1l_2}A_{l_2l_3}\cdots A_{l_{r-2}l_{r-1}}A_{l_{r-1}j} \tag{13}
$$

と書ける. ところで, 行列 $\boldsymbol{A}$ の要素が全て 1 である場合には

$$
[\boldsymbol{A}^r]_{ij} = \sum_{l_1=1}^{6}\sum_{l_2=1}^{6}\cdots\sum_{l_{r-1}=1}^{6} 1 = 6^{r-1} \tag{14}
$$

となり ($\eta=6$ であることに注意), 行列 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}/\eta$ の r 乗の第 ij 要素は

$$
[\boldsymbol{X}^r]_{ij} = \frac{6^{r-1}}{6^r}=\frac{1}{6} \tag{15}
$$

となり, 有限値が残る. しかし, 今の場合, 各要素は 1 以下であるから, R を 1 以上の実数として $[\boldsymbol{A}^r]_{ij}$ は次のように評価できる.

$$
[\boldsymbol{A}^r]_{ij} = \sum_{l_1=1}^{6}\sum_{l_2=1}^{6}\cdots\sum_{l_{r-1}=1}^{6} A_{il_1}A_{l_1l_2}A_{l_2l_3}\cdots A_{l_{r-2}l_{r-1}}A_{l_{r-1}j} \le 6^{r-1}\left(\frac{1}{R}\right)^r \tag{16}
$$

従って, 行列 $\boldsymbol{X}^r$ の第 ij 要素は

$$
[\boldsymbol{X}^r]_{ij} \le \frac{1}{6}\left(\frac{1}{R}\right)^r \to 0 \quad (r\to\infty) \tag{17}
$$

となる．従って

$$\boldsymbol{X}^{\infty} \quad = \quad \lim_{r\to\infty} \boldsymbol{X}^{r} = \boldsymbol{0} \tag{18}$$

が成立することがわかる．

(6) 次の恒等式に着目する．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I} &= (\boldsymbol{I}+\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^2+\cdots)-(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^2+\cdots) \\ &= (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X})+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X})\boldsymbol{X}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X})\boldsymbol{X}^2+\cdots \\ &= (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^2+\cdots) \end{aligned} \tag{19}$$

従って

$$\boldsymbol{I}+\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^2+\cdots \quad = \quad (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X})^{-1} \tag{20}$$

すなわち

$$\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^2+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{X}^k \quad = \quad (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X})^{-1}-\boldsymbol{I} \tag{21}$$

が成り立つ．

そこで，この結果を用いて $\boldsymbol{W}(\infty)$ を計算することにしょう．やや面倒であるが，　決して難しくはない計算の結果

$$\begin{aligned} \boldsymbol{W}(\infty) &= \sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{X}^k = (\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}/\eta))^{-1}-\boldsymbol{I} \\ &= \begin{pmatrix} 0.0117 & 0.0363 & 0.0038 & 0.0026 & 0.0190 & 0.1074 \\ 0.0363 & 0.0118 & 0.0541 & 0.0068 & 0.0319 & 0.0933 \\ 0.0038 & 0.0541 & 0.0714 & 0.0653 & 0.1146 & 0.0240 \\ 0.0026 & 0.0068 & 0.0653 & 0.0210 & 0.1400 & 0.0241 \\ 0.0190 & 0.0319 & 0.1146 & 0.1400 & 0.0597 & 0.1812 \\ 0.1074 & 0.0933 & 0.0240 & 0.0241 & 0.1812 & 0.0487 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{22}$$

が得られるので，ターミナル容量は

$$\begin{aligned} C_{\infty}(1,\infty) &= 0.1808 \\ C_{\infty}(2,\infty) &= 0.2341 \\ C_{\infty}(3,\infty) &= 0.2793 \\ C_{\infty}(4,\infty) &= 0.2598 \\ C_{\infty}(5,\infty) &= 0.5463 \\ C_{\infty}(6,\infty) &= 0.4786 \end{aligned}$$

のように求まる．

(7) 駅 5 をみると，例えば駅 3 と比べて駅 5 につながる各路線の非混雑度が小さいが，一方で，ターミナル容量は全ての駅で最大である．従って，このターミナル容量の値に従えば，駅 5 につながる路線を整備し (例えば，停車時間をうまく調節するなどして)，非混雑度を上げていく企業努力がこの地下鉄には必要であると言える．