



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	準定常的既約型一般ラムゼー成長モデルについて : 最適経路の存在と近傍ターンパイク定理
Author(s)	久保田, 肇
Citation	経済學研究, 58(4), 223-259
Issue Date	2009-03-12
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/37311
Type	departmental bulletin paper
File Information	58-4_018.pdf



準定常的既約型一般ラムゼー成長モデルについて

——最適経路の存在と近傍ターンパイク定理——

久保田 肇

1. はじめに

マッケンジー（2002）の最終章の第7章は、離散型多部門経済成長モデルを扱っているが、その中でも特に一般既約型ラムゼー成長モデルにおける通常ターンパイク定理と呼ばれる結果が中心的に議論されている。そして、将来効用の割引の存在の有無とは関わり無く、最適経路が最適定常経路に収束して行く事が示されている¹⁾。しかし、離散無限期間の既約型一般ラムゼー成長モデルでは、将来効用の割引のない定常的なケースや将来効用の割引のある準定常的なケースのどちらでも、最適経路の存在に関しては、ターンパイク定理の証明で必要となる定常的な最適経路の存在以外は示されていない²⁾。それに対して、マッケンジー（1983）では将来効用に割引のある準定常モデルにおける最適経路の存在を、カントールの対角線論法を用いて示している。また、マッケンジー（1986）では非定常的な離散無限期間の既約型一般ラムゼー成長モデルにおける最適経路の一般的な存在定理を示してから、その結果を利用して定常的な離散無限期間の既約型一般ラムゼー成長モデルにおける最適経路の存在を、将来効用の割引のない定常的なケースとある準定常的なケースの各々で、示している。そこで本稿では、このマッケンジー（1983, 86）の議論に沿って将来効用の割引の存在する準定常的な離散無限期間の既約型一般ラムゼー成長モデルにおける最適経路の存在を示す。将来効用に割引のある準定常的な離散無限期間の既約型一般ラムゼー成長モデルにおける最適経路の存在を示すのに、効用関数 u の定義域 D の閉凸性と効用関数 u の D 上の連続性を用いる事が多いが、効用関数 u の定義域 D の凸性と効用関数 u の D 上の上半連続性と閉性を仮定すれば、 D の閉性は不必要となる³⁾。また、マッケンジー（1983, 86）の議論を利用して、最適経路に対してその支持価格列が存在する事も示す。

-
- 1) なお、マッケンジー（2002, 第7章第6節）では、ビューレー（1982）によって確立された、有限人が存在する離散無限期間経済における競争均衡経路が最適定常経路へ収束して行くという結果も示されている。ここでは、既約形準定常ラムゼー成長モデルの同様の議論を利用して最適定常経路の存在を示し、また、マッケンジー（2002）の第6章の結果を適用してそのような無限期間経済の競争均衡の存在を示して、最適経路の存在を確立している。この競争ターンパイク定理については別の機会に議論する予定である。
 - 2) 将来効用の割引のない定常的な離散無限期間の既約型一般ラムゼー成長モデルにおける最適経路の存在については、久保田（2008）を参照されたい。そこでは、マッケンジー（2002, 第7章）に従って、本稿のように効用関数 u の凸性の他にその閉性を利用する事で、効用関数 u の定義域 D の凸性のみを使用し、通常多くのケースで仮定される、その閉性を利用することなく、将来効用の割引のない定常的な離散無限期間の既約型一般ラムゼー成長モデルにおける最適経路の存在を示している。
 - 3) 基本的な議論はどちらも同一で、カントールの対角線論法を利用して実際に最適経路を構成するか、または、コンパクト集合上の上半連続な実数値関数には最大値が存在するという、一般ワイルシュトラスの最大定理を利用する。本稿では、前者のカントールの対角線論法を利用して実際に最適経路を構成する議論を用いる。

ところで、将来効用の割引が無い定常的なケースにおける最適経路の存在に関する議論では、最適経路が最大効用維持可能資本ストックに収束しに行くという漸近ターンパイク定理を利用して間接的に最適経路の存在を示すので、最初に漸近ターンパイク定理を示す必要があるが、将来効用の割引がある準定常的なケースでは、ターンパイク定理を利用しなくても直接的に最適経路の存在を示せるので、最初にターンパイク定理を示す必要はない。しかし、将来効用の割引が無い定常的なケースのターンパイク定理の証明がかなり早い段階で示されたのに比べると、将来効用に割引のある準定常的なケースのターンパイク定理の証明は、1財モデルのケースの証明はかなり早い段階で示されていたにも関わらず、一般的な多数財ケースの証明はその難しさによって暫く後で示された。マッケンジー (2002) の第7章においても、マッケンジー (1982) で扱われた準定常的な既約型一般ラムゼーモデルにおける近傍ターンパイク定理が取り上げられているので、そこで本稿でも、この将来効用に割引のある準定常的な既約型一般ラムゼーモデルにおける最適経路の最適定常経路への漸近的な収束ではなくてその近傍への収束という、近傍ターンパイク定理を取り上げる⁴⁾。マッケンジー (2002) の第7章における定常的なケースの漸近ターンパイク定理の証明と準定常的なケースの近傍ターンパイク定理の証明を比べても、そこでは後者が依然として著しく難解になっていて、その事からも将来効用に割引のある準定常型のケースにおけるターンパイク定理の証明に時間を要した事が想像できる。

2. 基本モデル

本稿では、将来効用に割引のある準定常的な離散無限期間の既約型一般ラムゼー成長モデルを扱い、技術集合 D や効用関数 u が依然として時間を通じて一定で、将来効用に対する割引が存在して、1より小さい正の ρ に対して t 期の効用関数が $u_t = \rho^t u$ として表現されるモデルを考察する。この時、割引因子の存在以外は技術 D や効用 u が時間を通じて一定なので、このようなモデルを準定常モデル (*quasi-stationary model*) という。 $(k^{t-1}, k^t) \in D, t = 1, 2, \dots$ となっている $\mathbf{k} = \{k^t\}_{t=0}^{\infty}$ を実現可能な経路、 $(k, k) \in D$ であれば資本ストック k を維持可能資本ストック、ある $(k, k) \in D$ に対して $(k^{t-1}, k^t) = (k, k) \in D, t = 1, 2, \dots$ となって経路 $\mathbf{k}$ を定常的と、各々呼ぶ。また、ある初期資本ストック k^0 からの任意の実現可能な資本ストック経路を特に $\mathbf{k}(k^0) = \{k^t\}_{t=0}^{\infty}$ として、そのような経路の集合を $\mathbf{K}(k^0) = \{\mathbf{k}(k^0) = \{k^t\}_{t=0}^{\infty} : (k^{t-1}, k^t) \in D, t = 1, 2, \dots\}$ とする。本稿では、このような将来効用の割引が存在する準定常モデルにおいて、一般的な最適経路と定常的最適経路が存在する事を示し、更に、一般的な最適経路が定常的最適経路の任意の近傍に収束するという近傍ターンパイク定理を示す。

将来効用を割引く無限期間既約型一般準定常的なラムゼー成長モデルでは、 k^0 からの任意の実現可能な資本ストック経路 $\mathbf{k}(k^0) = \{k^t\}_{t=0}^{\infty} (\in \mathbf{K}(k^0))$ に対して以下の補題1と2で示されているように、 k^t の有界性と u の閉性によって、期間毎の効用 $u(k^{t-1}, k^t)$ が $t = 1, 2, \dots$ について一様に上に

4) なお、これらの議論の際に、ベッカー/ボイド (1997)、ダナル・バン (2003)、そして、ル・バン (2006) でも、将来効用の割引があるケースで準定常的な離散無限期間の既約型一般ラムゼー成長モデルを扱っているので、これらの議論も参考にする。ダナル・バン (2003) では、1部門モデルではあるが、効用関数の微分可能性を前提にして既約型準定常的なラムゼーモデルにおけるターンパイク定理を簡潔に示している。また、ベッカー/ボイド (1997) でも多部門の既約型準定常的なラムゼーモデルにおけるターンパイク定理を明晰に議論している。

有界となり、ある $\mu (> 0)$ が存在して $\sup_{t=1,2,\dots} u(k^{t-1}, k^t) \leq \mu$ となる。したがって、 $\sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1} u(k^{t-1}, k^t) \leq \mu/(1-\rho)$ となって、将来効用に割引のないケースとは異なって、総割引効用和 $\sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1} u(k^{t-1}, k^t)$ は $+\infty$ へ発散しない無限級数である。実際、 $u^+(x, y) = \max\{u(x, y), 0\}$ (≥ 0)、 $u^-(x, y) = \max\{-u(x, y), 0\}$ (≥ 0) として、 $u(x, y) = u^+(x, y) - u^-(x, y)$ となる事に注意すると、 k^0 からの任意の実現可能な資本ストック経路 $\mathbf{k}(k^0) = \{k^t\}_{t=0}^{\infty}$ に対して、 $u^+(k^{t-1}, k^t) \leq \mu$ より $\sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1} u^+(k^{t-1}, k^t) \leq \mu/(1-\rho)$ であるが、 $\sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1} u^-(k^{t-1}, k^t)$ は正項級数なので $\sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1} u^-(k^{t-1}, k^t) \in R_+ \cup \{+\infty\}$ となり、故に、 $\sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1} u(k^{t-1}, k^t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T \rho^{t-1} u(k^{t-1}, k^t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T (\rho^{t-1} u^+(k^{t-1}, k^t) - \rho^{t-1} u^-(k^{t-1}, k^t)) = \sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1} u^+(k^{t-1}, k^t) - \sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1} u^-(k^{t-1}, k^t) \in [-\infty, \mu/(1-\rho)]$ となって、総割引効用和は有限値かまたは $-\infty$ で必ず存在する無限級数である。そして、 k^0 からの任意の実現可能な資本ストック経路 $\mathbf{k}'(k^0) = \{k'^t\}_{t=0}^{\infty}$ に対して $\sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1} (u(k^{t-1}, k'^t) - u(k^{t-1}, k^t)) = -\infty$ となるような自明なケースを除外すれば、 k^0 から実現可能な資本ストック経路 $\mathbf{k}(k^0) = \{k^t\}_{t=0}^{\infty}$ の最適性は、 k^0 からの任意の実現可能な資本ストック経路 $\mathbf{k}'(k^0) = \{k'^t\}_{t=0}^{\infty}$ に対して $\sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1} (u(k^{t-1}, k'^t) - u(k^{t-1}, k^t)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T \rho^{t-1} (u(k^{t-1}, k'^t) - u(k^{t-1}, k^t)) \leq 0$ となる事と表される。 k^0 から実現可能な資本ストック経路 $\mathbf{k}(k^0) = \{k^t\}_{t=0}^{\infty}$ は、 k^0 からの任意の実現可能な資本ストック経路 $\mathbf{k}'(k^0) = \{k'^t\}_{t=0}^{\infty}$ に対して $\sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1} (u(k^{t-1}, k'^t) - u(k^{t-1}, k^t)) \leq \sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1} (u(k^{t-1}, k^t) - u(k^{t-1}, k^t))$ となれば最適である⁵⁾。

最初に次節で準定常モデルでの一般的な最適経路の存在を示すが、将来効用の割引が存在しない定常モデルの時のような、価値損失を定義してそれを利用して一般的な最適経路の存在を示すという迂回的な議論ではなくて、より直接的に最適経路の存在を示す。将来効用の割引の無いケースでは、最適経路の存在を示すために、効用関数の強凹性に基づく $\bar{k}$ (最大効用維持可能資本ストック) の一意性、総価値損失の最小化を利用した最適経路の候補の構成、そして、経路の良好性に基づく $\bar{k}$ への収束 (ターンパイク定理)、といった議論を用いるが、将来効用に割引のある準定常的ケースでは、たとえ期間毎の効用 $u(k^{t-1}, k^t)$ が下に有界でなくても、無限期間の総割引効用和 $\sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1} u(k^{t-1}, k^t)$ が $+\infty$ へ発散する事がないために資本ストック経路 $\{k^t\}_{t=0}^{\infty}$ に関して (座標別収束位相で) 上半連続になり、故に、 k^0 から任意の実現可能な資本ストック経路 $\{k^t\}_{t=0}^{\infty} = \mathbf{k}(k^0) \in K(k^0)$ が (座標別収束位相で) コンパクトな事を考慮すれば最適経路を構成する事が出来て、ターンパイク定理に訴えなくても、最適経路の存在を示す事ができる⁶⁾。すると、将来効用に割引の無い定常的なケースにおける、効用関数の強凹性に基づく議論を使う必要がないので、効用関数 u の強凹性は必要ない。ここでは、効用関数 u の上半連続性のみを仮定して、最適経路の候補の

5) 将来効用の割引のないケースでは、 $\mathbf{k}(k_0) = \{k^t\}_{t=0}^{\infty}$ が最大というのは、同じ初期資本ストックからの任意の他の経路と初期部分の効用和を用いて比較した時に恒常的に悪くならなくて追い越されない事であり、同じ初期資本ストックからの任意の経路 $\mathbf{k}'(k_0) = \{k'^t\}_{t=0}^{\infty}$ に対して $\liminf_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T (u(k^{t-1}, k'^t) - u(k^{t-1}, k^t)) \leq 0$ が成立する事である。最大性は追越し基準で最適という事である。 $\mathbf{k}(k_0) = \{k^t\}_{t=0}^{\infty}$ が最適というのは、同じ初期資本ストックから始まる任意の他の経路との初期部分効用和を用いて比較した時に、漸近的に同程度に良くなって追いつける事であり、同じ初期資本ストックからの任意の経路 $\mathbf{k}'(k_0) = \{k'^t\}_{t=0}^{\infty}$ に対して $\limsup_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T (u(k^{t-1}, k'^t) - u(k^{t-1}, k^t)) \leq 0$ が成立する事である。この最適性は追付き基準で最適という事である。すると、ここでの将来効用に割引のある準定常的なケースでは、 $\sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1} (u(k^{t-1}, k'^t) - u(k^{t-1}, k^t)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T \rho^{t-1} (u(k^{t-1}, k'^t) - u(k^{t-1}, k^t)) = \liminf_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T [\rho^{t-1} (u(k^{t-1}, k'^t) - u(k^{t-1}, k^t))] = \limsup_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T [\rho^{t-1} (u(k^{t-1}, k'^t) - u(k^{t-1}, k^t))] \leq 0$ となるので、最適性と最大性の区別する必要はない。

構成してそれが最適である事を示す。そして、後の準定常モデルでの割引最大効用維持可能資本ストックの存在を示す際には、効用関数の凹性が必要となるのでそれを仮定し、更に後の近傍ターンパイク定理を示す際には、効用関数の強凹性が必要となるのでそれを仮定する。

ある集合 S 上で定義された実数値関数を φ とする。 $w \in bd(S)$ に対して、 $\phi(w, \epsilon) = \sup \{\varphi(z) : |w - z| < \epsilon (> 0), z \in S, z \neq w\}$ として、 $w \in S \cap bd(S)$ ならば $\varphi(w) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi(w, \epsilon) (= \limsup_{z \rightarrow w, z \neq w} \varphi(z))$, $w \in S^c \cap bd(S)$ ならば $\phi(w, \epsilon) \rightarrow -\infty (\epsilon \rightarrow 0)$ となる時に、 φ を閉と定義する⁷⁾。この定義では、関数 φ の凹性を前提としていないが、関数 φ の上半連続性が成立していると $w \in S \cap bd(S)$ ならば $\varphi(w) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi(w, \epsilon) (= \limsup_{z \rightarrow w, z \neq w} \varphi(z))$ となるので、この場合の関数 φ の閉性としては、実際には $w \in S^c \cap bd(S)$ の時に $\phi(w, \epsilon) \rightarrow -\infty (\epsilon \rightarrow 0)$ となる部分だけが必要である。そして φ が凸集合 S 上で凹かつ閉であれば、 φ の凹性より φ は $int(S)$ 上で連続なので上半連続であり、更に、 φ が閉という条件より $\varphi(\cdot)$ は $w \in (S \cap bd(S))$ でも上半連続となるので、 $\varphi(\cdot)$ は S 上で上半連続となる。典型的な閉凹関数の例は $\log x : R_{++} (= (0, +\infty)) \rightarrow R$ である。

まず、最初の課題である最適経路の存在のために、以下の仮定を導入する。

仮定 1 効用関数は $0 < \rho < 1$ に対して $u_t = \rho^t u$ であり、 u は上半連続で閉である。集合 D は非空である。

仮定 2 ある $\zeta (> 0)$ と $\xi (< 1)$ が存在して、 $\|x\| \geq \zeta$ となる任意の $(x, y) \in D$ に対して $\|y\| < \xi \|x\| < (\|x\|)$ となる。

仮定 3 $(x, y) \in D$ ならば、全ての $z \geq x, 0 \leq w \leq y$ に対して $(z, w) \in D$ で、 $u(z, w) \geq u(x, y)$ である。

仮定 4 ある $(\bar{x}, \bar{y}) \in D$ が存在して $\bar{y} > \rho^{-1} \bar{x}$ が成立する。

仮定 1 では ρ^t で将来効用が割引かれて、効用は全て共通の 0 時点での評価となっている。仮定 2 よりある初期資本ストックからの実行可能経路は一様有界となる。仮定 3 は選好の単調性と自由処分の可能性である。仮定 4 は $\bar{x}$ が十分に生産的でその投入の $\rho^{-1} (> 1)$ 倍より拡張的な資本ストック $\bar{y}$ の産出が可能な事を述べている。そして、 $\bar{y} > \rho^{-1} \bar{x}$ なので、 $\bar{y}$ を減少させる同時に $\bar{x}$ を増加させて $\bar{y}' > \rho^{-1} \bar{x}'$ となるようにすると、仮定 3 の単調性より $(\bar{x}', \bar{y}') \in D$ となるが、再び仮定 3 の単調

6) もちろん、この事より一般ワイエルシュトラスの最大値定理に訴えれば最適経路の存在が知られるのであるが、本稿ではマッケンジー (1983, 86) に沿って、カントールの対角線論法を利用して最適経路を実際に構成する事で、その存在を示す。なお、この将来効用の割引がある準定常モデルにおけるターンパイク定理は、将来効用の割引がない定常モデルにおけるターンパイク定理よりもその証明を確立するのが難しいのであるが、この準定常モデルにおけるターンパイク定理はそれ自身が重要な結果なので、本稿でも準定常モデルにおける最適経路の存在を確立した後で、マッケンジー (2002 第 7 章第 6 節) の内容に沿った形で、その証明を行う。

7) 関数の閉性は通常凹関数に対して定義される。凹関数の閉性についてはロッカフェラー (1970, p.308) を参照。なお、ルバン (2006) では $w \in S^c \cap bd(S)$ において $\phi(w, \epsilon) \rightarrow -\infty (\epsilon \rightarrow 0)$ となる部分も含めて $\phi(\cdot)$ を一般的な実数値連続関数として定義している。

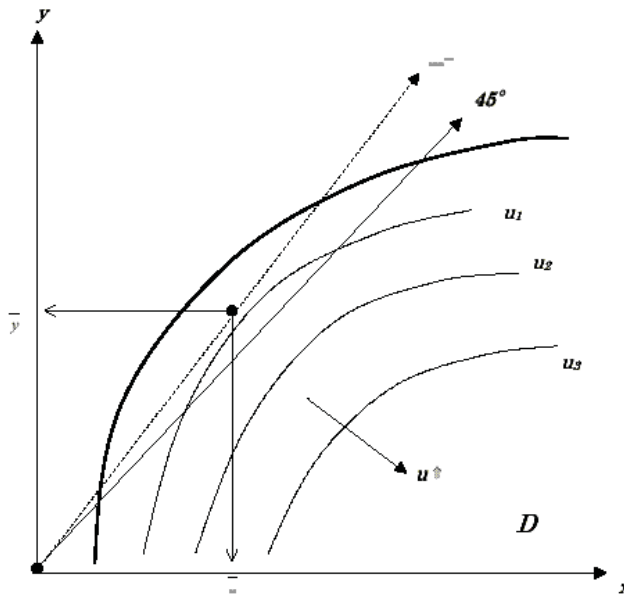


図 1

性を考慮すれば $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{int}(D)$ となる。そこで最初から $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{int}(D)$ と想定してもよい。

まず次節において、以上の仮定の下で、離散無限期間の準定常的既約型一般ラムゼーモデルにおける一般的な最適経路の存在を示す。

3. 準定常的一般ラムゼーモデルにおける最適経路の存在とその特徴付け

本節では、マッケンジー（2002，第7章）では扱われていない一般的な（初期資本ストック k^0 からの）最適経路の存在を示す。その際に、マッケンジー（1983，86）で扱われている議論に従う。将来効用の割引が無い定常的なケースにおける一般的な最適経路の存在に関する議論では、直接的に $\sum_{t=1}^{\infty} u(k^{t-1}, k^t)$ の上半連続性を示して最適経路の存在を示すというのではなくて、総損失価値の非負性を利用してその下半連続性を示し、更に、良好な経路，故に最適経路，が最大効用維持可能資本ストックに収束して行くという漸近ターンパイク定理を利用して、間接的に最適経路の存在を示す。これに対して、将来効用を $\rho \in (0, 1)$ で割引く準定常的なケースにおける一般的な最適経路の存在に関する議論では、最適経路が割引最大効用維持可能資本ストックに収束して行くという漸近ターンパイク定理を利用しなくても、以下の補題 1，補題 2 と $\rho \in (0, 1)$ によって， $\sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1} u(k^{t-1}, k^t)$ の上半連続性を直接的に確立出来るので，この事を利用して直接的に最適経路の存在を示す。

そこでこの目的のために必要となる幾つかの補題を示す。最初に，仮定 1 の効用関数の上半連続性と閉性の下では，集合 D の閉性が無くても D と有界閉部分集合との共通集合 $(\neq \emptyset)$ 上に必ず最大点が存在する事を示す。したがって，一般ワイエルシュトラス最大定理では，効用関数 u の上半連続性と集合 D の有界閉性の下で最大点の存在を示すのであるが，効用関数 u の閉性を追加すれば，集合 D の閉性を外す事が出来て，それと任意の有界閉部分集合と共通集合上に必ず最大点が存在す

る。今 B を R^{2n} の有界閉集合 ($\neq \emptyset$) とするとする。

補題 1 $B \cap D (\neq \emptyset)$ ならば u は $B \cap D$ 上で最大値を実現する。

証明. まず, u が $B \cap D$ 上で上に有界でなく, ある $(x^v, y^v)_{v=1}^\infty \subset B \cap D$ が存在して, $u(x^v, y^v) \uparrow +\infty$ とする。 $(x^v, y^v)_{v=1}^\infty \in B$ より $(x^v, y^v)_{v=1}^\infty$ は有界であり, ある (x, y) に対して $(x^v, y^v) \rightarrow (x, y) \in (cl(D) \cap B) (v \rightarrow \infty)$ としてよい。 $(x, y) \in cl(D) \setminus D (= bd(D) \setminus D)$ とすると, u の閉性より $u(x^v, y^v) \downarrow -\infty$ となるので, $u(x^v, y^v) \uparrow +\infty$ に矛盾して, 故に, $(x, y) \in D$ となって $u(x, y) < +\infty$ となる。すると, 仮定 1 より u は D 上で上半連続なので, $\limsup_{v \rightarrow \infty} u(x^v, y^v) = +\infty \leq u(x, y) < +\infty$ となるが, これは矛盾であり, 故に, u は $B \cap D$ 上で上に有界である。そこで, $M = \sup\{u(x, y) : (x, y) \in B \cap D\} < +\infty$ とする。上限の定義より, ある $(x^v, y^v)_{v=1}^\infty \subset B \cap D$ が存在して $u(x^v, y^v) \uparrow M (v \rightarrow \infty)$ となるが, $(x^v, y^v)_{v=1}^\infty \in B$ より $(x^v, y^v)_{v=1}^\infty$ は有界なので, ある (x, y) に対して $(x^v, y^v) \rightarrow (x, y) \in cl(D) (v \rightarrow \infty)$ としてよい。 $(x, y) \in cl(D) \setminus D (= bd(D) \setminus D)$ とすると, 再び u の閉性より $u(x^v, y^v) \downarrow -\infty$ となるが, $u(x^v, y^v) \uparrow M$ に矛盾するので $(x, y) \in D$ となる。すると, u は D 上で上半連続なので, $\limsup_{v \rightarrow \infty} u(x^v, y^v) = M \leq u(x, y) \leq M$ となって $u(x, y) = M$ となり, 故に, u は $(x, y) \in B \cap D$ において $B \cap D$ 上の最大値を実現する。 $\square$

この証明では, B を R^{2n} の有界閉集合としているので $B \cap D$ は D において閉で有界であり, 故にこの証明が示しているのは, u が D 上で上半連続かつ閉ならば, D において閉で有界な D' 上で u は最大値を実現するという事で, その場合には u の閉性より D の閉性は不必要となる。これが u を閉と定義した理由である。ここでは u の凹性は全く用いていない。そして, D' が有界で D の閉集合とは限らないケースでは, この証明の前半部分で示されてように, u が D' 上で上に有界という事は成立するが, D' が D の閉集合とは限らないために u の上限が D' 上の点で実現するとは限らない。

次に, 仮定 2 から実現可能な資本ストックの経路はどれも有界の範囲で収まって, 無限に発散して行かない事を示す。

補題 2 $k(k^0) = \{k^t\}_{t=0}^\infty (\in K(k^0))$ に対して, $\|k^t\| \leq \max(\|k^0\|, \zeta), t = 0, 1, 2, \dots$ となる。

証明. $(z, w) \in D$ で $\|z\| \leq \zeta$ とする。 $z \leq z'$ で $\|z'\| = \zeta$ となる z' を考えると, 仮定 3 の自由処分より $(z', w) \in D$ となるが, $\|z'\| = \zeta$ と仮定 2 より, $\|w\| < \xi \|z'\| < \xi \|z'\| = \zeta$ となって, $\|w\| < \zeta$ となる。したがって, $(k^0, k^1) \in D$ で $\|k^0\| \leq \zeta$ ならば $\|k^1\| \leq \zeta$ となり, 帰納的に考えれば $\|k^t\| \leq \zeta, \forall t = 0, 1, 2, \dots$ となる。一方, $(z, w) \in D$ で $\|z\| > \zeta$ とすると, 仮定 2 より $\|w\| < \xi \|z\| < \xi \|z\|$ となって $\|w\| < \xi \|z\|$ であるが, 更に $(w, x) \in D$ とすると, $\|w\| \leq \zeta$ か $\|w\| > \zeta$ であり, $\|w\| > \zeta$ であれば, 仮定 2 より $\|x\| < \xi \|w\| < \xi \|w\|$ となって $\|x\| < \xi \|w\| < \xi \|z\|$ となる。また, $\|w\| \leq \zeta$ であれば, 既に示した事によって $\|x\| < \zeta$ である。したがって, $(k^0, k^1), (k^1, k^2) \in D$ で $\|k^0\| > \zeta$ ならば $\|k^0\| > \|k^1\| > \|k^2\|$ か $\|k^2\| \leq \zeta (< \|k^0\|)$ となり, 帰納的に考えれば, $\|k^t\| \leq \|k^0\| \forall t = 0, 1, 2, \dots$ となる。故に, 実現可能などのような経路 $\{k^t\}_{t=0}^\infty$ に対しても, $\|k^t\| \leq \max(\zeta, \|k^0\|) \forall t = 0, 1, 2, \dots$ となる。 $\square$

初期の資本ストック k^0 を所与とすると, 補題 2 によって k^0 から実現可能な任意の経路 $k(k^0) = \{k^t\}_{t=0}^\infty$ は一様に有界となるので, 補題 1 より, ある $\mu (> 0)$ が存在して,

$\sup\{\sup_{t \geq 1} u(k^{t-1}, k^t) : k(k^0) = \{k^t\}_{t=0}^\infty \in K(k^0)\} \leq \mu$ となり、各期の効用 $u(k^{t-1}, k^t)$ は、 k^0 から実現可能な任意の経路 $k(k^0) = \{k^t\}_{t=0}^\infty$ に対して一様に上に有界となる。

次に、 $\sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1} u(k^{t-1}, k^t)$ の上半連続性を示す。将来効用の割引が無い定常モデルでは、 $u(k^{t-1}, k^t)$ の効用関数が下に有界になっていなくてもその凹性と閉性があれば、損失価値を使って総効用和 $\sum_{t=1}^\infty u(k^{t-1}, k^t)$ の上半連続性が示せるのであるが、将来効用に割引がある準定常モデルでは、それとは異なって、効用関数の上半連続性と閉性があれば損失価値を使わなくても、直接的に $\sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1} u(k^{t-1}, k^t)$ の上半連続性が示せる。

補題3 実行可能な経路列 $k^m(k^{m,0}) = \{k^{m,t}\}_{t=0}^\infty \in K(k^{m,0})$, $m = 1, 2, \dots$, が実行可能な経路 $k'(k^0) = \{k'^t\}_{t=0}^\infty \in K(k^0)$ に対して各 $t = 0, 1, 2, \dots$, おいて $k^{m,t} \rightarrow k'^t (m \rightarrow \infty)$ となれば、 $\limsup_{m \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1} u(k^{m,t-1}, k^{m,t}) \leq \sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1} u(k'^{t-1}, k'^t)$ となる⁸⁾。

証明. 実行可能な経路 $k^m(k^{m,0}) = \{k^{m,t}\}_{t=0}^\infty$ が実行可能な経路 $k'(k^0) = \{k'^t\}_{t=0}^\infty$ に対して、各 $t = 0, 1, 2, \dots$, において $k^{m,t} \rightarrow k'^t (m \rightarrow \infty)$ となったとする。特に、 $k^{m,0} \rightarrow k'^0 (m \rightarrow \infty)$ なので、 $(k^{m,0})_{m=1}^\infty$ は有界であり、故に、補題1よりある $\lambda > 0$ が存在して $\lambda \geq \sup_{m,t=1,2,\dots} \max\{k^{m,0}, \zeta\}$ となる。すると、補題2よりある $\mu (> 0)$ が存在して $\sup_{m,t=1,2,\dots} u(k^{m,t-1}, k^{m,t}) \leq \mu$ となるので、故に、 $\sup_{m=1,2,\dots} \sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1} u(k^{m,t-1}, k^{m,t}) \leq \mu/(1-\rho)$ となる。今、 $\epsilon (> 0)$ を所与とする。 $\sup_{m=1,2,\dots} \sum_{t=T'+1}^\infty \rho^{t-1} u(k^{m,t-1}, k^{m,t}) \leq \mu \rho^{T'}/(1-\rho)$ より $\mu \rho^{T'}/(1-\rho) \leq \epsilon$ となるような十分に大きい T' を選ぶと、任意の十分に大きい T' に対して $\sup_{m=1,2,\dots} \sum_{t=T'+1}^\infty \rho^{t-1} u(k^{m,t-1}, k^{m,t}) \leq \epsilon$ となる。そこで、十分に大きい T' を任意に固定しておく、任意の m に対して $\sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1} u(k^{m,t-1}, k^{m,t}) \leq \sum_{t=1}^{T'} \rho^{t-1} u(k^{m,t-1}, k^{m,t}) + \sum_{t=T'+1}^\infty \rho^{t-1} u(k^{m,t-1}, k^{m,t}) \leq \sum_{t=1}^{T'} \rho^{t-1} u(k^{m,t-1}, k^{m,t}) + \epsilon$ となるので、 m に関する両辺の $\limsup$ を取ると $\limsup$ の性質と u の上半連続性によって、 $\limsup_{m \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1} u(k^{m,t-1}, k^{m,t}) \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} (\sum_{t=1}^{T'} \rho^{t-1} u(k^{m,t-1}, k^{m,t}) + \epsilon) \leq (\sum_{t=1}^{T'} \limsup_{m \rightarrow \infty} \rho^{t-1} u(k^{m,t-1}, k^{m,t})) + \epsilon \leq (\sum_{t=1}^{T'} \rho^{t-1} u(k'^{t-1}, k'^t)) + \epsilon$ となる。そして、この関係は任意の十分に大きい T' に対して成立するので $T' \rightarrow \infty$ とすれば、 $\limsup_{m \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1} u(k^{m,t-1}, k^{m,t}) \leq \lim_{T' \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^{T'} \rho^{t-1} u(k'^{t-1}, k'^t) + \epsilon = \sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1} u(k'^{t-1}, k'^t) + \epsilon$ となる。更に、 $\epsilon (> 0)$ は任意だったので $\epsilon \rightarrow 0$ とすれば、 $\limsup_{m \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1} u(k^{m,t-1}, k^{m,t}) \leq \sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1} u(k'^{t-1}, k'^t)$ となり、求めていた関係が得られる。□

この $\sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1} u(k^{t-1}, k^t)$ の上半連続性を利用すると、 k^0 からの最適経路 $\tilde{k}(k^0) = \{\tilde{k}^t\}_{t=0}^\infty$ を構成する事が出来る。

定理1 仮定1,2,3,4の下で、もしも $\rho < 1$ ならば、 $K(k^0) \neq \emptyset$ となる任意の k^0 からの最適経路 $\tilde{k}(k^0) = \{\tilde{k}^t\}_{t=0}^\infty$ が存在する。

証明. k^0 から実現可能な任意の経路 $k(k^0) = \{k^t\}_{t=0}^\infty \in K(k^0) (\neq \emptyset)$ を考える。まず、 $\sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1} u(k^{t-1}, k^t) \leq \mu/(1-\rho) < \infty$ となるので、 $V = V(k^0) = \sup_{k(k^0) = \{k^t\}_{t=0}^\infty \in K(k^0)} \sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1} u(k^{t-1}, k^t)$,

8) この証明では、ル・ヴァン/ダナ (2003, 第7章, 命題7.3.2, p.138-9) やル・ヴァン/ダナ (2006, 命題1.4.2, p.9) の手法を利用した。彼らは効用関数の連続性を仮定しているが、実際には、ここでのように効用関数の上半連続性と閉性のみで十分である。

$k^t) \leq \mu/(1-\rho) < \infty$ となる。上限の性質より、任意の m に対してある $\mathbf{k}^m(k^0) = \{k^{m,t}\}_{t=0}^\infty \in K(k^0)$ が存在して $V-1/m < \sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1} u(k^{m,t-1}, k^{m,t})$ となる。 $(\sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1} u(k^{m,t-1}, k^{m,t}))_{m=1}^\infty$ は単調増加なので $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1} u(k^{m,t-1}, k^{m,t}) = V$ である。 $k^{m,0} = k^0, m = 1, 2, \dots$ と補題2より $\sup_{m,t=1,2,\dots} (\|k^{m,t}\|) \leq \max\{\|k^0\|, \xi\}$ なので、カントールの対角線論法を用いれば、 $(\mathbf{k}^m(k^0))_{m=1}^\infty = (\{k^{m,t}\}_{t=0}^\infty)_{m=1}^\infty$ のある部分列 $(\mathbf{k}^{m_q}(k^0))_{q=1}^\infty = (\{k^{m_q,t}\}_{t=0}^\infty)_{q=1}^\infty$ と $\tilde{\mathbf{k}}(k^0) = \{\tilde{k}^t\}_{t=0}^\infty$ が存在して、任意の $t = 1, 2, \dots$ に対して $k^{m_q,t} \rightarrow \tilde{k}^t (q \rightarrow \infty)$ となる。そこで、最初から $(\mathbf{k}^m(k^0))_{m=1}^\infty = (\{k^{m,t}\}_{t=0}^\infty)_{m=1}^\infty$ を $(\mathbf{k}^{m_q}(k^0))_{q=1}^\infty = (\{k^{m_q,t}\}_{t=0}^\infty)_{q=1}^\infty$ と想定して、任意の $t = 1, 2, \dots$ に対して $k^{m,t} \rightarrow \tilde{k}^t (m \rightarrow \infty)$ となるとする。まず、 $t (\geq 1)$ を任意に固定する。 $(k^{m,t-1}, k^{m,t}) \in D$ より $(\tilde{k}^{t-1}, \tilde{k}^t) \in cl(D)$ となるが、今 $(\tilde{k}^{t-1}, \tilde{k}^t) \in cl(D) \setminus D (= bd(D) \setminus D)$ となったとする。 u の閉性から $u(k^{m,t-1}, k^{m,t}) \rightarrow -\infty (m \rightarrow \infty)$ となる。すると、任意の m に対して $\rho^{t-1} u(k^{m,t-1}, k^{m,t}) \leq \rho^{t-1} \mu$ なので、 $\sum_{r=1}^\infty \rho^{r-1} u(k^{m,r-1}, k^{m,r}) = \rho^{t-1} u(k^{m,t-1}, k^{m,t}) + \sum_{r \neq t} \rho^{r-1} u(k^{m,r-1}, k^{m,r}) \leq \rho^{t-1} u(k^{m,t-1}, k^{m,t}) + \sum_{r \neq t} \rho^{r-1} u(k^{m,r-1}, k^{m,r}) + \mu^{t-1}/(1-\rho) \leq \rho^{t-1} u(k^{m,t-1}, k^{m,t}) + \mu/(1-\rho)$ より、 $m \rightarrow \infty$ とすると右辺 $\rightarrow -\infty$ となるので、十分に大きい m' に対して $\sum_{r=1}^\infty \rho^{r-1} u(k^{m',r-1}, k^{m',r}) < V-1/m'$ となって、 $\mathbf{k}^m(k^0) = \{k^{m,t}\}_{t=0}^\infty$ の選び方に矛盾する。故に、任意の $t = 1, 2, \dots$ に対して $(\tilde{k}^{t-1}, \tilde{k}^t) \in D$ であり、 $\tilde{\mathbf{k}}(k^0) = \{\tilde{k}^t\}_{t=0}^\infty$ は k^0 からの実行可能で $\tilde{\mathbf{k}}(k^0) = \{\tilde{k}^t\}_{t=0}^\infty \in K(k^0)$ である。すると、任意の $t = 1, 2, \dots$ に対して $k^{m,t} \rightarrow \tilde{k}^t (m \rightarrow \infty)$ なので、補題3から $\limsup_{m \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1} u(k^{m,t-1}, k^{m,t}) \leq \sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1} u(\tilde{k}^{t-1}, \tilde{k}^t)$ となるが、 $\mathbf{k}^m(k^0) = \{k^{m,t}\}_{t=0}^\infty$ の選び方より $\limsup_{m \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1} u(k^{m,t-1}, k^{m,t}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1} u(k^{m,t-1}, k^{m,t}) = V$ となるので、 $V = \sup_{\mathbf{k}(k^0) = \{k^t\}_{t=0}^\infty \in K(k^0)} \sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1} u(k^{t-1}, k^t) = \sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1} u(\tilde{k}^{t-1}, \tilde{k}^t)$ となり、故に、 $\tilde{\mathbf{k}}(k^0) = \{\tilde{k}^t\}_{t=0}^\infty$ は k^0 から最適経路である。□

k^0 が拡張的で $k' > k^0$ となる $(k^0, k') \in D$ が存在すれば、仮定3の単調性から $(k^0, k^0) \in D$ となり、 $k^t = k^0, t = 1, 2, \dots$ となる定常経路 $\mathbf{k} = \{k^t\}_{t=0}^\infty$ に対して $\mathbf{k} = \{k^t\}_{t=0}^\infty \in K(k^0)$ となって $K(k^0) \neq \emptyset$ となる。故にこの結果より、この拡張的な資本ストック k^0 からの最適経路が存在して、次の結果が得られる。

系1 仮定1, 2, 3, 4の下で、 k^0 が拡張可能な資本ストックであれば、 k^0 からの最適経路 $\tilde{\mathbf{k}}(k^0) = \{\tilde{k}^t\}_{t=0}^\infty$ が存在する。

より一般的には、 k^0 が第5節で導入する充分性を満たしていれば良い。また、 u の凹性と閉性があれば u の上半連続性と閉性が成立するので、仮定1の u の上半連続性の部分を u の凹性に変更してそれを以下の仮定1'へ変更しても、将来効用に割引がある準定常モデルにおける一般的な最適経路の存在は成立する。

仮定1' 効用関数は $0 < \rho < 1$ に対して $u_t = \rho^t u$ であり、 u は凹かつ閉で、集合 D は凸集合である。

系2 仮定1', 2, 3, 4の下で、 $K(k^0) \neq \emptyset$ となる任意の k^0 からの最適経路 $\tilde{\mathbf{k}}(k^0) = \{\tilde{k}^t\}_{t=0}^\infty$ が存在し、更に、 k^0 が拡張可能な資本ストックであれば、 k^0 からの最適経路 $\tilde{\mathbf{k}}(k^0) = \{\tilde{k}^t\}_{t=0}^\infty$

が存在する。

以上の結果は u が下に有界として示される事が多いが、仮定 1 のように u が閉であれば下に有界でなくてもよく、この結果は特に u が $\log$ で表現されるようなケースも包含しているので、大変に有用である。

ここで、仮定 1' を利用して u を凹として、上でその存在を示した最適経路をその支持価格によって特徴付ける。 $X = \{y \mid \exists (x, y) \in D, K(y) \neq \phi, V(x) > -\infty\}$ と定義する。これは、ある期首資本ストックから変換可能な期末資本ストックの中で、そこからの無限経路が存在してその価値関数 $V(x)$ の値が有限であるようなものである。 D の凸性と V の凹性から X は凸である。 $k^0 (\in \text{int}(X))$ からの最適経路を $\tilde{k}(k^0) = \{\tilde{k}^t\}_{t=0}^\infty$ として $\sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1} u(\tilde{k}^{t-1}, \tilde{k}^t) = V(k^0)$ とする。 $k^0 \in \text{int}(X)$ なので、 u の単調性から k^0 を内部に含む閉区間上で V の値は一様に上に有界となる。

二つの集合 A, B を $A = \{(x, v) \mid x \leq k^0, v > V(k^0)\}$, $B = \{(y, w) \mid y \in X, w \leq V(y)\}$ と定義する。 A は定義より凸集合で、 B は u の凹性と D の凸性による V の凹性より凸集合であり、 u の単調性から導かれる V の単調性を考慮すれば、作り方より $A \cap B = \phi$ である。すると、凸集合に関する分離定理より、 $\exists (p, \pi) (\neq 0), \pi v - px \geq \pi w - py, \forall (x, v) \in A, (y, w) \in B$ となる。 $\pi = 0$ とすると $p \neq 0$ であり、 $x = k^0$ とすると分離の条件と $k^0 \in \text{int}(X)$ より $pk^0 \leq py, \forall y \in B_\varepsilon(k^0)$ となるので、 $(k^0 - \delta p) \in B_\varepsilon(k^0)$ となる十分に小さい $\delta > 0$ に対しても $pk^0 \leq p(k^0 - \delta p)$ ($= pk^0 - \delta pp < pk^0$) となって矛盾が起こり、 $\pi \neq 0$ である。そこで $\pi = 1$ として $p = p_0$ とすれば $v - p_0 x \geq w - p_0 y, \forall (x, v) \in A, (y, w) \in B$ となるが、 $\forall k \in X, (k, V(k)) \in B$ より $v - p_0 x \geq V(k) - p_0 k, \forall (x, v) \in A, k \in X$ となるので、 $x = k^0$ として $v \rightarrow V(k^0)$ とすれば、 $V(k^0) - p_0 k^0 \geq V(k) - p_0 k, k \in X$ となる。

次に、帰納法を利用して、 $\rho^T V(k^T) - p_T k^T \geq \rho^T V(k) - p_T k, k \in X, T = 0, 1, \dots, t-1 (t \geq 1)$ が成立しているとする。ベルマンの最適性原理に基づくベルマン方程式より一般には $V(k) = \sup \{u(k, y) + \rho V(y) \mid (k, y) \in D\}$, $k \in X$ であるが、 k^0 からの最適経路 $\tilde{k}(k^0) = \{\tilde{k}^t\}_{t=0}^\infty$ に対しては $V(k^T) = u(k^T, k^{T+1}) + \rho V(k^{T+1}), T = 0, 1, \dots$, となる。この時、 $V(k^0) = u(k^0, k^1) + \rho V(k^1), k^0 \in X$ より、 $k^1 \in X$ となり、同様にして、 $k^T \in X, T = 0, 1, \dots$, となる。そして、 $\rho^{t-1} V(k^{t-1}) - p_{t-1} k^{t-1} \geq \rho^{t-1} V(k) - p_{t-1} k, k \in X$ の条件における $V(k^{t-1})$ と $V(k)$ にこのベルマン方程式の関係を代入すると、 $\rho^{t-1} u(k^{t-1}, k^t) + \rho^t V(k^t) - p_{t-1} k^{t-1} (= \mu) \geq \rho^{t-1} u(k, y) + \rho^t V(y) - p_{t-1} k, (k, y) \in D, k \in X$ となって、 $\mu - \rho^{t-1} u(k, y) + p_{t-1} k \geq \rho^t V(y), (k, y) \in D, k \in X$ となる。

ここで、二つの集合 A', B' を $A' = \{(y, w) \mid \exists (x, y) \in D, \mu - \rho^{t-1} u(x, y) + p_{t-1} x < w\}$, $B' = \{(y', w') \mid w' \leq \rho^t V(y'), y' \in X\}$ と定義する。 u の凹性から $-u$ は凸なので A' は凸であり、また、 V の凹性から B' も凸であり、作り方から $A' \cap B' = \phi$ なので、凸集合の分離定理より、 $\exists (p, \pi) (\neq 0), \pi w - py \geq \pi w' - py', \forall (y, w) \in A', (y', w') \in B'$ となる。まず、 $(x, y) \in D$ と $y' \in X$ を任意に固定して、 $(y, w) \in A'$ なる w に対して $w \rightarrow \mu - \rho^{t-1} u(x, y) + p_{t-1} x$ とし、また、 $w' = \rho^t V(y')$ とすれば、分離の条件より $\pi(\rho^{t-1} u(k^{t-1}, k^t) + \rho^t V(k^t) - p_{t-1} k^{t-1} - \rho^{t-1} u(x, y) + p_{t-1} x) - py \geq \pi \rho^t V(y') - py', \forall (x, y) \in D, y' \in X$ となる。 $\pi = 0$ とすると $p \neq 0$ であり、分離の条件よりある x に対して $(x, y) \in D$ となる y と $y' \in X$ に対して $py \leq py'$ となるが、 $y = k^0$ と $y' \in B_\varepsilon(k^0) \subset X$ に対しても $pk^0 \leq py', \forall y' \in B_\varepsilon(k^0)$ となるので、 $(k^0 - \delta p) \in B_\varepsilon(k^0)$ となる十分に小さい $\delta > 0$ に対しても $pk^0 \leq p(k^0 - \delta p) (= pk^0 - \delta pp < pk^0)$ となって矛盾が起こり、 $\pi \neq 0$

である。

そこで $\pi = 1$ として $p = p_t$ とすると $\rho^{t-1}u(k^{t-1}, k^t) + \rho^t V(k^t) - p_{t-1}k^{t-1} - \rho^{t-1}u(x, y) + p_{t-1}x - p_t y \geq \rho^t V(y') - p_t y', \forall (x, y) \in D, y' \in X$ となるが、まず $(x, y) = (k^{t-1}, k^t)$ とすると $\rho^t V(k^t) - p_t k^t \geq \rho^t V(y') - p_t y', y' \in X$ となって t の時の $V(k^t)$ に関する条件が成立する。また、 $y' = k^t (\in X)$ とすると、 $\rho^{t-1}u(k^{t-1}, k^t) - p_{t-1}k^{t-1} + p_t k^t \geq \rho^{t-1}u(x, y) - p_{t-1}x + p_t y, \forall (x, y) \in D$ となる。この時、 $(x, y) \in D$ となる x の上方非有界性と u の単調性から $(p_{t-1})_i < 0$ となる成分 i が存在すると、 $x = k^0 + \gamma e^i, \gamma > 0$ として $\gamma \rightarrow \infty$ とすれば、 $\rho^{t-1}u(x, y) - p_{t-1}x + p_t y \rightarrow \infty$ となって矛盾が起こるので $p_t \geq 0, t = 0, 1, \dots$ である。以上により次の結果が得られた。

定理 2 仮定 1', 2, 3, 4 の下で、 $k^0 (\in \text{int}(X))$ からの最適経路 $\tilde{k}(k^0) = \{\tilde{k}^t\}_{t=0}^\infty$ に対してある非負の価格ベクトルの点列 $(p_t)_{t=0}^\infty$ が存在して、 $\rho^t V(k^t) - p_t k^t \geq \rho^t V(y') - p_t y', y' \in X, \rho^{t-1}u(k^{t-1}, k^t) - p_{t-1}k^{t-1} + p_t k^t \geq \rho^{t-1}u(x, y) - p_{t-1}x + p_t y, \forall (x, y) \in D$ が成立する。

p_t は 0 時点での現在割引価格なので、 $t(t-1)$ 時点で評価されている $V(k^t)(u(k^{t-1}, k^t))$ は割引因子 $\rho^t(\rho^{t-1})$ を用いて $\rho^t V(k^t)(\rho^{t-1}u(k^{t-1}, k^t))$ とする事で 0 時点での現在割引価値表示になる。したがって、最適経路 $\{\tilde{k}^t\}_{t=0}^\infty$ は、効用表示の現在割引価値で、価値関数と資本ストック費用の差の利潤を最大化し、また、各時点において効用と期末資本ストックの収入と期首資本ストックの費用の差の利潤を最大化している。

以上で、将来効用の割引がある離散無限期間の準定常的既約型一般ラムゼーモデルにおける一般的な最適経路の存在に関する議論を終了する。本節でその存在を示した、将来効用の割引がある離散無限期間の準定常的既約型一般ラムゼーモデルにおける一般的な最適経路は定常的である必要はないが、次節ではそのようなモデルにおける定常的な最適経路の存在を示す。

4. 準定常一般ラムゼーモデルにおける定常割引最適経路の存在

本節では、準定常モデルにおいて最適定常経路を実現するような維持可能効用資本ストックの存在を示す。維持可能資本ストックの中で 1 期間内の効用 $u(k, k)$ を最大にする資本ストック k を最大効用維持可能資本ストック、対応する効用 $u(\bar{k}, \bar{k})$ を最大維持可能効用と呼ぶ⁹⁾。将来効用の割引のない定常的なケースでは、全ての t に対して $(k^{t-1}, k^t) = (\bar{k}, \bar{k}) \in D$ となるような定常経路 $\mathbf{k}(\bar{k}) = \{k^t\}_{t=0}^\infty$ が $\bar{k}$ から始まる経路 $\mathbf{K}(\bar{k})$ の中で最適（追付き基準で）なので、このような定常経路を最適定常経路と呼ぶ¹⁰⁾。ここでは最初に、次節の近傍ターンパイク定理で用いる必要があるため、期間内の効用関数 u の強凹性の下でこのような最大維持可能資本ストック $\bar{k}$ が一意的存在し、それを双対変数（価格）を用いて特徴付けて、最大維持可能資本ストック $(\bar{k}, \bar{k}) \in D$ では効用を含んだ利潤最大化が実現する、という事を示す。 $\bar{k}$ の一意性のために、仮定 1 や 1' の代りに以下

9) 自由処分と単調性があるので、 $u(\bar{k}, \bar{k}) = \max \{u(x, x) : (x, x) \in D\} = \max \{u(x, y) : (x, y) \in D, y \geq x\}$ である。

10) 次節での必要上、本稿では以下で、最大効用維持可能資本ストック $\bar{k}$ の存在とその支持価格による特徴付けのみを示す。定常経路 $k(\bar{k})$ の最適性に関する詳細については、ル・ヴァン/ダナ（2003, 06）または久保田（2008）参照。

の仮定 1'' を利用する。将来効用に割引のある準定常的なケースにおける対応する結果は補題 8 で示す。

仮定 1'' 効用関数は $0 < \rho < 1$ に対して $u_t = \rho^t u$ であり、 u は強凹かつ閉で、集合 D は凸集合である。すると、以下の結果が成立する。

補題 4 仮定 1', 2, 3, 4 の下で、ある $(\bar{k}, \bar{k}) \in D$ とある $p \geq 0$ が存在して、任意の $(x, y) \in D$ に対して $u(x, y) + py - px \leq \bar{u}$ となる。ここで、 $\bar{u} = u(\bar{k}, \bar{k}) = \max\{u(x, x) : (x, x) \in D\}$ である。更に、仮定 1'' の下ではこのような $(\bar{k}, \bar{k}) \in D$ は一意的である。

証明. 集合 $V = \{v \mid v = y - x, (x, y) \in D\}$ を定義する。 D の凸性より V は凸である¹¹⁾。自由処分と拡張可能ストックの存在によって $0 \in \text{int}(V)$ となる¹²⁾。最初に、所与の $v \in V$ に対して、 $y - x \geq v$ ならば (x, y) は有界である事を示す。まず、資本ストックとしての定義から x と y は下に有界である。今、 $\exists v \in V$ が存在して $D_v = \{(x, y) \in D \mid y - x \geq v\}$ が上に非有界で、 $\|x^s\| + \|y^s\| \rightarrow \infty (s \rightarrow \infty)$ となる点列 $(x^s, y^s)_{s=0}^\infty$ が D_v に存在したとする。まず、 $(x^s)_{s=0}^\infty$ が非有界とする。 $y^s - v \geq x^s \geq 0$ であり $\|x^s\| \leq \|y^s - v\| \leq \|y^s\| + \|v\|$ となつて、 $\xi < 1 = \|x^s\|/\|x^s\| \leq \|y^s\|/\|x^s\| + \|v\|/\|x^s\|$ となるが、 $\|v\|/\|x^s\| \rightarrow 0$ より、十分に大きい s に対して $\|y^s\|/\|x^s\| > \xi$ となる。しかし、 x^s が (上に) 非有界なので $\|x^s\| > \xi$ となる x^s を考えると、 $(x^s, y^s) \in D$ なので仮定 2 より $\|y^s\| < \xi \|x^s\|$ となり、故に、 $\|y^s\|/\|x^s\| < \xi$ となつて矛盾が起こる。したがって、 $(x^s)_{s=0}^\infty$ は有界である。また、 y^s が上に非有界であれば、 y^s が下に有界なので、 y^s の座標には ∞ に発散して行くものがあり、ある i に対して $y_i^s \rightarrow \infty$ となる。そこで、 x^s の対応する座標 x_i^s を $y_i^s - v_i$ に置き換えたものを x'^s とすれば、 $y^s \geq x'^s + v$ であり、仮定 3 の自由処分によって、 $(x'^s, y^s) \in D$ となる。しかし、 $x_i^s \rightarrow \infty$ より $\|x'^s\| \rightarrow \infty$ となるので、既に示した $(x'^s, y^s) \in D$ ならば $(x'^s)_{s=0}^\infty$ が有界という事に矛盾する。したがって、任意の $v \in V$ に対して D_v は有界で、ある (R^{2n}) の閉球 B に対して $D_v \subset B$ となる。そこで、 $T = \{(x, y) \in (R_+^{2n} \cap B) \mid v \leq y - x\}$ すると、 T は (R^{2n}) の有界閉集合で $D_v = T \cap D$ と表現される。

$f(v) = \sup\{u(x, y) : (x, y) \in D_v\}$ と定義する¹³⁾。この時 u は凹なので $f(v)$ も凹となる¹⁴⁾。更に、 u は仮定によって上半連続で閉で、有界閉集合 T に対して $D_v = T \cap D$ となるので、補題 1 よりある $(x, y) \in D_v$ が存在して $f(v) = u(x, y)$ となり、この上限は実現される。そして、これは任意の

11) $v, v' \in V, \alpha \in (0, 1)$ として、 $v = y - x, \exists (x, y) \in D, v' = y' - x', \exists (x', y') \in D$ とすると、 $\alpha v + (1 - \alpha)v' = \alpha(y - x) + (1 - \alpha)(y' - x') = (\alpha y + (1 - \alpha)y') - (\alpha x + (1 - \alpha)x')$ となるが、 D の凸性より $(\alpha x + (1 - \alpha)x', \alpha y + (1 - \alpha)y') \in D$ なので、 $v + (1 - \alpha)v' \in V$ となつて V は凸である。

12) 仮定 4 より $(\bar{x}, \bar{y}) \in D, \bar{x} < \bar{y}$ であり、自由処分より $(\bar{y}, \bar{x}) \in D$ となるが、 $\bar{z} = (\bar{x} + \bar{y})/2$ とすれば D の凸性から $(\bar{z}, \bar{z}) \in D$ となつて、 $0 = \bar{z} - \bar{z} \in V$ となり、再び自由処分より $\bar{x} < \bar{y}$ と $\bar{x} < \bar{y}' < \bar{y}$ に対して $(x', y') \in D$ となるので、 $x' - y' \in V$ となり、故に、 x' と y' を $\bar{z}$ の前後に選べば、 $0 \in \text{int}(V)$ となる。この時 $(\bar{z}, \bar{z}) \in \text{int}(D)$ となっている。

13) $v \leq v'$ ならば $D_{v'} \subset D_v$ なので、 $f(v) \geq f(v')$ となる。

14) $v, v' \in V, \alpha \in (0, 1)$ に対して $v^\alpha = \alpha v + (1 - \alpha)v'$ とする。任意の $(x, y) \in D_v, (x', y') \in D_{v'}$ に対しては、 $x^\alpha = \alpha x + (1 - \alpha)x', y^\alpha = \alpha y + (1 - \alpha)y'$ とすると、 D の凸性から $(x^\alpha, y^\alpha) \in D$ となり、更に、 $y^\alpha = \alpha y + (1 - \alpha)y' \geq \alpha(x + v) + (1 - \alpha)(x' + v') = x^\alpha + v^\alpha$ となるので $(x^\alpha, y^\alpha) \in D_{v^\alpha}$ となる。故に、 u の凹性を考慮に入れば、 $f(v^\alpha) = \sup\{u(x, y) : (x, y) \in D_{v^\alpha}\} \geq u(x^\alpha, y^\alpha) \geq \alpha u(x, y) + (1 - \alpha)u(x', y')$ となるが、最右辺における $(x, y) \in D_v, (x', y') \in D_{v'}$ は任意だったのでそれらの上限を取れば、 $f(v^\alpha) \geq \alpha \sup\{u(x, y) : (x, y) \in D_v\} + (1 - \alpha) \sup\{u(x', y') : (x', y') \in D_{v'}\} = \alpha f(v) + (1 - \alpha)f(v')$ となり、故に、 $f(\cdot)$ は凹である。

$v \in V$ に対して成立する。すると、特に、 $f(0) = \sup\{u(x,y):(x,y) \in D_0\} = \sup\{u(x,y):(x,y) \in D, y \geq x\} = \sup\{u(x,x):(x,x) \in D\} = u(\bar{k}, \bar{k}), \exists (\bar{k}, \bar{k}) \in D$ なので、最大維持可能効用が $(\bar{k}, \bar{k}) \in D$ において $u(\bar{k}, \bar{k})$ として実現する。そして、最大維持可能効用 $f(0)$ が異なる二つの $(\bar{k}, \bar{k}), (\bar{k}', \bar{k}') \in D$ で実現したとして、 $f(0) = u(\bar{k}, \bar{k}) = u(\bar{k}', \bar{k}')$ とすると、 D の凸性より $((\bar{k}, \bar{k}) + (\bar{k}', \bar{k}'))/2 \in D_0$ であるが、仮定 I'' の u の強凹性の下では、 $f(0) = (u(\bar{k}, \bar{k}) + u(\bar{k}', \bar{k}'))/2 < u((\bar{k}, \bar{k}) + (\bar{k}', \bar{k}'))/2 \leq \sup\{u(x,y):(x,y) \in D_0\} = f(0)$ となって矛盾が起こるので、最大維持可能効用 $f(0)$ を実現する最大維持可能資本ストック $(\bar{k}, \bar{k}) \in D$ は一意である。

$W = \{(v,u) | v \in V \text{ かつ } u \leq f(v)\}$ とする。最大維持可能効用を $\bar{u} = f(0)$ とする。 f の凹性と V の凸性より W は凸であり、また、 $(\bar{u}, 0)$ は W の境界点の一つである¹⁵⁾。すると、凸集合に関する分離定理によって、ある $(p, \pi) \in R^{n+1} \setminus \{0\}$ が存在して任意の $(v,u) \in W$ に対して $pv + \pi u \leq \pi \bar{u}$ となる。所与の u に対して仮定 3 より $(x,y) \in D$ ならば任意の i 座標と $\alpha(>0)$ に対して $(x + \alpha e_i, y) \in D$ となるので $(v - \alpha e_i) \in V$ となって、 V は下に非有界であり、また、 $u(x,y) \leq u(x + \alpha e_i, y) \leq f(v - \alpha e_i)$ より $f(v) \leq f(v - \alpha e_i)$ である。すると、 $(v,u) \in W$ に対して、十分に大きい $\alpha(>0)$ を考えると $v - \alpha e_i \in V$ であり、また、 $u \leq f(v) \leq f(v - \alpha e_i)$ なので $(v - \alpha e_i, u) \in W$ である。そこで、ある i に対して $p_i < 0$ であれば、十分に大きい $\alpha(>0)$ に対して $(v - \alpha e_i, u) \in W$ なので、 $p(v - \alpha e_i) + \pi u = pv - \alpha p_i + \pi u \leq \pi \bar{u}$ であるが、 $-\alpha p_i \uparrow \infty (\alpha \uparrow \infty)$ なので十分に大きい $\alpha(>0)$ に対して $pv - \alpha p_i + \pi u > \pi \bar{u}$ となって矛盾が起こる。故に、 $p \geq 0$ である。今、 $\pi \leq 0$ とする。 $(p, \pi) \neq 0$ であり、全ての $(v,u) \in W$ に対して $pv \leq \pi(\bar{u} - u)$ となっている事に注意する。まず $\pi = 0$ ならば、 $(p, \pi) \neq 0$ より $p \geq 0$ なので、仮定 4 より $\bar{y} - \bar{x} = \bar{v} > 0$ となる事を考慮すれば $0 < p\bar{v} \leq \pi(\bar{u} - u) = 0$ となって矛盾が起こり、 $\pi = 0$ は成立しない。次に、 $\pi < 0$ とする。 $0 \in \text{int}(V)$ より 0 を含む十分に小さい開区間 I に対して $I \in \text{int}(V)$ となるが、 f は V 上で凹なので $\text{int}(V)$ 上で連続であり、故に、 I 上でも連続である。 W の作り方から $(v,u) \in W$ とすると $u \geq u'$ ならば $(v,u') \in W$ となるので、 $u = \bar{u}$ においても $u' < \bar{u} = f(0)$ に対して $(0, u') \in W$ となる。そして、 $v'(>0)$ が 0 に十分に近ければ $v' \in I \subset \text{int}(V)$ であり、故に、 f の 0 での連続性より $u' < f(v')$ となって $(v', u') \in W$ となる。すると、 $p \geq 0$ が成立しているので $v' > 0$ を考慮すれば、 $0 \leq pv' \leq \pi(\bar{u} - u') < 0$ となって矛盾が起こり、 $\pi < 0$ も成立しない。したがって、 $p \geq 0$ で $\pi > 0$ となり、そこで (π, p) を $\pi = 1$ となるように基準化すれば、結局 $(v,u) \in W$ に対して $pv + u \leq \bar{u}$ となる。そして、 $(x,y) \in D$ に対して $y - x \in V, u(x,y) \leq f(y - x)$ なので $(y - x, u(x,y)) \in W$ となり、 $u(x,y) + py - px \leq \bar{u}, \forall (x,y) \in D$ が成立する。□

この証明における $(x,y) \in D$ に対して $u(x,y) + py - px \leq u(\bar{k}, \bar{k})$ となる部分の議論では、仮定 1' の u の凹性のみを使用していて仮定 1'' の u の強凹性は必要ないが、 u の強凹性は上で見つけた最大維持可能効用 $u(\bar{k}, \bar{k})$ を実現する $(\bar{k}, \bar{k})$ の一意性を示す際に必要となる。 $\pi = 1$ を考慮して p を効用表示の財価格ベクトルと想定し、期首の資本ストックを使う事で期間内の生産工程から得られるのが効用と期末資本ストックと想定すれば、 $u(x,y) + py - px$ は期間内の効用表示の利潤と想定でき、 $u(x,y) + py - px \leq \bar{u} + p\bar{k} - p\bar{k}, \forall (x,y) \in D$ という補題の結果は、 D 上での期間内の

15) これは、 $(\bar{u}, 0) (\in W)$ が W の境界点でなければ、 $f(0) \geq u' > \bar{u}$ となる $(u', 0) \in W$ が存在する事になり、 $\bar{u} = f(0)$ の定義に矛盾するからである。

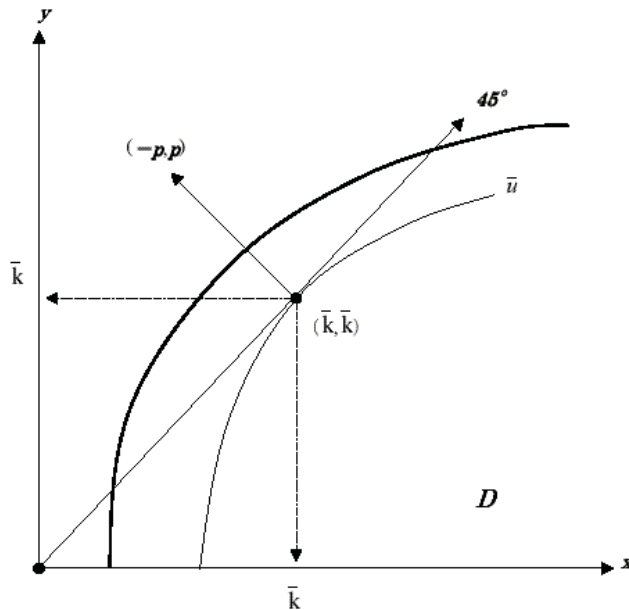


図2

効用表示の利潤最大化が $(\bar{k}, \bar{k}) \in D$ において実現する事を述べている。補題3の最大維持可能効用が $u(\bar{k}, \bar{k}) = \bar{u}$ において実現して、 p を補題3でその存在が示されたベクトルとする時に、全ての t に対して $k^t = \bar{k}$ となる定常経路 $\mathbf{k}(\bar{k}) = \{k^t\}_{t=0}^{\infty}$ を、全ての t に対して $p^t = p$ となる定常価格列 $\mathbf{p} = \{p^t\}_{t=0}^{\infty}$ によって支持されるという。

上記の将来効用の割引の無い定常的モデルにおける最大維持可能効用資本ストックの存在では、維持可能資本ストックの集合上で効用を最大にする最大効用維持可能資本ストックを見つければ良かったのであるが、将来効用の割引のある準定常的モデルでは、割引因子 $\rho (\in (0, 1))$ の存在によって、単に維持可能資本ストックの集合上で効用を最大にするというだけでは、求めている最適定常経路を実現する維持可能資本ストックを見つける事は出来ない。これはちょうど、1財モデルでの黄金律資本ストックと修正黄金律資本ストックの違いと同様である。ここではマッケンジー (1982, 86, 2002) の証明に従った不動点定理を用いる議論を利用して、準定常的モデルにおける求めている維持可能資本ストックの存在を示す。そして、準定常モデルにおいて上の補題に対応する結果を利用して、この維持可能資本ストックに沿った定常経路が準定常モデルにおいて最適となる事を示す。

以下ではこの不動点定理が使えるような写像を仮定1', 2, 3, 4の下で構成して行く。仮定2で与えられている ζ を用いて、 Ω を集合 $\{x | x \geq 0 \text{ and } \|x\| \leq \zeta\}$ と定義する。 Ω は $\mathbb{R}_+^n$ のコンパクト凸集合の一つである。任意の $x \in \Omega$ に対して、

$$\begin{aligned} f(x) &= \{(z, w) | \rho w - z \geq (\rho - 1)x, (z, w) \in D\} = \{(z, w) | w - \rho^{-1}z \geq (1 - \rho^{-1})x, (z, w) \in D\} \\ &= \{(z, w) | w \geq (1 - \rho^{-1})x + \rho^{-1}z, (z, w) \in D\} \end{aligned}$$

と定義する。1財モデルの図では、縦軸の切片が $(1 - \rho^{-1})x (\leq 0)$ で傾きが ρ^{-1} の直線よりも上部に位置する D 内の領域が $f(x)$ で、この直線は $(x, x) \in D$ を通過する。一般的な n 個のケースは、

この条件式を各座標毎に見ると $w_i \geq (1-\rho^{-1})x_i + \rho^{-1}z_i, i = 1, 2, \dots, n$ となるので、1財のケースの状況が n 個の各財について成立する。そして、 $(x, x) \in D$ であれば $x = (1-\rho^{-1})x + \rho^{-1}x$ より $(x, x) \in f(x)$ なので、 $f(x)$ は D の点で (x, x) を通り、傾きが ρ^{-1} の平面 $(1-\rho^{-1})x + \rho^{-1}z$ よりも上部に位置する D 内の領域である。以下の議論で明らかになるように、 $f(x)$ は消費者需要理論の予算集合に対応している。まず $f(x)$ については以下の性質がある。

補題5 $f(x)$ は非空、凸、有界、 D において閉である。

証明. 仮定4から $\bar{y} > \rho^{-1}\bar{x}$ である。 $0 < \rho < 1$ から $(1-\rho^{-1})x \leq 0 < \bar{y} - \rho^{-1}\bar{x}$ となるので、点 $(\bar{x}, \bar{y})$ は $f(x)$ に属し、 $f(x)$ は非空である。 D は凸であり、また、 $f(x)$ は線形不等式によって定義されるので、 $f(x)$ は凸で D において閉である。 $(z, w) \in f(x)$ とすると、 $0 < \rho < 1$ として、 f の定義から $\rho w - z \geq (\rho - 1)x$ となつて、 $0 \leq z \leq \rho w + (1 - \rho)x$ となり、ゆえに、 $\|z\| \leq \|\rho w + (1 - \rho)x\| \leq \|\rho w\| + \|(1 - \rho)x\| = \rho\|w\| + (1 - \rho)\|x\|$ となつて、 $\|z\| \leq \rho\|w\| + (1 - \rho)\|x\|$ となる。 $\|z\| \geq \xi$ が成立すると、仮定3から $\|w\| < \|z\|$ となるので、 $\|z\| < \rho\|z\| + (1 - \rho)\|x\|$ より $\|z\| < \|x\|$ となる。 Ω の定義から $\|x\| \leq \xi$ なので $\|z\| < \xi$ となり、矛盾が起きる。ゆえに、 $(z, w) \in f(x)$ ならば $\|z\| \leq \xi$ となつて $z \in \Omega$ となる。そこで、 $z \leq z'$ で $\|z'\| = \xi$ とすると、仮定3の自由処分より $(z', w) \in D$ となるが、 $\|z'\| = \xi$ と仮定2より $\|w\| < \xi\|z'\| < \|z'\| = \xi$ となつて、 $\|(z, w)\| \leq \xi$ となる。ゆえに、 $(z, w) \in f(x)$ は有界である。□

この証明で示したが、 $(z, w) \in f(x)$ ならば $\|z\| \leq \xi$ となり、 $z \in \Omega$ となる事に注意する。更に、 ξ は $f(x)$ から独立なので任意の $x \in \Omega$ に対して $f(x) \subset (\Omega^2 (= \Omega \times \Omega) \cap D)$ となり、 f の値域 $(\bigcup_{x \in \Omega} f(x)) \subset \Omega^2$ を有界閉としてよい。ただし、消費者需要理論の予算集合のケースとは違って、ここでは $f(x)$ の有界性と D における閉性は示せるが、 D は閉集合ではないので $f(x)$ の閉性、故に、 $f(x)$ のコンパクト性は示せず、更には、 $f(\cdot)$ の Ω 上での上半連続性も示せない。

さて、集合 $U \subset D$ に対して $g(U) = \{(z, w) \in U \mid \text{全ての } (z', w') \in U \text{ に対して } u(z, w) \geq u(z', w')\}$ とする。 $g(U)$ は U 上で最大効用を実現する（期首と期末）資本ストックの集合である。補題1の証明の後で述べたように、 U が有界で D において閉ならば $g(U) \neq \emptyset$ となつて、 $g(U)$ には最大解が存在する。また、 U が凸で u が準凹で $u(\alpha(z^1, w^1) + (1 - \alpha)(z^2, w^2)) \geq \min\{u(z^1, w^1), u(z^2, w^2)\}$, $\forall \alpha \in (0, 1)$ であれば、 $g(U)$ は凸になる¹⁶⁾。 u が凹ならば準凹なので、 U が凸で u が凹ならば $g(U)$ は凸になる。

補題6 $x \in \Omega$ に対して集合 $g(f(x))$ は非空、凸、コンパクトである。

証明. $x \in \Omega$ に対して補題5より $f(x)$ は非空、有界、 D における閉なので補題1からその上で u は最大解を持って $g(f(x)) \neq \emptyset$ となり、 $g(f(x))$ は非空である。また、 u は凹なので $g(f(x))$ は凸である。定義より $g(f(x)) \subset f(x)$ で、補題4より $f(x)$ が有界なので $g(f(x))$ も有界であり、故に、 $g(f(x))$ のコンパクト性には $g(f(x))$ の閉性を示せばよい。そこで、 $(z^s, w^s) \in g(f(x)), s$

16) $(z^1, w^1), (z^2, w^2) \in g(U)$ とすると $u(z^1, w^1) = u(z^2, w^2)$ であり、 u の準凹性から $\forall \alpha \in (0, 1)$ に対して $u(\alpha(z^1, w^1) + (1 - \alpha)(z^2, w^2)) \geq \min\{u(z^1, w^1), u(z^2, w^2)\} = u(z^1, w^1) = u(z^2, w^2) \geq u(z', w'), \forall (z', w') \in U$ となるからである。

補題7 対応 f は Ω 上で下半連続である。

証明. $(z, w) \in f(x)$ で $x, x^s \in \Omega, s = 1, 2, \dots$ として, ある $(z^s, w^s) \in f(x^s), s = 1, 2, \dots$ が存在して $(z^s, w^s) \rightarrow (z, w) (s \rightarrow \infty)$ となる事を示す¹⁷⁾。 $(\bar{x}, \bar{y}) \in f(x^s)$ を利用して, $(\alpha'(z, w) + (1 - \alpha')(\bar{x}, \bar{y})) \in f(x^s)$ となる最大の $\alpha' \in [0, 1]$ を α_s として $(z^s, w^s) = \alpha_s(z, w) + (1 - \alpha_s)(\bar{x}, \bar{y})$ とすると, これが求めている $(z^s, w^s)_{s=1}^\infty$ である事を示す。最初にこのような $\alpha_s \in [0, 1]$ が存在する事を示す。まず, $(z, w) \in f(x^s)$ であれば $\alpha_s = 1$ とすればいいので, $(z, w) \notin f(x^s)$ とする。 $\rho\bar{y} - \bar{x} > (0 \geq)(\rho - 1)x^s$ なので, 十分に 0 に近い $\alpha'(> 0)$ に対して, $[\rho(\alpha'w + (1 - \alpha')\bar{y}) - (\alpha'z + (1 - \alpha')\bar{x})] > (0 >)(\rho - 1)x^s$ と出来て $(\alpha'(z, w) + (1 - \alpha')(\bar{x}, \bar{y})) \in f(x^s)$ となる。そこでそのような $\alpha \in [0, 1]$ の上限 $\hat{\alpha}(\leq 1)$ を考え, それが求めている α_s である事を示す。そのためには, $(\hat{\alpha}(z, w) + (1 - \hat{\alpha})(\bar{x}, \bar{y})) \in f(x^s)$ を示せばいい。まず, $(z, w) \in f(x) \subset D$ より $(z, w) \in D$ なので, $(\bar{x}, \bar{y}) \in D$ と D の凸性より, 任意の $\alpha \in [0, 1]$ に対して $(\alpha(z, w) + (1 - \alpha)(\bar{x}, \bar{y})) \in D$ となる。上限の性質より, ある $(\alpha^m)_{m=1}^\infty \subset (0, 1)$ が存在して $(\alpha^m(z, w) + (1 - \alpha^m)(\bar{x}, \bar{y})) \in f(x^s)$ で $\alpha^m \uparrow \hat{\alpha} (n \rightarrow \infty)$ となる。すると, $(\alpha^m(z, w) + (1 - \alpha^m)(\bar{x}, \bar{y})) \in f(x^s)$ より $[\rho(\alpha^mw + (1 - \alpha^m)\bar{y}) - (\alpha^mz + (1 - \alpha^m)\bar{x})] \geq (\rho - 1)x^s$ となるので, $m \rightarrow \infty$ とすると $[\rho(\hat{\alpha}w + (1 - \hat{\alpha})\bar{y}) - (\hat{\alpha}z + (1 - \hat{\alpha})\bar{x})] \geq (\rho - 1)x^s$ となり, $\hat{\alpha} \in [0, 1]$ より $(\hat{\alpha}(z, w) + (1 - \hat{\alpha})(\bar{x}, \bar{y})) \in D$ なので, $(\hat{\alpha}(z, w) + (1 - \hat{\alpha})(\bar{x}, \bar{y})) \in f(x^s)$ である。故に, この $\hat{\alpha}$ は α_s の持つべき性質を全て満たしていて $\alpha_s = \hat{\alpha}$ とすればいい。この時には, $(z, w) \notin f(x^s)$ なので $\alpha_s (= \hat{\alpha}) < 1$ である。

次に, $\alpha_s \in [0, 1]$ より $(\alpha_s)_{s=1}^\infty$ には収束部分列が存在するので, 一般性を失うことなく, $s \rightarrow \infty$ とする時の α_s の極限を $\alpha \in [0, 1]$ とする。 $\alpha = 1$ であれば, $\alpha_s \rightarrow \alpha = 1 (s \rightarrow \infty)$ より $(z^s, w^s) = \alpha_s(z, w) + (1 - \alpha_s)(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow (z, w) (s \rightarrow \infty)$ となって求めている結果が得られるので, $\alpha < 1$ となつたとして, $(z', w') = \alpha(z, w) + (1 - \alpha)(\bar{x}, \bar{y})$ を考える。 $(z, w) \in f(x)$ より $(\rho w - z) \geq (\rho - 1)x$ であり, また, $(\bar{x}, \bar{y})$ は $\rho\bar{y} - \bar{x} > (0 >)(\rho - 1)x$ となっているので, $\alpha \in [0, 1]$ に対して $(\rho w' - z') = [\rho(\alpha w + (1 - \alpha)\bar{y}) - (\alpha z + (1 - \alpha)\bar{x})] > (\rho - 1)x$ となり, ある十分に小さい $\delta (= (\delta_1, \dots, \delta_n)) > 0$ に対して $\rho w' - z' > (\rho - 1)x + \delta$ となる。すると, $\alpha_s \rightarrow \alpha (s \rightarrow \infty)$ より $(z^s, w^s) \rightarrow (z', w') (s \rightarrow \infty)$ なので, 十分に大きい s' に対して $\rho w^{s'} - z^{s'} > (\rho - 1)x^{s'} + \delta$ が成立する。しかし $\alpha_s \rightarrow \alpha (< 1) (s \rightarrow \infty)$ より $\alpha_{s'} < 1$ となるので, $\alpha'_{s'} \in (\alpha_{s'}, 1)$ を $\alpha_{s'}$ より少しだけ大きく取れば, 依然として $(\rho w'_{s'} - z'_{s'}) = [\rho(\alpha'_{s'}w + (1 - \alpha'_{s'})\bar{y}) - (\alpha'_{s'}z + (1 - \alpha'_{s'})\bar{x})] > (\rho - 1)x$ とできて $(z'_{s'}, w'_{s'}) \in f(x^{s'})$ となる。しかしこれは, $\alpha_{s'} < \alpha'_{s'} < 1$ より $\alpha_{s'}$ の最大性に矛盾するので, $\alpha = 1$ となる。したがって, $\alpha_s \rightarrow \alpha = 1 (s \rightarrow \infty)$ より $(z^s, w^s) = (\alpha_s(z, w) + (1 - \alpha_s)(\bar{x}, \bar{y})) \in f(x^s) \rightarrow (z, w) (s \rightarrow \infty)$ となって, f は x において下半連続となる。□

この証明は消費者理論における予算集対応の下半連続性という証明と同様である。集合 $f(x)$ を消費者の予算集に, そして, u を消費者の効用関数(選好対応)に対応させて, 消費者の需要対応が上半連続的という証明と類似の証明を利用すると, F の上半連続性のために必要となる $g \circ f$ の上半連続性が成立する。ただし, 消費者理論とは異なって, f の上半連続性は成立しないが, その役割

17) 実際には収束部分列が存在する事を示すが, 下半連続性のためにはそれで十分である。

が u の閉性によって代りに担われる。

補題 8 対応 $g \circ f$ は上半連続である。

証明. $g \circ f$ はコンパクトな値域を持つので, $g \circ f$ の上半連続性はそのグラフの閉性を示せばよい。そこで, $(z^s, w^s) \in (g \circ f)(x^s)$ として $x^s \rightarrow x$ と $(z^s, w^s) \rightarrow (z, w)$ として, $(z, w) \in (g \circ f)(x)$ を示す。まず, (z, w) は必ず D に属する事を示す。もしも, そうでなければ $(z, w) \in cl(D) \setminus D (= bd(D) \setminus D)$ となるが, u の閉性から $u(z^s, w^s) \rightarrow -\infty$ となって十分に大きな s に対して $u(\bar{x}, \bar{y}) > u(z^s, w^s)$ が成立し, $(z^s, w^s) \in (g \circ f)(x^s)$ と $(\bar{x}, \bar{y}) \in f(x^s)$ に矛盾が起こる。 D が閉でないので $f(x)$ の上半連続性は一般には成立しないが, $(z^s, w^s) \in (g \circ f)(x^s) \rightarrow (z, w)$ とすると u の閉性より $(z, w) \in D$ となり, 更に $(z^s, w^s) \in f(x^s)$ より $(\rho w^s - z^s) \geq (\rho - 1)x^s$ なので $(\rho w - z) \geq (\rho - 1)x$ となって, $(z, w) \in f(x)$ となる。これが $f(x)$ の上半連続性が果たすべき役割であるが, ここではこの上半連続性は実際には成立しないので, その代りに u の閉性の基づいてこの結果を導いている。

$(z, w) \in (g \circ f)(x)$ を示さなくてはならないが, そうでなくて $(z, w) \in (g \circ f)(x)$ となったとする。すると $(z, w) \in f(x)$ なので, ある $(z', w') \in f(x)$ が存在して $u(z', w') > u(z, w)$ となる。すると, 補題 7 から f は下半連続なので, ある $(z'^s, w'^s) \in f(x^s)$, $s = 1, 2, \dots$ が存在して $(z'^s, w'^s) \rightarrow (z', w')$ ($s \rightarrow \infty$) となる。この時, $(z', w') \in int(D)$ であれば, u の凹性より u は $int(D)$ 上で連続なので, $u(z'^s, w'^s) \rightarrow u(z', w')$ ($s \rightarrow \infty$) となり, また, $(z', w') \in bd(D)$ であれば, u の閉性より $u(z', w') = \limsup_{s \rightarrow \infty} u(z'^s, w'^s)$ となるので, いずれにしても $u(z', w') = \limsup_{s \rightarrow \infty} u(z'^s, w'^s)$ となる。そして, 全ての s において $(z^s, w^s) \in (g \circ f)(x^s)$ より $u(z^s, w^s) \geq u(z', w')$ であり, また, $(z', w') \in f(x)$ の代りに $(z, w) \in f(x)$ に対しても同様にして, $u(z, w) = \limsup_{s \rightarrow \infty} u(z^s, w^s)$ となる。すると, $u(z, w) = \limsup_{s \rightarrow \infty} u(z^s, w^s) \geq \limsup_{s \rightarrow \infty} u(z'^s, w'^s) = u(z', w')$ となって, $u(z', w') > u(z, w)$ という前提に矛盾して, 故に, そのような (z', w') は存在せず, $u(z, w)$ は $f(x)$ における u の最大点であって $(z, w) \in (g \circ f)(x)$ である。これより $g \circ f$ のグラフは閉となるので, $g \circ f$ は上半連続である。□

以上により, 将来効用に割引のある準定常型モデルにおいて最適定常経路を実現する, 維持可能資本ストックの存在を確立出来る。

補題 9 ある $\tilde{x} \in \Omega$ が存在して $\tilde{x} \in F(\tilde{x})$ となる。

証明. 写像 h は連続で, $g \circ f$ は補題 8 より上半連続なので, その合成対応 F は上半連続である。 Ω はコンパクトで凸で, F は Ω をその凸部分集合へ写像するので, 角谷の不動点定理から F には不動点 $\tilde{x} (\in \Omega)$ が存在して, $\tilde{x} \in F(\tilde{x})$ となる。□

$x \in F(x)$ とすると, ある $(x, y) \in D$ が存在して $(x, y) \in g(f(x))$ となり, $\rho w' - z' \geq (\rho - 1)x$ を満たす任意の $(z', w') \in D$ に対して $u(x, y) \geq u(z', w')$ となるが, $(x, y) \in f(x)$ より $\rho y - x \geq (\rho - 1)x$ を満たすので, $\rho \in (0, 1)$ より $y \geq x$ となる。すると, 仮定 3 の単調性から $u(x, x) \geq u(x, y)$ なので, 結局 $\rho w' - z' \geq (\rho - 1)x$ を満たす任意の $(z', w') \in D$ に対して $u(x, x) \geq u(z', w')$ となって, $f(x)$ 上での u の最大点は維持可能資本ストック (x, x) で実現する。

ここで, $\tilde{x} \in F(\tilde{x})$ となる資本ストック $(\tilde{x}, \tilde{x})$ と最大維持可能効用を実現する資本ストック

界性が従う¹⁸⁾。したがって、ある (R^{2n}) の閉球 B_v に対して $D_v(\rho) \subset B_v$ となる。そこで、 $T_v = \{(z, w) \in (R_+^{2n} \cap B_v) \mid v \leq \rho w - z\}$ すると、 T_v は (R^{2n}) の有界閉集合で $D_v(\rho) = T_v \cap D$ と表現される。

$v \in V(\rho)$ に対して $\varphi(v) = \sup\{u(z, w) : (z, w) \in D_v(\rho)\}$ と定義する。この時、 u の凹性から $\varphi(v)$ も凹になり、 $\text{int}(V(\rho))$ 上で連続になる。また、仮定 3 より $v \leq v'$ ならば $D_{v'}(\rho) \subset D_v(\rho)$ となるので $\varphi(v) \geq \varphi(v')$ となり、 φ は v に関して単調減少的である。更に、 $(\varphi(v) = u(z, w))$ (ある $(z, w) \in D_v(\rho)$ に対して) とすると、仮定 3 の自由処分/単調性から $\rho w - z = v$ としていい¹⁹⁾。 $D_v(\rho)$ は有界閉集合 T_v に対して $D_v(\rho) = T_v \cap D$ と表現され、 u は上半連続かつ閉なので、補題 1 よりこの上限が $D_v(\rho)$ の点で実現されて有限値である。 $U(\rho) = \{(u, v) \mid v \in V(\rho) \text{ に対して } u \leq \varphi(v)\}$ とする。 u の凹性から φ も凹なので $U(\rho)$ は凸集合で、更に、 $\text{int}(U(\rho)) \neq \emptyset$ である²⁰⁾。 $\tilde{x} \in F(\tilde{x})$ を考えて、 $\tilde{v} = (\rho - 1)\tilde{x}$ と $\tilde{u} = \varphi(\tilde{v})$ とすると、 $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \text{bd}(U)$ となり、また、補題 9 の証明の後で述べたように、 $\tilde{x} \in F(\tilde{x})$ より $\tilde{u} = \varphi(\tilde{v}) = u(\tilde{x}, \tilde{x})$ となる²¹⁾。

ここで、凸集合に対する分離定理を適用すると、ある $(\pi, r) \in R^{n+1} \setminus \{0\}$ が存在して、全ての $(u, v) \in U(\rho)$ に対して $\pi u + r v \leq \pi \tilde{u} + r \tilde{v}$ となる。 $u \leq \varphi(v)$ となる所与の u に対して、 $v \in V(\rho)$ は下に非有界で $\varphi(v)$ は単調減少的なので、 v を減少させると $\varphi(v)$ は増加して依然として $u \leq \varphi(v)$ となる。そこで、 $r_i < 0$ であれば、 $(u, v) = (\tilde{u}, \tilde{v}) \in U(\rho)$ として v_i を減少させれば $\varphi(v)$ は増加して依然として $\tilde{u} \leq \varphi(v)$ である。しかし、 $r_i < 0$ なので v_i を減少させると $r v$ は増加して行くので、いずれ $\pi \tilde{u} + r v > \pi \tilde{u} + r \tilde{v}$ となって、分離の条件に矛盾する。故に、 $r \geq 0$ である。分離の条件より、全ての $(u, v) \in U(\rho)$ 、つまり、全ての $v \in V(\rho), u \leq \varphi(v)$ に対して $r(v - \tilde{v})$

18) 実際には以下のようにして示される。今、 $\exists v \in V(\rho)$ が存在して $D_v(\rho)$ が上に非有界で、 $\|z^s\| + \|w^s\| \rightarrow \infty (s \rightarrow \infty)$ となる点列 $(z^s, w^s)_{s=0}^\infty$ が $D_v(\rho)$ に存在したとする。 $\rho w^s \geq z^s + v (\geq v)$ で v が固定的なので右辺は下に有界であり、そこで z^s が上に非有界とすると、 w^s と $z^s + v$ の最大の座標の大きさは正の値で実現するので、 $\rho w^s \geq z^s + v$ の不等号より、十分に大きい s に対しては $\max_{i=1, \dots, n} \rho w_i^s = \rho \max_{i=1, \dots, n} |w_i^s| \geq \max_{i=1, \dots, n} (z^s + v)_i = \max_{i=1, \dots, n} |(z^s + v)_i|$ となり、故にユークリッドノルムとの同値関係より、 $\rho \|w^s\| \geq \|(z^s + v)\| \geq (\|z^s\| - \|v\|)$ となる。すると、 $\rho \|w^s\| / \|z^s\| \geq \|(z^s + v)\| / \|z^s\| \geq (\|z^s\| - \|v\|) / \|z^s\| \rightarrow 1 (s \rightarrow \infty)$ より、十分に大きい s に対しては $\rho \|w^s\| / \|z^s\| > \xi (< 1)$ となる。しかし、 z^s が上に非有界としているので $\|z^{s'}\| > \xi$ となる $z^{s'}$ を考えると、 $(z^{s'}, w^{s'}) \in D$ なので仮定 2 より $\rho \|w^{s'}\| \leq \|w^{s'}\| < \xi \|z^{s'}\|$ となって、 $\rho \|w^{s'}\| / \|z^{s'}\| < \xi$ となり、矛盾が起こる。したがって、 $(z^s)_{s=0}^\infty$ は有界である。そして、 w^s が上に非有界であれば、 w^s は下に有界なので、 w^s の座標には ∞ に発散して行くものがあり、そこで部分列を最初から選んでいるとすれば、ある i に対して $w_i^s \rightarrow \infty$ となる。そこで、 z^s の対応する座標 z_i^s を $\rho w_i^s - v_i^s$ に置き換えたものを z'^s とすれば、 z^s は有界なので十分に大きい s に対して $z'^s \geq z^s$ かつ $\rho w^s \geq z'^s + v$ であり、また、仮定 3 の自由処分によって $(z'^s, w^s) \in D$ となる。しかし、 $z_i^s \rightarrow \infty$ より $\|z'^s\| \rightarrow \infty$ となるので、既に示した $(z'^s, y^s) \in D$ と $\|z'^s\| + \|w^s\| \rightarrow \infty (s \rightarrow \infty)$ ならば $(z'^s)_{s=0}^\infty$ は有界という事に矛盾する。したがって、任意の $v \in V(\rho)$ に対して $D_v(\rho)$ は有界である。

19) 実際ある i で $\rho w_i - z_i > v_i$ となっていれば、 z_i を等号が成立すまで増加させても $u(z, w)$ は減少しないので最初から $\rho w - z = v$ で $\varphi(v) = u(z, w)$ が実現するとしておいていい。

20) $\varphi(\cdot)$ が凹なので $\text{int}(V(\rho))$ 上で連続になるが、 $(\rho - 1)\tilde{x} \in \text{int}(V(\rho))$ なので、 $\varphi(\cdot)$ は $(\rho - 1)\tilde{x}$ で連続である。そこで、 $u < \varphi((\rho - 1)\tilde{x})$ となる $(u, (\rho - 1)\tilde{x}) \in U(\rho)$ を考えると、 $(\rho - 1)\tilde{x}$ での $\varphi(\cdot)$ の連続性から、ある u の近傍 U^1 と $(\rho - 1)\tilde{x}$ の近傍 U^2 が存在して、 $(u^1, v^2) \in U^1 \times U^2$ ならば $u' < \varphi(v')$ となるので、 $U^1 \times U^2 \subset U(\rho)$ となり、 $\text{int}(U(\rho)) \neq \emptyset$ となる。

21) これは、 $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in U(\rho)$ が $U(\rho)$ の境界点でなければ、 $(\varphi(\tilde{v}) \geq) u' > \tilde{u} = \varphi(\tilde{v})$ となる $(u', \tilde{v}) \in U(\rho)$ が存在する事になって矛盾が起きてしまうからである。また、 $\tilde{x} \in F(\tilde{x})$ より $(\tilde{x}, \tilde{x}) \in g(f(\tilde{x}))$ としてよいので、 $\varphi(\tilde{v}) = u(\tilde{x}, \tilde{x})$ となる。

$\leq \pi(\tilde{u}-u)$ であり, また, $(\pi, r) \neq 0$ である. $r \geq 0$ かつ $\pi \leq 0$ とする. $\pi = 0$ ならば $r \geq 0, r \neq 0$ となり, また, $\tilde{v} \in \text{int}(V(\rho))$ より $v > \tilde{v}, v \in V(\rho)$ に対して $0 < r(v-\tilde{v}) \leq \pi(\tilde{u}-u) = 0$ となって矛盾が起こる. また, $r \geq 0$ で $\pi < 0$ とすると, $\tilde{v} \in \text{int}(V(\rho))$ より $\tilde{v}$ に十分に近い $v'(>\tilde{v})$ に対して $v' \in V(\rho)$ であり, また, $\varphi(v)$ の単調減少性より $\varphi(v') \leq \varphi(\tilde{v}) = \tilde{u}$ となるので, $u' < \varphi(v')$ となるように u' を選べば $(u', v') \in U(\rho)$ でしかも $(\tilde{u}-u') > 0$ となるが, すると, $0 \leq r(v-\tilde{v}) \leq \pi(\tilde{u}-u) < 0$ となって矛盾が起こる. したがって, $r \geq 0$ で $\pi > 0$ となる.

そこで, (π, r) を $\pi = 1$ となるように選べば, 全ての $(u, v) \in U(\rho)$ に対して $u+rv \leq \tilde{u}+r\tilde{v}$ となる. そして, 任意の $(z, w) \in D$ に対して $v = \rho w - z$ とすれば $v \in V(\rho)$ であり, また $(z, w) \in D_v(\rho)$ となるので, φ の定義より $u(z, w) \leq \varphi(v)$ となって $(u(z, w), v) \in U(\rho)$ となり, $u(z, w) + r(\rho w - z) \leq \tilde{u} + r(\rho - 1)\tilde{x}$ となる. すると, $\tilde{u} = \varphi(\tilde{v}) = u(\tilde{x}, \tilde{x})$ なので, 結局, 任意の $(z, w) \in D$ に対して $u(z, w) + r(\rho w - z) \leq u(\tilde{x}, \tilde{x}) + r(\rho - 1)\tilde{x}$ となり, そこで, $\rho^{-1}q = r$ とすれば,

$$u(z, w) + \rho w - \rho^{-1}qz \leq u(\tilde{x}, \tilde{x}) + (1 - \rho^{-1})q\tilde{x}$$

となって, 求めていた結果が得られる. $\square$

この補題の, $f(\tilde{x})$ 上での最大維持可能効用が $u(\tilde{x}, \tilde{x}) = \tilde{u}$ において実現して, q をこの補題でその存在が示されたベクトルとする時に, 全ての t に対して $k^t = \tilde{x}$ となる定常経路 $k(\rho) = \{k^t\}_{t=0}^\infty$ を, 全ての t に対して $p^t = \rho^{-1}q$ となる準定常価格列 $p = \{p^t\}_{t=0}^\infty$ によって支持されるという.

なお, 仮定 I'' の u の強凹性の下では, $\varphi(\tilde{v})$ が異なる二つの $(\tilde{x}, \tilde{x}), (\tilde{x}', \tilde{x}') \in D$ で実現したとすると, $\varphi(\tilde{v}) = u(\tilde{x}, \tilde{x}) = u(\tilde{x}', \tilde{x}')$ となるが, $D_v(\rho)$ の凸性より $((\tilde{x}, \tilde{x}) + (\tilde{x}', \tilde{x}'))/2 \in D_v(\rho)$ であり, 更に, u の強凹性より, $\varphi(\tilde{v}) = (u(\tilde{x}, \tilde{x}) + u(\tilde{x}', \tilde{x}'))/2 < u((\tilde{x}, \tilde{x}) + (\tilde{x}', \tilde{x}'))/2$

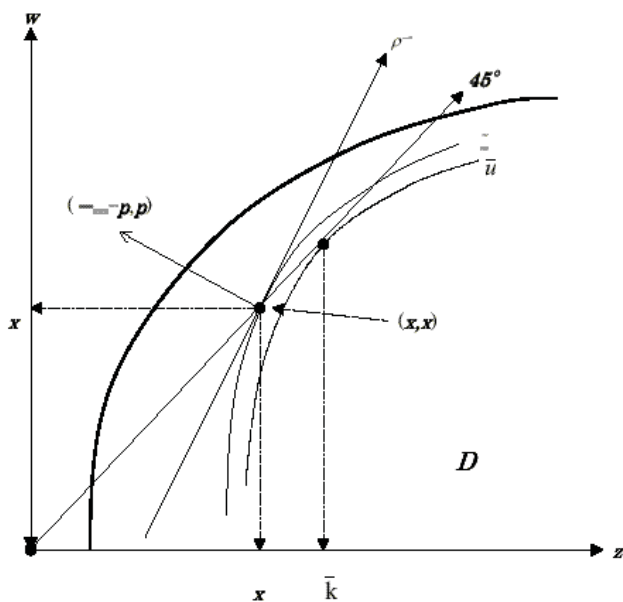


図 5

$= \sup \{u(x, y) : (x, y) \in D_v(\rho)\} = \varphi(\tilde{v})$ となって矛盾が起こるので、 $\varphi(\tilde{v})$ を実現する定常維持可能資本ストック $(\tilde{x}, \tilde{x}) \in D$ は一意的で、 $F(\tilde{x}) = \{\tilde{x}\}$ となる。

補題 10 を利用すると、 $k^t = \tilde{x}, t = 0, 1, 2, \dots$ となる定常経路 $\mathbf{k}(\rho) = \{k^t\}_{t=0}^\infty$ が $\tilde{x}$ から最適である事が示せて、最適定常経路の存在が確立できる。

定理 3 仮定 1', 2, 3, 4 の下では、 $\rho \in (0, 1)$ で $\tilde{x} \in F(\tilde{x})$ ならば、全ての t に対して $k^t = \tilde{x}$ となっている定常経路 $\mathbf{k}(\rho) = \{k^t\}_{t=0}^\infty$ は最適である。

証明. $\mathbf{k}(\tilde{x}) = \{k^t\}_{t=0}^\infty (\in K(\tilde{x}))$ を $k^0 = \tilde{x}$ を満たす任意の実現可能な経路とする。補題 10 で得られた条件に $(z, w) = (k^{t-1}, k^t)$ を代入して ρ^{t-1} を掛けると、

$$\rho^{t-1}(u(k^{t-1}, k^t) - u(\tilde{x}, \tilde{x})) \leq \rho^{t-1}q(\tilde{x} - k^t) + \rho^{t-2}q(k^{t-1} - \tilde{x})$$

となる。更に、この式を $t = 1$ から T まで総和すれば、

$$\sum_{t=1}^T \rho^{t-1}(u(k^{t-1}, k^t) - u(\tilde{x}, \tilde{x})) \leq \rho^{T-1}q(\tilde{x} - k^T) + \rho^{-1}q(k^0 - \tilde{x})$$

となる。しかしながら、 $\mathbf{k}(\tilde{x}) = \{k^t\}_{t=0}^\infty$ は $\tilde{x}$ から実行可能な経路なので補題 2 から k^T は一様に有界であり、また、 $\tilde{x} = k^0$ なので右辺の第 2 項は 0 なので、 $T \rightarrow \infty$ につれて上式の右辺は 0 に収束する。一方左辺は $\sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1}(u(k^{t-1}, k^t) - u(\tilde{x}, \tilde{x}))$ が有限値かまたは $-\infty$ の値で存在するので、 $\sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1}(u(k^{t-1}, k^t) - u(\tilde{x}, \tilde{x})) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T \rho^{t-1}(u(k^{t-1}, k^t) - u(\tilde{x}, \tilde{x})) \leq 0$ となる。したがって、全ての t に対して $k^t = \tilde{x}$ となっている定常経路 $\mathbf{k}(\rho) = \{k^t\}_{t=0}^\infty$ は $\tilde{x}$ からの最適経路である。□

この議論は将来効用の割引がない定常的なケースと同様に、補題 9 に対応する結果で示された維持可能資本ストック $(\tilde{x}, \tilde{x})$ からの損失価値を利用してこの結果を示している。 $\rho \in (0, 1)$ に対して $\tilde{x} \in F(\tilde{x})$ となっている $\tilde{x}$ を k^0 として $k^0 = k^\rho$ とすると、 $k^t = k^\rho, t = 1, 2, \dots$ となる定常経路 $\mathbf{k}(\rho) = \{k^t\}_{t=0}^\infty$ は実現可能なので $K(k^\rho) \neq \emptyset$ であり、定理 1 によって k^ρ からの最適経路が存在するが、この定理 2 は $k^t = k^\rho, t = 1, 2, \dots$ となる定常経路 $\mathbf{k}(\rho) = \{k^t\}_{t=0}^\infty$ が実はその最適経路の一つである事を述べている。定理 1 では k^ρ からの最適経路が定常的であるかどうかは問題にしていなが、定理 2 では k^ρ からの最適経路の一つとして定常的な経路があることを述べていて、両者には違いがある。そして、 u の強凹性の下では k^0 からの最適経路は一意になるので、仮定 1' の下では定常経路 $\mathbf{k}(\rho) = \{k^t\}_{t=0}^\infty$ が k^ρ からの唯一の最適経路となる。なお、 $\rho \in (0, 1)$ に対して、 $k^0 = k^\rho$ として $k^t = k^\rho, t = 1, 2, \dots$ となる定常経路 $\mathbf{k}(\rho) = \{k^t\}_{t=0}^\infty$ が定理 2 より k^ρ からの最適経路の一つなので、特にこのような定常経路 $\mathbf{k}(\rho)$ を ρ -割引最適定常経路、 $k^\rho = \tilde{x}$ を ρ -割引最大効用維持可能資本ストックという。ボイド (1996) やベッカー/ボイド (1997, 5.3) では、本稿のような $\sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1}u(k^{t-1}, k^t)$ を一般化した再帰的選好においても、本節と同じ不動点定理を利用する議論を用いて、補題 9 のような定常最適経路の存在を示している。

以上で、将来効用の割引がある準定常モデルにおける、 ρ -割引最適定常経路の存在とその支持価格による特徴付けに関する議論を、終了する。この割引最適定常経路は、次節の将来効用の割引がある既約型準定常モデルにおける近傍ターンパイク定理において重要な役割を果たす。ただし、そ

ここで見るように、将来効用を割引く準定常的なケースの最適経路が割引最大効用維持可能資本ストックの近傍に収束して行くという近傍ターンパイク定理の証明は、将来効用を割引かないケースの漸近ターンパイク定理の証明に比べると、著しく難しい。

5 準定常的一般ラムゼーモデルにおける近傍ターンパイク定理

将来効用に割引の無い定常型モデルにおいては、最適経路の存在を示す上で、最適経路が最大維持効用を実現する資本ストックに収束していくというターンパイク定理が必要だったので、その結果を前もって示す必要があったが、将来効用に割引がある準定常型モデルにおいては、最適経路の定常資本ストックへの収束に関するターンパイク定理を用いることなく最適経路が存在を示せた。この将来効用に割引がある準定常型モデルにおける最適経路の定常資本ストックへの収束は近傍ターンパイク定理や漸近ターンパイク定理として知られている²²⁾。ただし、将来効用の割引が無いケースの最適経路の収束に関するターンパイク定理は簡明に証明できるのであるが、それに比べると、将来効用に割引があるケースの最適経路の収束に関するターンパイク定理は、効用関数 u の強凹性の下でも甚だ困難である。割引因子 $\rho \in (0, 1)$ に依存して ρ -割引最適定常経路を実現する維持可能資本ストック $(\bar{k}^\rho, \bar{k}^\rho)$ が存在するが、 $\varepsilon > 0$ に依存してある割引因子 $\rho_\varepsilon \in (0, 1)$ が存在して、 $\rho \in (\rho_\varepsilon, 1)$ の時の最適経路 $\{\widehat{k}_\rho^t\}_{t=0}^\infty$ が十分先の時点で $(\bar{k}^\rho, \bar{k}^\rho)$ の ε -近傍に入るとというのが近傍ターンパイク定理であり、本稿でもマッケンジー (2002, 第7章第6節) に沿って効用関数 u の強凹性の下でその証明を以下で行う²³⁾。

維持可能資本ストックの集合を $\Sigma = \{x | (x, x) \in D\}$ とする。仮定4を修正した以下の仮定4'における効用の割引因子 $\bar{\rho}$ と $\bar{y} > \bar{\rho}^{-1}\bar{x}$ となる $(\bar{x}, \bar{y}) \in D$ を利用して、 $\bar{\Delta} = \{x | x \in \Sigma \text{ で } u(x, x) \geq u(\bar{x}, \bar{y})\} (\neq \emptyset)$ と定義する。そして、 $\bar{\Delta}$ 上での u の一様強凹性 (uniform strict concavity) を、任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して、 $\|(x, x) - (w, z)\| > \epsilon$ となる任意の $(w, z) \in D$ と任意の $x \in \bar{\Delta}$ となる (x, x) に対して、 $u(1/2(x, x) + 1/2(w, z)) - 1/2(u(x, x) + u(w, z)) > \delta$ となる事と定義する。近傍ターンパイク定理を示すために仮定2と3は維持して仮定1と4を次のように変更する。

仮定1''' 効用関数 u_t は D を $\mathbb{R}$ に写像する u と $0 < \bar{\rho} \leq \rho \leq 1$ に対して $u_t = \rho^t u$ とする。 u は凹かつ閉で、 $\bar{\Delta}$ 上で一様強凹的とする。集合 D は凸である。

22) ル・ヴァン/ダナ (2003, 第8章) では、これらの近傍ターンパイク定理と漸近ターンパイク定理が1財モデルの枠組みで簡明に行われており、また、西村/矢野 (2007, 第6章) でも1部門モデルの枠組みで詳説されていて、各々参考になる。

23) $\varepsilon > 0$ をより小さい $\varepsilon' (> 0) < \varepsilon$ にすれば対応する $\rho_{\varepsilon'} \in (0, 1)$ も $\rho_{\varepsilon'} > \rho_\varepsilon$ とする必要があるが、 $\varepsilon > 0$ から独立にある $\bar{\rho} \in (0, 1)$ が決まって $\rho \in (\bar{\rho}, 1)$ の時の最適経路 $\{\widehat{k}_\rho^t\}_{t=0}^\infty$ が十分先の時点で $(\bar{k}^\rho, \bar{k}^\rho)$ の ε -近傍に入ってくるという漸近ターンパイク定理を示すには、効用関数 u が更に連続2階微分可能でそのヘッセ行列が負値定符号という条件が必要となる。この結果はマッケンジー (1982, 定理5, 1986, 定理8.4.7) で示されているが、マッケンジー (2002, 第7章) ではその結果に触れているだけで、その証明は行われていない。

仮定 4' $\bar{y} > \bar{\rho}^{-1}\bar{x}$ となる $(\bar{x}, \bar{y}) \in D$ が存在する。

これらの仮定の下では、 $\bar{\Delta}$ は以下の性質を満たす。

補題 11 $\bar{\Delta}$ は非空凸でコンパクトである。

証明. $\bar{\Delta}$ は仮定 3 の自由処分によって $\bar{x}$ を含むので非空である。 $\|x\| > \zeta$ ならば仮定 2 によって $(x, x) \notin D$ であり、故に、 $x \notin \Sigma$ となるので $\bar{\Delta}$ は有界である。 $\bar{\Delta}$ が閉である事を見るために、 $x^s \in \bar{\Delta}$ として $x^s \rightarrow x, s = 1, 2, \dots$ とする。 $x^s \rightarrow x, (x^s, x^s) \in D, s = 1, 2, \dots$ より $(x, x) \in cl(D)$ であるが、 $(x, x) \notin D$ ならば $(x, x) \in bd(D) \setminus D$ であり、 u の閉性より $u(x^s, x^s) \rightarrow -\infty$ となるので、十分に大きい s に対して $u(x^s, x^s) < u(\bar{x}, \bar{y})$ となって矛盾がおこる。故に $(x, x) \in D$ である。そして、 $(x, x) \in bd(D) \cap D$ であれば、 u の閉性より $u(x, x) = \limsup_{s \rightarrow \infty} (x^s, x^s) \geq u(\bar{x}, \bar{y})$ となる。また、 $(x, x) \in int(D)$ であれば、 u の凹性より u は $int(D)$ 上で連続なので、 $u(x, x) = \lim_{s \rightarrow \infty} (x^s, x^s) \geq u(\bar{x}, \bar{y})$ となる。したがって、いずれにしても $(x, x) \in D$ で $u(x, x) \geq u(\bar{x}, \bar{y})$ が成立して $(x, x) \in \bar{\Delta}$ となるので $\bar{\Delta}$ は閉であり、故にコンパクトである。□

$w \geq z$ となる $(z, w) \in D$ に対して $(\bar{k}, \bar{k})$ が $u(\bar{k}, \bar{k}) = \bar{u} \geq u(z, w)$ を満たしているとする。この時、 $w \geq z$ となる $(z, w) \in D$ に対しては、仮定 2 の自由処分によって $(z, z) \in D$ に対して $u(z, z) \geq u(z, w)$ なので、 $(\bar{k}, \bar{k})$ は $u(\bar{k}, \bar{k}) \geq u(z, z), (z, z) \in D$ となっていればよく、 $\bar{x} \in \bar{\Delta}$ なので、 $(\bar{k}, \bar{k})$ は $u(\bar{k}, \bar{k}) \geq u(z, z), z \in \bar{\Delta}$ 、つまり、 $u(\bar{k}, \bar{k}) = \max\{u(z, z) : z \in \bar{\Delta}\}$ となっていればよい。すると、 $u(z, z)$ の閉凹性より $u(z, z)$ は z について上半連続で、補題 15 より $\bar{\Delta}$ はコンパクトなので、一般ワイエルシュトラス最大定理よりこのような $\bar{k} \in \bar{\Delta}$ は存在する。更に、 $\bar{\Delta}$ 上の u の（一様）強凹性と $\bar{\Delta}$ の凸性より $\bar{k}$ は一意的である。 $\bar{k}$ は最大効用維持可能定常資本ストックである。1 財モデルで D が 2 次元平面の第 1 象限に属するケースでは、まず Σ が D と 45 度線との共通部分 $\tilde{\Sigma}$ を第 1 座標へ射影したものであり、今 $\tilde{\Delta} = \{(x, x) : x \in \bar{\Delta}\}$ と定義すると、 $\bar{\Delta}$ は $(\bar{x}, \bar{y})$ を通る無差別曲線から下の領域と 45 度線との共通部分 $\tilde{\Delta}$ を第 1 座標へ射影したものである。補題 11 より $\tilde{\Delta}$ は凸でコンパクトである。1 財モデルで D が 2 次元平面の第 1 象限に属するケースでは、 $\tilde{\Delta}$ は $(\bar{x}, \bar{y})$ を通る無差別曲線から下の領域と 45 度線との共通部分である。これについて次を仮定する。

仮定 5 $\tilde{\Delta} \subset int(D)$ 。

$\tilde{\Sigma}$ は D の境界を含むかもしれないが、 $\tilde{\Delta}$ はこの仮定より D の境界を含まない。1 財モデルで D が 2 次元平面の第 1 象限に属するケースでは、この条件は D と 45 度線との共通部分である $\tilde{\Sigma}$ と $(\bar{x}, \bar{y})$ を通る無差別曲線の下領域との交点が全て D の内部にあるという事を述べている。

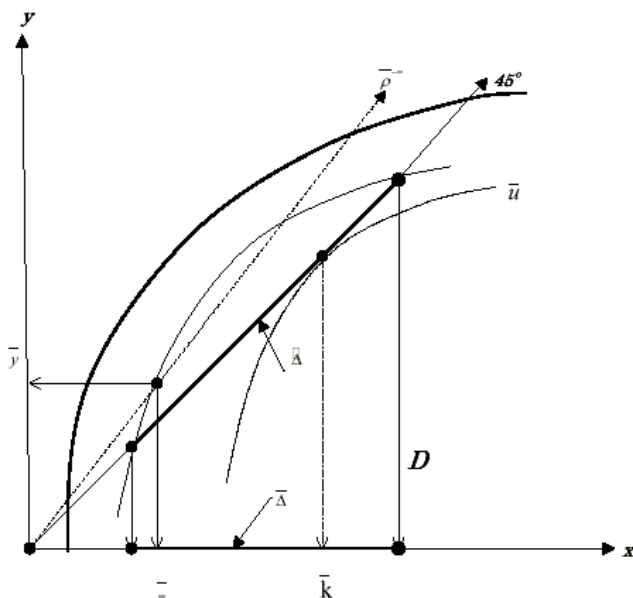


図6

この時, $(\bar{k}, \bar{k}) \in \tilde{\Delta}$ なので仮定5よりある $\eta > 0$ が存在して $B_\eta((\bar{k}, \bar{k})) \subset D$ となり, 故に, 十分に小さい $\varepsilon > 0$ に対して $(\bar{k}, \bar{k} + \varepsilon e) \in D$ となって, $\bar{k}$ は拡張的となる。実際には, 後に示すように $x \in \bar{\Delta}$ が一様に拡張的で, ある十分に小さい $\varepsilon > 0$ が存在して任意の $x \in \bar{\Delta}$ に対して $(x, x + \varepsilon e) \in D$ となる。もちろん, ここで $e = (1, \dots, 1)$ である。

更に, この仮定5と補題11より, u が閉で強凹であれば, D を $\tilde{\Delta}$ を含む十分に大きい (凸な) 範囲に制限すると, その範囲では u が一様強凹となる事が示せる。以下では u の一様強凹性を基本として議論を進めていくが, k^0 が所与なので, その結果は u の D 上での閉強凹性の仮定でも成立する。

全ての t に対して $k^t = k^0$ で $\rho w - z \geq (\rho - 1)x$ に対して $u(k^0, k^0) \geq u(z, w)$ となる (ρ -割引) 最適定常経路 $k^0 = \{k^t\}_{t=0}^\infty, k^t = k^0, t = 0, 1, \dots$ に関する性質を導く²⁴⁾。もしも $k^0 = x$ で k^T が拡張的 (つまり, ある $(k^T, y) \in D$ で $y > k^T$) となるような有限経路 $\{k^t\}_{t=0}^T$ が存在すれば, 資本ストック x を充分的 (sufficient) と呼ぶ。

補題12 もしも $1 \geq \rho \geq \bar{\rho}$ ならば ρ -割引最適定常資本ストック k^0 は $\bar{\Delta}$ に属する。もしも $\rho < 1$ で $\rho \rightarrow 1$ ならば $k^0 \rightarrow \bar{k}$ となる²⁵⁾。

証明. $f'(x, \rho) = \{(z, w) \mid (z, w) \in D \text{ に対して } \rho w - z \geq (\rho - 1)x\}$ とする。補題4より $f'(x, \rho)$ は非空, 凸, 有界である。 $\rho \bar{y} - \bar{x} \geq \bar{\rho} \bar{y} - \bar{x} > 0 \geq (\rho - 1)\bar{x}$ より $(\bar{x}, \bar{y}) \in f'(x, \rho)$ である。 k^0 の定義より任意の $(z, w) \in f'(k^0, \rho)$ に対して $u(k^0, k^0) \geq u(z, w)$ となるので, $(\bar{x}, \bar{y}) \in f'(x, \rho)$ と

24) このような k^0 の存在や k^0 からの最適経路 $k^0 = \{k^t\}_{t=1}^\infty$ の最適性は前節の補題9や定理2から保証される。

25) ル・ヴァン/ダナ (2003, 第8章) では, 1財モデルの枠組で, 効用関数の2回連続微分可能性に基づいてオイラー方程式と陰関数定理を適用してこの命題を導いているが, 容易に多数財モデルへ一般化可能である。

$\bar{\Delta}$ の定義から $k^\rho \in \bar{\Delta}$ となる。

まず、前節の補題7の証明に適宜 ρ を導入してその証明を少し手直して、 f' の x と ρ に関する下半連続性を示す。任意の $(z, w) \in f'(x, \rho)$ に対して、 $x^s \rightarrow x$ と $1 \geq \rho \geq \bar{\rho}$ に対して $\rho^s \rightarrow \rho$ とする時に、 (z, w) に最も近い $(z^s, w^s) \in f'(x^s, \rho^s)$ からなる点列を考える。 $(\alpha'(z, w) + (1 - \alpha')(\bar{x}, \bar{y})) \in f'(x^s, \rho^s)$ となる最大の $\alpha' \in [0, 1]$ を α_s として $(z^s, w^s) = \alpha_s(z, w) + (1 - \alpha_s)(\bar{x}, \bar{y})$ が求めている $(z^s, w^s)_{s=1}^\infty$ である事を示す。最初にこのような $\alpha_s \in [0, 1]$ が存在する事を示す。まず、 $(z, w) \in f'(x^s, \rho^s)$ であれば $\alpha_s = 1$ とすればいいので、 $(z, w) \in f(x^s, \rho^s)$ とする。 $\rho^s \bar{y} - \bar{x} > (0 \geq) (\rho^s - 1)x^s$ なので、十分に0に近い $\alpha' (> 0)$ に対して、 $[\rho^s(\alpha'w + (1 - \alpha')\bar{y}) - (\alpha'z + (1 - \alpha')\bar{x})] > (0 \geq) (\rho^s - 1)x^s$ となるので D の凸性より $(\alpha'(z, w) + (1 - \alpha')(\bar{x}, \bar{y})) \in f'(x^s, \rho^s)$ となる。そこでそのような $\alpha \in [0, 1]$ の上限 $\hat{\alpha} \leq 1$ を考え、それが求めている α_s である事を示す。そのためには、 $(\hat{\alpha}(z, w) + (1 - \hat{\alpha})(\bar{x}, \bar{y})) \in f'(x^s, \rho^s)$ を示せばいい。まず、 $(z, w) \in f'(x, \rho) \subset D$ より $(z, w), (\bar{x}, \bar{y}) \in D$ なので、 D の凸性より、任意の $\alpha \in [0, 1]$ に対して $(\alpha(z, w) + (1 - \alpha)(\bar{x}, \bar{y})) \in D$ となる。上限の性質より、ある $(\alpha^m)_{m=1}^\infty \subset [0, 1]$ が存在して $(\alpha^m(z, w) + (1 - \alpha^m)(\bar{x}, \bar{y})) \in f'(x^s, \rho^s)$ で $\alpha^m \uparrow \hat{\alpha} (n \rightarrow \infty)$ となるが、 $(\alpha^m(z, w) + (1 - \alpha^m)(\bar{x}, \bar{y})) \in f'(x^s, \rho^s)$ より $[\rho^s(\alpha^m w + (1 - \alpha^m)\bar{y}) - (\alpha^m z + (1 - \alpha^m)\bar{x})] \geq (\rho^s - 1)x^s$ となるので、 $m \rightarrow \infty$ とすると $[\rho^s(\hat{\alpha} w + (1 - \hat{\alpha})\bar{y}) - (\hat{\alpha} z + (1 - \hat{\alpha})\bar{x})] \geq (\rho^s - 1)x^s$ となり、そして、 $\hat{\alpha} \in [0, 1]$ より $(\hat{\alpha}(z, w) + (1 - \hat{\alpha})(\bar{x}, \bar{y})) \in D$ なので、 $(\hat{\alpha}(z, w) + (1 - \hat{\alpha})(\bar{x}, \bar{y})) \in f'(x^s, \rho^s)$ である。するとこの $\hat{\alpha}$ は α_s の持つべき性質を全て満たしているので $\alpha_s = \hat{\alpha}$ とすればいい。この時には、 $(z, w) \notin f'(x^s, \rho^s)$ なので $\alpha_s (= \hat{\alpha}) < 1$ である。

次に、 $\alpha_s \in [0, 1]$ より $(\alpha_s)_{s=1}^\infty$ には収束部分列が存在するので、一般性を失うことなく、 $s \rightarrow \infty$ とする時の α_s の極限を $\alpha \in [0, 1]$ とする。 $\alpha = 1$ であれば、 $\alpha_s \rightarrow \alpha = 1 (s \rightarrow \infty)$ より $(z^s, w^s) = \alpha_s(z, w) + (1 - \alpha_s)(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow (z, w) (s \rightarrow \infty)$ となって求めている結果が得られるので、 $\alpha < 1$ とする。 $(z', w') = \alpha(z, w) + (1 - \alpha)(\bar{x}, \bar{y})$ とする。 $(z, w) \in f'(x, \rho)$ より $(\rho w - z) \geq (\rho - 1)x$ であり、また、 $(\bar{x}, \bar{y})$ は $\rho \bar{y} - \bar{x} > (0 \geq) (\rho - 1)x$ となっているので、 $\alpha \in [0, 1]$ に対して $(\rho w' - z') = [\rho(\alpha w + (1 - \alpha)\bar{y}) - (\alpha z + (1 - \alpha)\bar{x})] > (\rho - 1)x$ となり、ある十分に小さい $\delta (= (\delta_1, \dots, \delta_n)) > 0$ に対して $\rho w' - z' > (\rho - 1)x + \delta$ となる。すると、 $\alpha_s \rightarrow \alpha (s \rightarrow \infty)$ より $(z^s, w^s) \rightarrow (z', w') (s \rightarrow \infty)$ なので、 $\rho^s \rightarrow \rho$ より十分に大きい s' に対して $\rho^{s'} w^{s'} - z^{s'} > (\rho^{s'} - 1)x^{s'} + \delta$ が成立する。しかし $\alpha_s \rightarrow \alpha (< 1) (s \rightarrow \infty)$ より $\alpha_{s'} < 1$ となるので、 $\alpha'_{s'} \in (\alpha_{s'}, 1)$ を $\alpha_{s'}$ より少しだけ大きく取れば、依然として $(\rho^{s'} w^{s'} - z^{s'}) = [\rho^{s'}(\alpha'_{s'} w + (1 - \alpha'_{s'})\bar{y}) - (\alpha'_{s'} z + (1 - \alpha'_{s'})\bar{x})] > (\rho^{s'} - 1)x$ と出来て $(z^{s'}, w^{s'}) \in f'(x^{s'}, \rho^{s'})$ となる。これは、 $\alpha_{s'} < \alpha'_{s'} < 1$ より $\alpha_{s'}$ の最大性に矛盾するので $\alpha = 1$ となる。したがって、 $\alpha_s \rightarrow \alpha = 1 (s \rightarrow \infty)$ より $(z^s, w^s) = (\alpha_s(z, w) + (1 - \alpha_s)(\bar{x}, \bar{y})) (\in f'(x^s, \rho^s)) \rightarrow (z, w) (\in f'(x, \rho)) (s \rightarrow \infty)$ となり、 f は (x, ρ) において下半連続となる。

次に、補題8の議論を少し修正して、 $g \circ f'$ の x と ρ に関する上半連続性を示す。補題5の後で述べたように、 $g \circ f'$ はコンパクトな値域を持つので、 $g \circ f'$ の上半連続性はそのグラフの閉性を示せばよい。そこで、 $x^s \rightarrow x, \rho^s \rightarrow \rho (1 \geq \rho \geq \bar{\rho})$ となる時の $(z^s, w^s) \in (g \circ f')(x^s, \rho^s)$ に対して $(z^s, w^s) \rightarrow (z, w)$ として、 $(z, w) \in (g \circ f')(x, \rho)$ を示す。まず、 D は閉でないが、 u の閉性から (z, w) は必ず D に属する事に注意する。実際、もしもそうでなければ $(z, w) \in bd(D) \setminus D$ となる

ので, u の閉性から $u(z^s, w^s) \rightarrow -\infty$ となり, 十分に大きな s に対して $u(\bar{x}, \bar{y}) > u(z^s, w^s)$ となって $(\bar{x}, \bar{y}) \in f'(x, \rho^s)$ より $(z^s, w^s) \notin (g \circ f')(x^s, \rho^s)$ となり, 矛盾が起こるからである。 D が開でないので $f'(x, \rho)$ の上半連続性は一般には成立しないが, $(z^s, w^s) \in (g \circ f')(x^s, \rho^s) \rightarrow (z, w)$ とすると u の閉性により $(z, w) \in D$ となり, $(z^s, w^s) \in f'(x^s, \rho^s)$ より $(\rho^s w^s - z^s) \geq (\rho^s - 1)x^s$ なので $(\rho w - z) \geq (\rho - 1)x$ となって, $(z, w) \in f'(x, \rho)$ となる。これが対応 $f'(x, \rho)$ の上半連続性 (一般には成立しない) として果たすべき役割である。 $(z, w) \in (g \circ f)(x, \rho)$ を示さなくてはならないが, 今そうでなくて $(z, w) \notin (g \circ f)(x, \rho)$ となったとする。 $(z, w) \in f'(x, \rho)$ なので, ある $(z', w') \in f'(x, \rho)$ が存在して $u(z', w') > u(z, w)$ となる。上で示したように f' は下半連続なので, ある $(z^s, w^s) \in f'(x^s, \rho^s), s = 1, 2, \dots$ が存在して $(z^s, w^s) \rightarrow (z', w') (s \rightarrow \infty)$ となる。この時, $(z', w') \in \text{int}(D)$ であれば, u の凹性より u は $\text{int}(D)$ 上で連続なので, $u(z^s, w^s) \rightarrow u(z', w') (s \rightarrow \infty)$ となり, また, $(z', w') \in \text{bd}(D)$ であれば, u の閉性より $u(z', w') = \limsup_{s \rightarrow \infty} u(z^s, w^s)$ となるので, いずれにしても $u(z', w') = \limsup_{s \rightarrow \infty} u(z^s, w^s)$ となる。そして, 全ての s において $(z^s, w^s) \in (g \circ f')(x^s, \rho^s)$ より $u(z^s, w^s) \geq u(z^s, w^s)$ であり, u の凹性と閉性から u は D 上で上半連続なので, $(z, w) \in D$ より $u(z, w) \geq \limsup_{s \rightarrow \infty} u(z^s, w^s)$ となる。すると, $u(z, w) \geq \limsup_{s \rightarrow \infty} u(z^s, w^s) \geq \limsup_{s \rightarrow \infty} u(z^s, w^s) = u(z', w')$ となって, $u(z', w') > u(z, w)$ という前提に矛盾するのでそのような (z', w') は存在せず, (z, w) は $f'(x, \rho)$ における u の最大点であって $(z, w) \in (g \circ f')(x, \rho)$ である。これより $g \circ f'$ のグラフは閉となり, $g \circ f'$ は上半連続である。

さて, 最適定常資本ストック k^ρ は定義から $k^\rho \in F(k^\rho)$ を満たす。そこで, 下から 1 に収束する数列 $\rho_s \rightarrow 1, s = 1, 2, \dots$ と $\|k^{\rho_s} - \bar{k}\| \geq \epsilon > 0, s = 1, 2, \dots$ となる点列 $k^{\rho_s} \in F(k^{\rho_s})$ が存在するとする。 $k^{\rho_s} \in F(k^{\rho_s}) \subset \bar{\Delta}$ で $\bar{\Delta}$ が有界なので k^{ρ_s} には集積点が存在し, k' を k^{ρ_s} の集積点とする。 $\|k^{\rho_s} - \bar{k}\| \geq \epsilon > 0, s = 1, 2, \dots$ より $\|k' - \bar{k}\| \geq \epsilon (> 0)$ なので $k' \neq \bar{k}$ である。 $g \circ f'(k, \rho)$ の上半連続性から $(k', k') \in g \circ f'(k', 1)$ となるが, $\rho = 1$ から (k', k') は維持可能効用を最大にする。すると, $u(k', k') \geq u(\bar{k}, \bar{k})$ で $k' \neq \bar{k}$ なので維持可能効用を最大にする $x \in \bar{\Delta}$ の要素 (x, x) の一意性に矛盾し, このような点列は存在できない。故に, $\rho (> 0) \rightarrow 1 \Rightarrow k^\rho \rightarrow \bar{k}$ となる。 $\square$

経路の比較には何ら影響しないので, 効用の基準を $u(\bar{k}, \bar{k}) = 0$ となるように選んでおく。 $k^0 = x$ となる経路 $\mathbf{k}(x) = \{k^t\}_{t=1}^\infty (\in \mathbf{K}(x))$ は補題 2 によって一様に有界なので, $k^0 = x$ となる経路 $\mathbf{k}(x) = \{k^t\}$ に対して $\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T \rho^{t-1} u(k^{t-1}, k^t) = \sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1} u(k^{t-1}, k^t)$ が有限か $-\infty$ で存在する。そこで, 割引因子 ρ に対する価値関数 V^ρ を, $V^\rho(x) = \sup\{\sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1} u(k^{t-1}, k^t) : \mathbf{k}(x) = \{k^t\}_{t=1}^\infty \in \mathbf{K}(x)\}$ として定義する。 u の凹性から V^ρ も凹である。この時, $V^\rho(x) = \sup\{u(x, k') + \rho V^\rho(k') : (x, k') \in D\}$ となるが, $\mathbf{k}(\rho) = \{k^t(\rho)\}$ が $x (= k^0(\rho))$ からの最適経路であれば, $V^\rho(x) = u(x, k^1(\rho)) + \rho V^\rho(k^1(\rho))$ となる。 V^ρ に関して, 前節の補題 4 を利用すると, 以下の性質が成り立つ。

補題 13 もしも x が十分的小であれば, $V^\rho(x)$ は $\bar{\rho} \leq \rho < 1$ に対して一様に有界である。

証明. 今 $\mathbf{k}(\rho) = \{k^t\}_{t=0}^\infty$ とする。補題 4 からある $p (\geq 0)$ が存在して $u(\bar{k}, \bar{k}) \geq u(k^{t-1}, k^t) + pk^t - pk^{t-1}$ となる。 $u(\bar{k}, \bar{k}) = 0$ なので, これより $u(k^{t-1}, k^t) \leq p(k^{t-1} - k^t)$ となる。この式全体に ρ^{t-1} を掛けて $t = 1$ から $t = T$ まで総和すれば,

$$\sum_{t=1}^T \rho^{t-1} u(k^{t-1}, k^t) \leq \sum_{t=1}^T \rho^{t-1} p(k^{t-1} - k^t) = pk^0 + \sum_{t=1}^{T-1} \rho^{t-1} (\rho - 1) pk^t - \rho^{T-1} pk^T \leq pk^0$$

となる。これより $\sum_{t=1}^T \rho^t u(k^{t-1}, k^t)$ は $\rho < 1$ 上で T とは独立に pk^0 によって上から有界となるので、 $V^\rho(x) = \sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1} u(k^{t-1}, k^t)$ は $\bar{\rho} \leq \rho \leq 1$ に対して pk^0 によって一様に上に有界である。

$V^\rho(x)$ が下に有界となる事を示す。 x の充分性より、 $x^0 = x$ からのある有限経路 $\{x^t\}_{t=0}^T$ が存在して x^T が拡張的であり、ある $(x^T, y) \in D$ が存在して $y > x^T$ となる。今 $0 < \alpha < 1$ に対して $\alpha^r (x^T, y) + (1 - \alpha^r)(\bar{k}, \bar{k}) = (\tilde{k}^r, k'^{r+1}), r = 0, 1, \dots$ となる無限点列 $\{(\tilde{k}^r, k'^{r+1})\}_{r=0}^\infty$ を考える。 D の凸性から $(\tilde{k}^t, k'^{t+1}) \in D, t = T, T+1, \dots$ である。 $r = 0 (t = T)$ に対しては $(\tilde{k}^T, k'^{T+1}) = (x^T, y)$ である。 $0 < \alpha < 1$ より、 $t \rightarrow \infty$ とすると $r \rightarrow \infty$ となって $\alpha^r \rightarrow 0$ となり、 $(\tilde{k}^t, k'^{t+1}) \rightarrow (\bar{k}, \bar{k})$ となる。定義より $k'^{T+r+1} = \bar{k} - \alpha^r(\bar{k} - y)$ で $k'^{T+r+1} = \bar{k} - \alpha^{r+1}(\bar{k} - x^T)$ であるが、 $(y - \alpha x^T) > (\bar{k} - \alpha \bar{k})$ ならば $\alpha(\bar{k} - x^T) > (\bar{k} - y)$ となるので $\alpha^{r+1}(\bar{k} - x^T) > \alpha^r(\bar{k} - y)$ となり、 $k'^{T+r+1} > k'^{T+r}$ となる。 $y > x^T$ なので、 1 に十分に近い $\alpha (> 0)$ に対しても $(y - \alpha x^T) > 0 \geq (\bar{k} - \alpha \bar{k})$ となる。したがって、 $(\tilde{k}^{T+r}, k'^{T+r+1}) \in D$ なので自由処分によって $(\tilde{k}^t, k'^{t+1}) \in D$ となり、結果として $\{\tilde{k}^t\}_{t=T+1}^\infty$ は $\bar{k}$ に近づいて行く実現可能な経路の一つとなる。そこで、 $x^{T+r} = \tilde{k}^t = \alpha^r x^T + (1 - \alpha^r)\bar{k}, r = 0, 1, \dots$ となる無限経路 $\{x^t\}, t = T, T+1, \dots$ に対して、 u の凹性と単調性より $u(x^{T+r}, x^{T+r+1}) \geq \alpha^r u(x^T, y) + (1 - \alpha^r)u(\bar{k}, \bar{k}) = \alpha^r u(x^T, y)$ となるので $\sum_{t=T}^\infty \rho^t u(x^t, x^{t+1}) \geq (\rho^T / (1 - \rho\alpha))u(x^T, y)$ となる。すると、 $u(x^T, y) \leq u(x^T, x^T) \leq u(\bar{k}, \bar{k}) = 0$ と $\rho \in (0, 1)$ に注意すれば、 $0 < \bar{\rho} \leq \rho \leq 1$ に対して $1/(1 - \alpha) \geq (\rho^T / (1 - \rho\alpha)) (> 0)$ なので、 $(\rho^T / (1 - \rho\alpha))u(x^T, y) \geq u(x^T, y)/(1 - \alpha)$ となり、結局 $\sum_{t=T}^\infty \rho^t u(x^t, x^{t+1}) \geq u(x^T, y)/(1 - \alpha)$ となって、この式の右辺は $0 < \bar{\rho} \leq \rho \leq 1$ を満たす ρ に対して一様に下に有界となる。最初の T 期間で蓄積される効用は $\rho \leq 1$ に対して有限なので、 $\sum_{t=1}^T \rho^{t-1} u(x^{t-1}, x^t) \geq -\sum_{t=1}^T |u(x^{t-1}, x^t)| = L (> -\infty)$ であり、故に、 $L + (1/(1 - \alpha))u(x^T, y) \leq \sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1} u(x^{t-1}, x^t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T \rho^{t-1} u(x^{t-1}, x^t) \leq V^\rho(x)$ となって、 $V^\rho(x)$ は $\bar{\rho} \leq \rho \leq 1$ に対して一様に下に有界となる。□

次に、既に触れたように、仮定5より $\bar{\Delta}$ に属している維持可能資本ストックが一様に拡張可能である事を示す。

補題14 ある $\epsilon > 0$ が存在して $x \in \bar{\Delta}$ ならば $(x, x + \epsilon e) \in \text{int}(D)$ となる。

証明. 仮定5によって $\tilde{\Delta} \subset \text{int}(D)$ であるが、ここで考察しているの空間はユークリッド空間なのでもちろん距離空間であり、故に正規空間であるが、正規空間の性質より、ある開集合 O が存在して、 $\tilde{\Delta} \subset O \subset \text{cl}(O) \subset \text{int}(D)$ となる。この時、補題11の $\bar{\Delta}$ のコンパクト性より $\tilde{\Delta}$ のコンパクト性も成立し、ある $\tilde{a} \in \tilde{\Delta}$ に対して $\gamma = \min_{a \in \tilde{\Delta}} d(a, \text{cl}(O) \setminus O) = d(\tilde{a}, \text{cl}(O) \setminus O)$ が実現する。そこでもしも $\gamma = 0$ とすると、 $d(\tilde{a}, \text{cl}(O) \setminus O)$ の定義よりある $b \in \text{cl}(O) \setminus O$ に対して $d(\tilde{a}, b) = 0$ となって $\tilde{a} = b$ となり、 $\tilde{\Delta} \cap (\text{cl}(O) \setminus O) \neq \emptyset$ となるが、これは $\tilde{\Delta} \subset O$ に矛盾するので $\gamma > 0$ である。すると、任意の $a \in \tilde{\Delta}$ に対して $B_{\gamma/2}(a) \subset O$ となる。実際、 $a' \in (B_{\gamma/2}(a) \setminus O) \neq \emptyset$ とすると、 $a'' \in (a, a'] \cap (\text{cl}(O) \setminus O) \neq \emptyset$ となるが、 $\gamma \leq d(a, a'') \leq d(a, a') < \gamma/2$ となって矛盾が起きるか

らである。すると、 $\tilde{\Delta} \subset (\cup_{a \in \tilde{\Delta}} B_{7/3}(a)) \subset O \subset \text{int}(D)$ となるので任意の $a \in \tilde{\Delta}$ に対して $B_{7/2}(a) \subset \text{int}(D)$ となるが、 $a \in \tilde{\Delta}$ は対応する $x \in \bar{\Delta}$ によって $a = (x, x)$ と表現されるので、ある $\epsilon > 0$ が存在して $(x, x + \epsilon e) \in B_{7/2}(a) \subset \text{int}(D)$ となり、 $x \in \bar{\Delta}$ は拡張的になる。そしてこの時 ϵ は $x \in \bar{\Delta}$ の選択から独立になされているので、 $\bar{\Delta}$ に属している維持可能資本ストックは一様に拡張可能である。□

この時、 $\tilde{\Delta} \subset (\cup_{a \in \tilde{\Delta}} B_{7/3}(a)) \subset (\cup_{a \in \tilde{\Delta}} \overline{B_{7/3}(a)}) \subset (\cup_{a \in \tilde{\Delta}} B_{7/2}(a)) \subset O \subset D$ なので、 $\tilde{\Delta}$ のコンパクト性からある有限個の $a_i \in \tilde{\Delta}, i = 1, \dots, l$ が存在して $\tilde{\Delta} \subset (\cup_{i=1}^l B_{7/3}(a_i)) \subset (\cup_{i=1}^l \overline{B_{7/3}(a_i)}) \subset (\cup_{a \in \tilde{\Delta}} \overline{B_{7/3}(a)}) \subset (\cup_{a \in \tilde{\Delta}} B_{7/2}(a)) \subset O \subset D$ となるが、 $(\cup_{i=1}^l \overline{B_{7/3}(a_i)})$ はコンパクト集合なので、結局、その内部に $\tilde{\Delta}$ を含んで同時に D の内部に含まれるようなコンパクト集合 $\hat{\Delta}$ が存在する。そして、 $\hat{\Delta}$ は $\tilde{\Delta}$ と同じ性質を持っているので、補題 14 の証明で $\tilde{\Delta}$ に適用した議論を $\hat{\Delta}$ に適用すれば、やはりある $\epsilon > 0$ が存在して $(x, y) \in \hat{\Delta}$ ならば $(x, y + \epsilon e) \in \text{int}(D)$ と出来る。

ρ の時の k^0 からの最適経路 $\mathbf{k}(\rho) = \{k^t(\rho)\}_{t=0}^{\infty}$ は補題 2 より有界な点列である。今、 $t = 0, 1, 2, \dots$ に対して $k''(\rho) = 1/2(k'(\rho) + k^0)$ とし、 t 期の効用利得 (utility gain) を $g_t(\mathbf{k}(\rho), k^0) = u(k^{t-1}(\rho), k''(\rho)) - 1/2(u(k^{t-1}(\rho), k^t(\rho)) + u(k^0, k^0))$ によって定義する²⁶⁾。 u の凹性によって $g_t(\mathbf{k}(\rho), k^0) \geq 0$ となるが、 $(k^{t-1}(\rho), k^t(\rho)) \neq (k^0, k^0)$ ならば、ある $\epsilon > 0$ に対して $\|(k^{t-1}(\rho), k^t(\rho)), (k^0, k^0)\| > \epsilon$ となるので、 u の $\bar{\Delta}$ 上での一様強凹性によって、ある $\delta > 0$ に対して $g_t(\mathbf{k}(\rho), k^0) = u(k^{t-1}(\rho), k''(\rho)) - 1/2(u(k^{t-1}(\rho), k^t(\rho)) + u(k^0, k^0)) > \delta$ となる。すると、 $g_t(\mathbf{k}(\rho), k^0) = u(k^{t-1}(\rho), k''(\rho)) - 1/2(u(k^{t-1}(\rho), k^t(\rho)) + u(k^0, k^0)) = 0$ ならば $(k^{t-1}(\rho), k^t(\rho)) = (k^0, k^0)$ である。ここで、リアプノフ関数を $G_t(\mathbf{k}(\rho), k^0) = \sum_{r=1}^{\infty} \rho^r g_{t+r}(\mathbf{k}(\rho), k^0)$ によって定義する。この時、 $g_t(\mathbf{k}(\rho), k^0) \geq 0$ より $G_t(\mathbf{k}(\rho), k^0) \geq 0$ となる。また、 $\rho^{-1} G_t(\mathbf{k}(\rho), k^0) = \rho^{-1} \sum_{r=1}^{\infty} \rho^r g_{t+r}(\mathbf{k}(\rho), k^0) = \sum_{r=1}^{\infty} \rho^{r-1} g_{t+r}(\mathbf{k}(\rho), k^0) = g_{t+1}(\mathbf{k}(\rho), k^0) + \sum_{r=2}^{\infty} \rho^{r-1} g_{t+r}(\mathbf{k}(\rho), k^0) = g_{t+1}(\mathbf{k}(\rho), k^0) + \sum_{r=1}^{\infty} \rho^r g_{t+r+1}(\mathbf{k}(\rho), k^0) = g_{t+1}(\mathbf{k}(\rho), k^0) + G_{t+1}(\mathbf{k}(\rho), k^0)$ となり、故に、 $G_{t+1}(\mathbf{k}(\rho), k^0) = \rho^{-1} G_t(\mathbf{k}(\rho), k^0) - g_{t+1}(\mathbf{k}(\rho), k^0)$ となる。すると、関数 G と g の両方の変数 $(\mathbf{k}(\rho), k^0)$ の表示を省略すると、

$$G_{t+1} - G_t = (\rho^{-1} - 1) G_t - g_{t+1} \quad (*)$$

となる。そこで、任意の $\delta > 0$ に対して、 $\rho \rightarrow 1$ とする時に $G_0(\mathbf{k}(\rho), k^0) (\geq 0)$ が上に有界であれば、 ρ を 1 に十分に近く選ぶと $(\rho^{-1} - 1) G_0 < \delta$ とできる事を証明する。

補題 15 $\rho \leq 1$ で 1 に十分に近い ρ に対して $G_0(\mathbf{k}(\rho), k^0)$ は一様に有界である。

証明. $G_0(\mathbf{k}(\rho), k^0) (\geq 0)$ なので、 $\rho \rightarrow 1$ とする時に $G_0(\mathbf{k}(\rho), k^0)$ が上に有界となる事を示せばよい。 $k^0(\rho) = x$ なので、 $G_0(\mathbf{k}(\rho), k^0) = \rho \sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1} g_t(\mathbf{k}(\rho), k^0) = \rho \sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1} [u(k^{t-1}(\rho), k''(\rho)) - 1/2(u(k^{t-1}(\rho), k^t(\rho)) + u(k^0, k^0))] = \rho \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T \rho^{t-1} [u(k^{t-1}(\rho), k''(\rho)) - 1/2(u(k^{t-1}(\rho), k^t(\rho)) + u(k^0, k^0))] = \rho \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T \rho^{t-1} u(k^{t-1}(\rho), k''(\rho)) - \rho \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T \rho^{t-1} [1/2(u(k^{t-1}(\rho), k^t(\rho)) + u(k^0, k^0))] = \rho \sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1} [u(k^{t-1}(\rho), k''(\rho)) - \rho/2 \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T \rho^{t-1} (u(k^{t-1}(\rho), k^t(\rho)) + \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T \rho^{t-1} u(k^0, k^0))] = \rho \sum_{t=1}^{\infty} \rho^t u(k^{t-1}(\rho), k''(\rho)) - \rho/2 (\sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1} (u(k^{t-1}(\rho), k^t(\rho)) +$

26) $k^0(\rho) = 1/2(k^0(\rho) + k^0) = 1/2(k^0 + k^0)$ である。

$\sum_{i=1}^{\infty} \rho^{i-1} u(k^{\rho}, k^{\rho}) \leq \rho V^{\rho}(1/2(x+k^{\rho})) - \rho/2(V^{\rho}(x) + V^{\rho}(k^{\rho}))$ となり、左辺 ≥ 0 なので、 $G_0(k(\rho), k^{\rho}) \leq V^{\rho}(1/2(x+k^{\rho})) - 1/2(V^{\rho}(x) + V^{\rho}(k^{\rho}))$ が得られる。 x が充分的なので、補題 13 によって $V^{\rho}(x)$ は $(\bar{\rho} \leq \rho < 1)$ で一様に有界である。また、補題 13 の前半部分の証明においては x の十分性を $V^{\rho}(x)$ が下に有界という部分でのみ用いているので、 $V^{\rho}(1/2(x+k^{\rho}))$ は上に有界である。したがって、 $\rho \rightarrow 1$ とする時に $V^{\rho}(k^{\rho})$ が下に有界である事を示せばよい。 $(\bar{k}, \bar{k}) \in \bar{\Delta}$ と仮定 5 より、 $\bar{k}$ を含むある開球 B が存在して、 $(\bar{k}, \bar{k}) \in ((B \times B) \cap \bar{\Delta}) \subset \text{int}(D)$ となるが、補題 12 によって、1 に近い ρ に対しても $k^{\rho} \in \bar{\Delta}$ であり、更に、 $\rho \rightarrow 1$ とすると $k^{\rho} \rightarrow \bar{k}$ となるので、 $\bar{k}$ の ($\bar{\Delta}$ に相対的な) 近傍 $B' (= B \cap \bar{\Delta})$ 内で $V^{\rho}(k^{\rho})$ が下に有界である事を示せばよい。まず、補題 14 によって、ある $\epsilon > 0$ に対して任意の $k^{\rho} \in B'$ に対して $(k^{\rho}, k^{\rho} + \epsilon e) \in \text{int}(D)$ となる。すると、補題 13 の証明において (x^T, y) が拡張的という所で示した議論を $(k^{\rho}, k^{\rho} + \epsilon e)$ に適用する事によって、この ϵ に対してある $\alpha \in (0, 1)$ が存在して $V^{\rho}(k^{\rho}) \geq (1/(1-\alpha))u(k^{\rho}, k^{\rho} + \epsilon e) + L$ となる。この時、 $(\bar{k}, \bar{k} + \epsilon e)$ は D の内部にあるので $u(\bar{k}, \bar{k} + \epsilon e)$ は有限値であり、しかも、 $(\bar{k}, \bar{k} + \epsilon e)$ は D の内部にあって u は凹関数なので、 u は $(\bar{k}, \bar{k} + \epsilon e)$ で連続である。すると、補題 12 より $\rho \rightarrow 1$ とすると $k^{\rho} \rightarrow \bar{k}$ となるので、 $u(k^{\rho}, k^{\rho} + \epsilon e) \rightarrow u(\bar{k}, \bar{k} + \epsilon e)$ となり、 $\rho \rightarrow 1$ とする時に $u(k^{\rho}, k^{\rho} + \epsilon e)$ は有界である。したがって、 $\rho \rightarrow 1$ とすると $V^{\rho}(k^{\rho})$ は下に有界であり、故に、 G_0 は上に有界で G_0 は有界である。□

この結果を利用して、最適経路が k^{ρ} の任意の近傍 U の外に無限にいる事ができず、必ずこの近傍 U に一度は属するという訪問補題 (Visit Lemma) を示す。

補題 16 (訪問補題) $k(\rho)$ を $\rho \in (0, 1]$ の時の k^0 からの最適経路とする。その時、任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\rho_{\epsilon} \in (0, 1)$ と $T_{\epsilon} > 0$ が存在して、任意の $\rho \in (\rho_{\epsilon}, 1)$ に対してある $t_{\rho} \leq T_{\epsilon}$ が存在して、 $k^{t_{\rho}}(\rho) \in B_{\epsilon}(k^{\rho})$ となる。

証明. 補題 15 によって、ある M とある $\rho_M \in (0, 1)$ に対して $\forall \rho \in (\rho_M, 1)$ に対して $(0 \leq) G_0 \leq M$ と出来るので、任意の $\delta > 0$ に対してある $\rho_{\delta} \in (0, 1)$ を選んで、 $\forall \rho \in (\rho_{\delta}, 1)$ に対して $(\rho^{-1} - 1)G_0 < \delta$ と出来る。もちろん、 $\rho_{\delta} \geq \rho_M$ である。 G_t をリアプノフ関数として確立したいのであるが、その最初のステップとして、任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta_{\epsilon} > 0$ と $\rho_{\epsilon} \in (0, 1)$ が存在して、任意の $\rho \in (\rho_{\epsilon}, 1)$ に対して $\|k^0(\rho) - k^{\rho}\| > \epsilon$ ならば $t = 0$ の時の (*) である $G_1 - G_0 = (\rho^{-1} - 1)G_0 - g_1$ が $-\delta_{\epsilon}$ より小さくなる事を示す。まず、仮定 1''' より (k^{ρ}, k^{ρ}) における u の強凹性が任意の $\rho \in (\rho, 1]$ に対応する $k^{\rho} \in \bar{\Delta}$ に対して一様的なので、この $\epsilon > 0$ に対してある $\delta_{\epsilon} > 0$ が存在して $\|(k^0(\rho), k^1(\rho)) - (k^{\rho}, k^{\rho})\| > \epsilon$ ならば $g_1(k(\rho), k^{\rho}) > 2\delta_{\epsilon}$ となる。そこで既に示したように、この δ_{ϵ} に対して $\rho_{\epsilon} (= \rho_{\delta_{\epsilon}}) \in (0, 1)$ を選んで任意の $\rho \in (\rho_{\epsilon}, 1)$ に対して $(\rho^{-1} - 1)G_0 < \delta_{\epsilon}$ となるようすれば、 $\forall \rho \in (\rho_{\epsilon}, 1)$ に対して $G_1 - G_0 = (\rho^{-1} - 1)G_0 - g_1 < \delta_{\epsilon} - 2\delta_{\epsilon} = -\delta_{\epsilon}$ となる。故に、求めていたように、任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta_{\epsilon} > 0$ と $\rho_{\epsilon} \in (0, 1)$ が存在して、任意の $\rho_{\epsilon} \in (0, 1)$ に対して k_0 が k^{ρ} から少なくとも ϵ だけ離れていれば、 $G_1 - G_0 < -\delta_{\epsilon}$ と出来る。

そこでこの議論を帰納法に続ける事を考える。 $t = 0$ に対して確立した関係が成立するとすると、任意の $\rho \in (\rho_{\epsilon}, 1)$ に対して $\|(k^0(\rho), k^1(\rho)) - (k^{\rho}, k^{\rho})\| > \epsilon$ ならば $G_1 - G_0 < -\delta_{\epsilon} (< 0)$ と $(\rho^{-1} - 1)G_0 < \delta_{\epsilon}$ となるので、 $(\rho^{-1} - 1)G_1 < (\rho^{-1} - 1)G_0 < \delta_{\epsilon}$ となる。そこで、もしも $\|(k^1(\rho), k^2$

$(\rho)) - (k^0, k^0) \| > \epsilon$ となっているとすると、上の議論と同様にして、 u の $\bar{\Delta}$ 上での一様強凹性からやはり $g_2 > 2\delta_\epsilon$ が成立して、 $G_2 - G_1 = (\rho^{-1} - 1)G_1 - g_2 < -\delta_\epsilon$ となる。そこで、 $t = 0, 1$ に対して確立した関係が $t(\geq 0)$ で成立しているとする、任意の $\rho \in (\rho_\epsilon, 1)$ に対して $\|(k^t(\rho), k^{t+1}(\rho)) - (k^0, k^0)\| > \epsilon$ ならば $G_{t+1} - G_t < -\delta_\epsilon (< 0)$ となるので、これらの関係より、 $(\rho^{-1} - 1)G_{t+1} < (\rho^{-1} - 1)G_t < \delta_\epsilon$ となる。そして、もしも $\|(k^{t+1}(\rho), k^{t+2}(\rho)) - (k^0, k^0)\| > \epsilon$ が成立すると、上の議論と同様にして、 u の $\bar{\Delta}$ 上での一様強凹性からやはり $g_{t+2} > 2\delta_\epsilon$ が成立して、故に、 $G_{t+2} - G_{t+1} = (\rho^{-1} - 1)G_{t+1} - g_{t+2} < -\delta_\epsilon$ となる。したがって、各 $\epsilon > 0$ に対して任意の $\rho \in (\rho_\epsilon, 1)$ を選んだ時に、 $t \geq 0$ に対して $k^t(\rho)$ が k^0 の ϵ -近傍の外に位置する限り、 $G_{t+1} - G_t < -\delta_\epsilon$ が成立する事になる。そこで、もしも $k^t(\rho)$ が $t = 0$ から $t = T$ までずっと k^0 のある ϵ -近傍の外にあれば、これらの不等式を総和すると、 $G_T(k(\rho), k^0) \leq G_0 - T\delta_\epsilon$ となるが、定義によって左辺の G_T は非負で δ_ϵ は正なので、十分に大きい T に対しては右辺が負になって矛盾が起こる。故に、矛盾が起こらないためには、 $k^t(\rho)$ はいずれは k^0 の ϵ -近傍に入らなくてはならない。この時、 $\rho_\epsilon \geq \rho_M$ としていたので $\forall \rho \in (\rho_\epsilon, 1)$ に対して $(0 \leq) G_0 \leq M$ であり、故に、 $G_T(k(\rho), k^0) \leq G_0 - T\delta_\epsilon \leq M - T\delta_\epsilon$ となっているので、 $T_\epsilon > M/\delta_\epsilon$ となる自然数 T_ϵ を考えれば、 $k^t(\rho)$ がいつかは k^0 の ϵ -近傍に入るという議論は任意の $\rho \in (\rho_\epsilon, 1)$ に対して一様に成立する。どのような $\epsilon > 0$ に対しても、 $\rho \in (\rho_\epsilon, 1)$ の時の k_0 からの最適経路 $k^t(\rho)$ は必ず有限のある期間 T_ϵ までに一度は k^0 の ϵ -近傍に入るのである。 $\rho = 1$ のケースでは、最適経路は良好な経路で、良好な経路は定常最適経路 k^1 に収束していくので、この結果は自動的に成立する。□

ところで、この段階ではまだ $k^t(\rho)$ が k^0 の ϵ -近傍に属さない期間は有限であるという事しか示していないが、それでも $\rho \in (\rho_\epsilon, 1)$ を固定した時の最適経路 $\mathbf{k}(\rho) = (k^t(\rho))_{t=0}^\infty$ に対しては、ある十分に大きい $T(\epsilon, \rho)$ を考えると任意の $t \geq T(\epsilon, \rho)$ に対して $k^t(\rho) \in B_\epsilon(k^0)$ となる。これは $T(\epsilon, \rho)$ が ϵ と ρ の両者に依存しているという意味で、一番弱い形のターンパイク定理と考えられる。もちろん、この $T(\epsilon, \rho)$ は $\rho \in (\rho_\epsilon, 1)$ に依存しているので、 $t = 0$ からは $k^t(\rho) \in B_\epsilon(k^0)$ になっていて $k^t(\rho) \notin B_\epsilon(k^0)$ となる最初の t を $t_\rho (\leq T(\epsilon, \rho))$ とすると、 $\rho \rightarrow 1$ とした時に $t_\rho \rightarrow \infty$ となって $T(\epsilon, \rho) \rightarrow \infty$ となる可能性は残されている。そのために、この段階では $\rho \in (\rho_\epsilon, 1)$ から独立したある T_ϵ が存在して、任意の $\rho \in (\rho_\epsilon, 1)$ に対して $k^t(\rho) \in B_\epsilon(k^0)$ が任意の $t \geq T_\epsilon$ に対して成立するとは言えないが、 $T(\epsilon, \rho)$ が実は $\rho \in (\rho_\epsilon, 1)$ から独立した T_ϵ として選ぶ事が出来るというのが近傍ターンパイク定理である。この近傍ターンパイク定理を確立するためには、最適経路が一度近傍 U に入るとある近傍 W が存在し、この経路が W から離れない事を示す必要がある。そこでその目的のために次の補題を示す。

補題17 もしも $\mathbf{k}(\rho)$ が k^0 からの最適経路であれば、任意の $\delta > 0$ に対してある $\epsilon > 0$ が存在して、 $\|(k^0, k^1(\rho)) - (k^0, k^0)\| < \epsilon$ ならば、 $\bar{\rho} \leq \rho \leq 1$ となる ρ に対する定常経路 k^0 に対して、一様に $G_0(\mathbf{k}(\rho), k^0) < \delta$ となる。

証明. G_0 の定義より、 $G_0(\mathbf{k}(\rho), k^0) = \rho \sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1} g_t(\mathbf{k}(\rho), k^0) = \rho \sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1} u(k^{t-1}(\rho), k''(\rho)) - \rho/2 \sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1} [u(k^{t-1}(\rho), k^t(\rho)) + u(k^0, k^0)] = \rho \sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1} u(k^{t-1}(\rho), k''(\rho)) - \rho/2 (\sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1} u(k^{t-1}(\rho), k^t(\rho)) + \sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1} u(k^0, k^0))$ となるが、最適経路と価値関数 V^0 の関係から、 $\sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1} u(k^{t-1}(\rho), k^t$

$(\rho)) = V^\rho(k^0) = u(k^0, k^1(\rho)) + \rho V^\rho(k^1(\rho))$ で $\sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1} u(k^0, k^0) = V^\rho(k^0) = u(k^0, k^0) + \rho V^\rho(k^0)$ となる。更に、中間的な経路の実行可能性により、 $\sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1} u((k^{t-1}(\rho), k^{t-1}(\rho))) = u((1/2(k^0 + k^0), 1/2(k^1(\rho) + k^0)) + \rho \sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1} u((1/2(k^t(\rho) + k^0), 1/2(k^{t+1}(\rho) + k^0)) \leq u((1/2(k^0 + k^0), 1/2(k^1(\rho) + k^0)) + \rho V^\rho(1/2(k^1(\rho) + k^0))$ となるので、これらを最初の式の右辺に代入すれば、 $G_0(k(\rho), k^0) \leq \rho \{u((1/2(k^0 + k^0), 1/2(k^1(\rho) + k^0)) + \rho V^\rho(1/2(k^1(\rho) + k^0)) - 1/2[u(k^0, k^1(\rho)) + \rho V^\rho(k^1(\rho)) + u(k^0, k^0) + \rho V(k^0)]\} = \rho \{u((1/2(k^0 + k^0), 1/2(k^1(\rho) + k^0)) + \rho V^\rho(1/2(k^1(\rho) + k^0)) - 1/2[u(k^0, k^1(\rho)) + u(k^0, k^0)] - 1/2[\rho V^\rho(k^1(\rho)) + \rho V^\rho(k^0)]\} = \rho[u(k^0(\rho), k^1(\rho)) - (u(k^0, k^1(\rho)) + u(k^0, k^0))/2 + \rho V^\rho(k^1(\rho)) - \rho V^\rho(k^1(\rho))/2 - \rho V(k^0)/2]$ となり、左辺 ≥ 0 なので、 $(0 \leq) G_0(k(\rho), k^0) \leq u(k^0(\rho), k^1(\rho)) - (u(k^0, k^1(\rho)) + u(k^0, k^0))/2 + \rho V^\rho(k^1(\rho)) - \rho(V^\rho(k^1(\rho)) + \rho V^\rho(k^0))/2$ となる。 $k^0 \in \bar{D}$ で、補題 14 によって $((k^0, k^0) \in) \tilde{\Delta}$ はコンパクトであるが、その証明の直ぐ後で示したように、 $\tilde{\Delta}$ にはそれをその内部に含んでしかも D の内部に属しているようなコンパクト集合 $\hat{\Delta}$ が存在しているので、 u の凹性によって D の内部で u の連続性が成立する事より、 u は $\hat{\Delta}$ 上で一様連続になる。すると、 $(k^0, k^1(\rho))$ が (k^0, k^0) に十分に近ければ、 $(k^0 + k^0)/2, (k^1(\rho) + k^0)/2$ も k^0 に十分に近くなって $(k^0, k^1(\rho))$ も $((k^0 + k^0)/2, (k^1(\rho) + k^0)/2)$ も $\hat{\Delta}$ に属し、上記の式の右辺の $u((k^0 + k^0)/2, (k^1(\rho) + k^0)/2) - (u(k^0, k^1(\rho)) + u(k^0, k^0))/2$ は十分に小さくなる。また、 k^0 を初期資本ストックとした時の ρ の下での最適経路を $k'(\rho) = \{k^t(\rho)\}_{t=0}^{\infty}$ として、 $(k^0, k^1(\rho)) \rightarrow (k^0, k^0)$ となる時に $V^\rho(k^1(\rho)) \rightarrow V^\rho(k^0)$ となれば、 $k^0 = k^0$ とすると $(k^0, k^1(\rho))$ が (k^0, k^0) に十分に近ければ、 $V^\rho(k^1(\rho))$ も $V^\rho(k^0)$ に十分に近くなり、 $\rho V^\rho((k^1(\rho) + k^0)/2) - \rho(V^\rho(k^1(\rho)) + V^\rho(k^0))/2$ も十分に $\rho V^\rho((k^1(\rho) + k^0)/2) - \rho(V^\rho(k^0) + V^\rho(k^0))/2 = \rho V^\rho((k^1(\rho) + k^0)/2) - \rho V^\rho(k^0)$ に近くなる。そして、 $k^1(\rho)$ が k^0 に到達可能な事と $V^\rho(\cdot)$ の凹性より、 $V^\rho((k^1(\rho) + k^0)/2)$ も $V^\rho(k^0)$ に十分に近くなり、結局、上の式の右辺の $\rho V^\rho((k^1(\rho) + k^0)/2) - \rho(V^\rho(k^1(\rho)) + V^\rho(k^0))/2$ も 0 に近くなる。したがって、 (k^0, k^0) に近い $(k^0(=k^0), k^1(\rho))$ に対して $G_0(\geq 0)$ も十分に小さくなる。

そこで k^0 を初期資本ストックとした時の ρ の下での最適経路を $k'(\rho) = \{k^t(\rho)\}_{t=0}^{\infty}$ として、 $(k^0, k^1(\rho))$ が (k^0, k^0) に十分に近い時に $V^\rho(k^1(\rho))$ も $V^\rho(k^0)$ に十分に近い事を示す。補題 12 と 14 から k^0 は $\bar{\rho} \leq \rho \leq 1$ に対して一様に拡張的なので、 $\bar{\rho} \leq \rho \leq 1$ となる ρ に対して、 k^0 の拡張可能性と自由処分より k^0 に近い $k^1(\rho)$ に対して $(k^0, k^1(\rho)) \in D$ が一様に成立する。すると、 $(k^0, k^1(\rho)) \in D$ より $k^1(\rho)$ は k^0 からの一つの実現可能経路の $t=1$ の値であり、 k^0 は ρ -割引最適定常経路なので、 $u(k^0, k^0) + \rho V^\rho(k^0) \geq u(k^0, k^1(\rho)) + \rho V^\rho(k^1(\rho))$ となつて、 $V^\rho(k^1(\rho)) - V^\rho(k^0) \leq (u(k^0, k^0) - u(k^0, k^1(\rho)))/\rho$ となる。したがって、任意の $\delta > 0$ に対して、 $\bar{\rho} \leq \rho \leq 1$ となる任意の ρ と $(k^0, k^1(\rho))$ が (k^0, k^0) に近くなるような任意の k^0 に対して、 $(k^0, k^1(\rho)) \in \hat{\Delta}, (k^0, k^0) \in \hat{\Delta}$ となるので、 u の $\hat{\Delta}$ 上での一様連続性から $V^\rho(k^1(\rho)) \leq V^\rho(k^0) + \delta$ となる。ところで、 $(k^0, k^1(\rho))$ が $(k^0, k^0) \in \tilde{\Delta}$ に十分に近いので $(k^0, k^1(\rho))$ は $\hat{\Delta}$ に属しているが、補題 14 の証明の後で述べたように、 $\hat{\Delta}$ 上では一様に拡張可能で $(k^0, k^1(\rho) + \eta e) \in D$ であり、 k^0 が $k^1(\rho)$ に十分に近いので、場合によっては自由処分を使用する事によって、 k^0 は k^0 から到達可能となつて $(k^0, k^0) \in D$ となる。すると、 $(k^0, k^0) \in D$ より k^0 は k^0 からの一つの実現可能経路の

$t = 1$ の値であり、一方 $k^{1'}(\rho)$ は k^0 からの最適定常経路 $t = 1$ の値なので、 $u(k^0, k^{1'}(\rho)) + \rho V^0(k^{1'}(\rho)) \geq u(k^0, k^0) + \rho V^0(k^0)$ となって、 $\rho V^0(k^0) - \rho V^0(k^{1'}(\rho)) \leq u(k^0, k^{1'}(\rho)) - u(k^0, k^0)$ となる。故に任意の $\delta > 0$ に対して、 $\bar{\rho} \leq \rho \leq 1$ となる任意の ρ と $(k^0, k^{1'}(\rho))$ が (k^0, k^0) に近くなるような任意の k^0 に対して、 u の $\hat{\Delta}$ 上での一様連続性から $V^0(k^0) - V^0(k^{1'}(\rho)) \leq (u(k^0, k^{1'}(\rho)) - u(k^0, k^0)) / \rho \leq \delta$ となって $V^0(k^0) \leq V^0(k^{1'}(\rho)) + \delta$ が成立する。したがって、 $(k^0, k^{1'}(\rho))$ が (k^0, k^0) に十分に近いと、任意に指定された $\delta > 0$ に対して、 $|V^0(k^0) - V^0(k^{1'}(\rho))| \leq \delta$ であり、故に、必要であった $(k^0, k^{1'}(\rho)) \rightarrow (k^0, k^0) \Rightarrow V^0(k^{1'}(\rho)) \rightarrow V^0(k^0)$ が $\bar{\rho} \leq \rho \leq 1$ となる任意の ρ で一様に成立する。したがって、任意の $\delta > 0$ に対してある $\epsilon > 0$ が存在して $\bar{\rho} \leq \rho \leq 1$ となる ρ に対して一様に $\|(k^0, k^1(\rho)) - (k^0, k^0)\| \leq \epsilon \Rightarrow G_0(\mathbf{k}(\rho), k^0) < \delta$ となる。□

ここでは $G_0(\mathbf{k}(\rho), k^0)$ に対して $\|(k^0, k^1(\rho)) - (k^0, k^0)\| \leq \epsilon$ としていたが、 u の $\hat{\Delta}$ 上での一様連続性と $\hat{\Delta}$ 上での一様拡張可能性より $G_{t+1}(\mathbf{k}(\rho), k^0)$ に対しても $(k^0, k^1(\rho))$ の代わりに $(k^t(\rho), k^{t+1}(\rho))$ を使っても $\|(k^t(\rho), k^{t+1}(\rho)) - (k^0, k^0)\| \leq \epsilon$ とすれば議論をそのまま進める事が出来て、 $\mathbf{k}(\rho)$ が k^0 からの最適経路であれば、任意の $\delta > 0$ に対してある $\epsilon > 0$ が存在して $\|(k^t(\rho), k^{t+1}(\rho)) - (k^0, k^0)\| < \epsilon$ ならば、任意の $\rho \in (\bar{\rho}, 1)$ に対する全ての定常経路 k^0 に対して、一様に $G_{t+1}(\mathbf{k}(\rho), k^0) < \delta$ となる。

以上の準備の下で、一般既約型準定常的ラムゼーモデルにおける近傍ターンパイク定理を証明する。

定理 4 (近傍ターンパイク定理) 仮定 1''', 2, 3, 4', 5 をおく。 $k^t = k^0, t = 0, 1, \dots$, となる $\mathbf{k}^0 = \{k^t\}_{t=0}^\infty$ を $\bar{\rho} \leq \rho \leq 1$ に対する ρ -割引最適定常経路とする。 x を充分的と仮定する。その時、 $\mathbf{k}(\rho) = \{k^t(\rho)\}_{t=0}^\infty$ が $k^0 = x$ からの最適経路であれば、任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\rho_\epsilon > 0$ と T_ϵ が存在して、任意の $t > T_\epsilon$ と任意の $\rho \in (\rho_\epsilon, 1]$ に対して $\|k^t(\rho) - k^0\| < \epsilon$ となる。

証明. まず、 $g_t(\mathbf{k}(\rho), k^0) \geq 0$ であるが、 $g_t(\mathbf{k}(\rho), k^0) = u(k^{t-1}(\rho), k^t(\rho)) - 1/2(u(k^{t-1}(\rho), k^t(\rho)) + u(k^0, k^0)) = 0$ ならば $(k^{t-1}(\rho), k^t(\rho)) = (k^0, k^0)$ となるので、 $G_0(\mathbf{k}(\rho), k^0) = \sum_{t=1}^\infty \rho^t g_t(k(\rho), k^0) = 0$ であれば、 $g_t(k(\rho), k^0) = 0, t = 0, 1, \dots$ となって、 $(k^{t-1}(\rho), k^t(\rho)) = (k^0, k^0)$, $t = 1, 2, \dots$ となり、 $k^t(\rho) = k^0, t = 1, 2, \dots$ となる。したがって、この場合は k_0 からの最適経路 $\mathbf{k}(\rho) = (k^t(\rho))_{t=0}^\infty$ が $k^t(\rho) = k^0, t = 1, 2, \dots$ となっていて $k^t(\rho) \rightarrow k^0$ は自明であり、この時は $T(\epsilon, \rho) = 1$ とすればよいので、最初から $G_0(\mathbf{k}(\rho), k^0) > 0 \forall \rho \in [\bar{\rho}, 1]$ としておく。

仮定 1''' の $\bar{\Delta}$ 上での u の一様強凹性から、所与の ϵ に対してある小さい η が存在して、全ての $\rho \in [\bar{\rho}, 1]$ の時の k^0 に対して、 $\|(k^{t+1}(\rho), k^{t+2}(\rho)) - (k^0, k^0)\| > \epsilon$ ならば一様に $g_{t+2} = u(k^{t+1}(\rho), k^{t+2}(\rho)) - 1/2(u(k^{t+1}(\rho), k^{t+2}(\rho)) + u(k^0, k^0)) \geq (\bar{\rho})^{-2}\eta \geq \rho^{-2}\eta$ と出来る。そして、定義より $g_{t+1+r}(\mathbf{k}(\rho), k^0) \geq 0$ なので、 $G_{t+1} = \sum_{r=1}^\infty \rho^r g_{t+1+r}(\mathbf{k}(\rho), k^0) \geq \rho g_{t+2}$ であり、結局、所与の ϵ に対してある小さい η が存在して、 $\|(k^{t+1}(\rho), k^{t+2}(\rho)) - (k^0, k^0)\| > \epsilon$ ならば、全ての $\rho \in [\bar{\rho}, 1]$ の時の k^0 に対して一様に $G_{t+1} \geq \rho g_{t+2} \geq \rho^{-1}\eta$ となる。ところで、任意 $\rho \in (\bar{\rho}, 1)$ に対して (*) から $G_{t+1} - G_t \leq (\rho^{-1} - 1)G_t - g_{t+1}$ となるが、 u の凹性から $g_{t+1} \geq 0$ なので、 $G_{t+1} \leq \rho^{-1}G_t - g_{t+1} \leq \rho^{-1}G_t$ となり、故に、任意 $\rho \in (\bar{\rho}, 1)$ に対して $G_{t+1} \leq \rho^{-1}G_t$ となる。補題 17 の証明の直ぐ後で述べたように、 $\rho \in (\bar{\rho}, 1)$ を任意として、 $\eta > 0$ に対してある $\epsilon' > 0$ が存在して $\|(k^t(\rho), k^{t+1}(\rho)) - (k^0, k^0)\| > \epsilon'$ ならば、

$(\rho)) - (k^0, k^0) \| \leq \epsilon'$ ならば $G_t(\mathbf{k}(\rho), k^0) \leq \rho^{-1} G_t(\mathbf{k}(\rho), k^0) < \rho^{-1} \eta$ となるが, ここでもしも $\|(k^{t+1}(\rho), k^{t+2}(\rho)) - (k^0, k^0)\| > \epsilon$ ならば $G_{t+1}(\mathbf{k}(\rho), k^0) \geq \rho q_{t+2}(\mathbf{k}(\rho), \rho) \geq \rho^{-1} \eta$ となるので矛盾が起こる。したがって, もしも $(k^t(\rho), k^{t+1}(\rho))$ が (k^0, k^0) の ϵ' -近傍にあれば, $(k^{t+1}(\rho), k^{t+2}(\rho))$ は (k^0, k^0) の ϵ の範囲内になくてはならない。そして, この, “もしも $\|(k^t(\rho), k^{t+1}(\rho)) - (k^0, k^0)\| \leq \epsilon'$ であれば $\|(k^{t+1}(\rho), k^{t+2}(\rho)) - (k^0, k^0)\| \leq \epsilon$ となる” という議論は, 任意の t について $\|(k^t(\rho), k^{t+1}(\rho)) - (k^0, k^0)\| \leq \epsilon'$ であれば成り立つので, ここで補題 16 の訪問補題をこの ϵ' に対して適用すれば, ある t' とある $\rho' (\geq \bar{\rho})$ が存在して任意の $\rho \in (\rho', 1)$ に対して $\|(k^{t'}(\rho), k^{t'+1}(\rho)) - (k^0, k^0)\| \leq \epsilon'$ となり, 故に, $\|(k^{t'+1}(\rho), k^{t'+2}(\rho)) - (k^0, k^0)\| \leq \epsilon$ となる。

そして, $\rho \in (\rho', 1)$ に対して $\|(k^{t'+1}(\rho), k^{t'+2}(\rho)) - (k^0, k^0)\| \leq \epsilon'$ とあれば $\|(k^{t'+2}(\rho), k^{t'+3}(\rho)) - (k^0, k^0)\| \leq \epsilon$ となる。また, もしも $\|(k^{t'+1}(\rho), k^{t'+2}(\rho)) - (k^0, k^0)\| > \epsilon'$ であれば, 任意の $\rho \in (\bar{\rho}, 1]$ に対応する $k^0 \in \bar{\Delta}$ に対して, $\bar{\Delta}$ 上での u の一様強凹性からこの $\epsilon' > 0$ に対してある $\delta_{\epsilon'} > 0$ が存在して, $\|(k^{t'+1}(\rho), k^{t'+2}(\rho)) - (k^0, k^0)\| > \epsilon'$ ならば $g_{t'+2}(\mathbf{k}(\rho), k^0) > 2\delta_{\epsilon'}$ となる。そして, $\|(k^{t'}(\rho), k^{t'+1}(\rho)) - (k^0, k^0)\| \leq \epsilon'$ となっているので, $\rho \in (\rho', 1)$ に対しても $G_{t'+1}(\mathbf{k}(\rho), k^0) < \rho^{-1} \eta < (\bar{\rho})^{-1} \eta$ であり, この $\delta_{\epsilon'}$ に対して $\rho'' \in (\rho', 1)$ を選んで $((\rho'')^{-1} - 1)(\bar{\rho})^{-1} \eta < \delta_{\epsilon'}$ となるようにすると, $(k^{t'+1}(\rho), k^{t'+2}(\rho))$ が (k^0, k^0) から ϵ' の範囲内にない ρ の範囲を $(\rho'', 1)$ から $(\rho'', 1)$ に制限する事より, $\|(k^{t'+1}(\rho), k^{t'+2}(\rho)) - (k^0, k^0)\| > \epsilon'$ となる $\rho \in (\rho'', 1)$ に対して $(\rho^{-1} - 1)G_{t'+1}(\mathbf{k}(\rho), k^0) < (\rho^{-1} - 1)(\bar{\rho})^{-1} \eta < \delta_{\epsilon'}$ となる。故に, このような $\rho \in (\rho'', 1)$ に対して $G_{t'+2} - G_{t'+1} = (\rho^{-1} - 1)G_{t'+1} - g_{t'+2} < \delta_{\epsilon'} - 2\delta_{\epsilon'} = -\delta_{\epsilon'}$ となって $G_{t'+2} < G_{t'+1}$ である。そして, $\rho \in (\rho'', 1)$ に対して $\|(k^{t'}(\rho), k^{t'+1}(\rho)) - (k^0, k^0)\| \leq \epsilon'$ となっているので, $G_{t'+1}(\mathbf{k}(\rho), k^0) < \rho^{-1} \eta$ であるが, $\|(k^{t'+1}(\rho), k^{t'+2}(\rho)) - (k^0, k^0)\| > \epsilon'$ であれば $G_{t'+2} - G_{t'+1} < -\delta_{\epsilon'} < 0$ となっているので, このような $\rho \in (\rho'', 1)$ に対しても $G_{t'+2}(\mathbf{k}(\rho), k^0) < G_{t'+1}(\mathbf{k}(\rho), k^0) < \rho^{-1} \eta$ となる。すると, $\rho \in (\bar{\rho}, 1]$ となる $k^0 \in \bar{\Delta}$ に対して, $\bar{\Delta}$ 上での u の一様強凹性から, $\|(k^{t'+2}(\rho), k^{t'+3}(\rho)) - (k^0, k^0)\| > \epsilon$ ならば $G_{t'+2}(\mathbf{k}(\rho), k^0) \geq \rho g_{t'+3}(\mathbf{k}(\rho), k^0) \geq \rho^{-1} \eta$ となるので, $\|(k^{t'+2}(\rho), k^{t'+3}(\rho)) - (k^0, k^0)\| > \epsilon$ となる事は出来ず, $\|(k^{t'+2}(\rho), k^{t'+3}(\rho)) - (k^0, k^0)\| \leq \epsilon$ となる。したがって, $\|(k^{t'+1}(\rho), k^{t'+2}(\rho)) - (k^0, k^0)\| > \epsilon'$ であっても $\|(k^{t'+2}(\rho), k^{t'+3}(\rho)) - (k^0, k^0)\| \leq \epsilon$ となる。

そして, $\|(k^{t'+2}(\rho), k^{t'+3}(\rho)) - (k^0, k^0)\| \leq \epsilon'$ とあれば $\|(k^{t'+3}(\rho), k^{t'+4}(\rho)) - (k^0, k^0)\| < \epsilon$ となる。もしも $\|(k^{t'+2}(\rho), k^{t'+3}(\rho)) - (k^0, k^0)\| > \epsilon'$ であれば, $\rho \in (\bar{\rho}, 1]$ となる $k^0 (\in \bar{\Delta})$ に対して, $\bar{\Delta}$ 上での u の一様強凹性から $g_{t'+3}(\mathbf{k}(\rho), k^0) > 2\delta_{\epsilon'}$ となる。そして, このような $\rho \in (\rho'', 1)$ に対して $\|(k^{t'+1}(\rho), k^{t'+2}(\rho)) - (k^0, k^0)\| \leq \epsilon'$ でも $> \epsilon'$ でも, 既に上で示した事から $G_{t'+2}(\mathbf{k}(\rho), k^0) < \rho^{-1} \eta < (\bar{\rho})^{-1} \eta$ であり, $t'+1, t'+2$ の時と同様に, このような $\rho \in (\rho'', 1)$ に対して $(\rho^{-1} - 1)G_{t'+2}(\mathbf{k}(\rho), k^0) < (\rho^{-1} - 1)\rho^{-1} \eta < \delta_{\epsilon'}$ となる。故に, $G_{t'+3} - G_{t'+2} = (\rho^{-1} - 1)G_{t'+2} - g_{t'+3} < \delta_{\epsilon'} - 2\delta_{\epsilon'} = -\delta_{\epsilon'}$ となって $G_{t'+3} < G_{t'+2} < \rho^{-1} \eta$ である。つまり, $\|(k^{t'+2}(\rho), k^{t'+3}(\rho)) - (k^0, k^0)\| > \epsilon'$ であればこのような $\rho \in (\rho'', 1)$ に対しても $G_{t'+3}(\mathbf{k}(\rho), k^0) < G_{t'+2}(\mathbf{k}(\rho), k^0) < \rho^{-1} \eta$ となる。そして, $\rho \in (\bar{\rho}, 1]$ に対応する $k^0 \in \bar{\Delta}$ に対して, $\bar{\Delta}$ 上での u の一様強凹性から, $\|(k^{t'+3}(\rho), k^{t'+4}(\rho)) - (k^0, k^0)\| > \epsilon$ ならば $G_{t'+3}(\mathbf{k}(\rho), k^0) \geq \rho g_{t'+4}(\mathbf{k}(\rho), k^0) \geq \rho^{-1} \eta$ となるので, $\|(k^{t'+3}(\rho), k^{t'+4}(\rho)) - (k^0, k^0)\| > \epsilon$ となる事は出来ず, $\|(k^{t'+3}(\rho), k^{t'+4}(\rho)) - (k^0, k^0)\| \leq \epsilon$ となる。したがって, $\|(k^{t'+2}(\rho), k^{t'+3}(\rho)) - (k^0, k^0)\| > \epsilon'$ であっても $\|(k^{t'+3}(\rho), k^{t'+4}(\rho)) - (k^0, k^0)\| \leq \epsilon$ となる。この議論では, ρ の範囲を $(\rho'', 1)$ に制限してからは更に変更する必要はな

いので、これ以降もこの議論をそのまま帰納的に適用する事ができる。すると、訪問補題によって、 $t = t'$ において $\|(k^{t'}(\rho), k^{t'+1}(\rho)) - (k^0, k^0)\| < \epsilon', \forall \rho \in (\rho', 1)$ となれば、 $r = 1, 2, \dots$ にたいして $\|(k^{t'+r}(\rho), k^{t'+r+1}(\rho)) - (k^0, k^0)\| < \epsilon, \forall \rho \in (\rho'', 1)$, となり、故に、任意の $\rho \in (\rho'', 1)$ において、 $k(\rho)$ は $t = t' + 1$ 以降全ての期間において (k^0, k^0) の ϵ -近傍に属する事になって、近傍ターンパイク定理が成立する。もちろん $\rho = 1$ のケースでは、最適経路は良好な経路で良好な経路は定常最適経路 k^1 に収束していくので、 $\rho = 1$ を $\rho \in (\rho'', 1)$ に加えて $\rho \in (\rho'', 1]$ とできる。□

上記の証明における定数の選択は、最初が ϵ 、次が η 、そして最後が ϵ' であり、この ϵ' に訪問補題を適用して $(k^{t'}(\rho), k^{t'+1}(\rho))$ が (k^0, k^0) の ϵ' -近傍に最初に入ってから、それ以降の全ての $(k^t(\rho), k^{t+1}(\rho))$ が任意の $\rho \in (\rho'', 1)$ に対応する (k^0, k^0) の ϵ -近傍に属する事になって、これらの選択は整合的になされている。ポイントは訪問補題を適用するのが最初の ϵ ではなくて、2 番目の ϵ' であるという事である。

なお、補題 11 と仮定 5 に関連して述べたように、 u を D 上で閉かつ強凹と仮定しても、十分に大きな範囲に D を制限すればそこで u の一様強凹性が成立する。ここでその事を示しておく。

補題 18 仮定 5 の下では、 u が強凹かつ閉であれば、 $\tilde{\Delta}$ を含む十分に大きい範囲において u は一様強凹である。

証明. $\tilde{\Delta}$ をその内部に含む十分に大きい有界閉凸集合 B に対して $B' = B \cap D$ として、 B' 上で u が一様強凹でないとすると、ある $\varepsilon > 0$ が存在して $\|(z^m, w^m) - (k^m, k^m)\| \geq \varepsilon$ となる $(z^m, w^m) \in B'$ と $k^m \in \tilde{\Delta}$ に対して、 $u(((z^m, w^m) + (k^m, k^m))/2) - (u(z^m, w^m) + u(k^m, k^m))/2 (\geq 0) \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$) となる。 $\tilde{\Delta}$ がコンパクトである事と B が有界閉である事から $(z^m, w^m) \rightarrow (z, w) \in B, k^m \rightarrow k, k \in \tilde{\Delta}$ としてよく、 $\|(z, w) - (k, k)\| \geq \varepsilon$ となって $(z, w) \neq (k, k)$ である。また、仮定 5 と凸集合の性質より $((z^m, w^m) + (k^m, k^m))/2 \in (\text{int}(D) \cap B) \subset (D \cap B)$ であり、補題 2 の後に述べた事より $u(((z^m, w^m) + (k^m, k^m))/2)$ は上に有界である。また、仮定 5 より $((k^m, k^m) \in) \tilde{\Delta} \subset (\text{int}(D) \cap B) \subset (D \cap B)$ なので同様に補題 2 より $u(k^m, k^m)$ も上に有界である。今、 $(z, w) \in \text{bd}(D) \setminus D$ とすると、 u の閉性から $u(z^m, w^m) \rightarrow -\infty$ となって $u(k^m, k^m)$ の上方有界性より $-(u(z^m, w^m) + u(k^m, k^m))/2 \rightarrow +\infty$ となるが、 $u(((z^m, w^m) + (k^m, k^m))/2)$ は上に有界なので、 $m \rightarrow \infty$ とすると $u(((z^m, w^m) + (k^m, k^m))/2) - (u(z^m, w^m) + u(k^m, k^m))/2 \rightarrow \infty$ となって前提の $\rightarrow 0$ に矛盾し、 $(z, w) \in \text{bd}(D) \setminus D$ となる事はなく、 $(z, w) \in (\text{bd}(D) \cap D)$ か $(z, w) \in \text{int}(D)$ となって、 $(z, w) \in D$ となる。すると、 $((z^m, w^m) + (k^m, k^m))/2 \rightarrow ((z, w) + (k, k))/2 \in (\text{int}(D) \cap B) \subset (D \cap B)$ となるので、 u の凹性による u の $\text{int}(D)$ 上での連続性より $u(((z^m, w^m) + (k^m, k^m))/2) \rightarrow u((z, w) + (k, k))/2$ となる。また、仮定 5 より $((k^m, k^m) \in) \tilde{\Delta} \subset \text{int}(D)$ なので同様に u の $\text{int}(D)$ 上での連続性より $u(k^m, k^m) \rightarrow u(k, k)$ となる。更に、 u の閉凹性による D 上での u の上半連続性より $\limsup_{m \rightarrow \infty} u(z^m, w^m) \leq u(z, w)$ となる。すると、 $u(((z^m, w^m) + (k^m, k^m))/2) - (u(z^m, w^m) + u(k^m, k^m))/2 (\geq 0) \rightarrow 0$ より、 $0 = u(((z, w) + (k, k))/2) - (\limsup_{m \rightarrow \infty} u(z^m, w^m) + u(k, k))/2 \geq u(((z, w) + (k, k))/2) - (u(z, w) + u(k, k))/2$ となるが、 u の強凹性と $(z, w) \neq (k, k)$ より $u(((z, w) + (k, k))/2) - (u(z, w) + u(k, k))/2 > 0$ となるので矛盾が起こる。故に、 u が閉で強凹であれば、 D を $\tilde{\Delta}$ を含む任意の十分に大きい (凸な) 範囲で u は一様強凹となる。□

これより、 u を D 上で閉かつ強凹と仮定しても、 k_0 が所与であれば補題 2 より実現可能な経路は十分に大きい範囲（原点からのノルムが $\max(\zeta, \|k^0\|)$ より大きくする）に収まるので、補題 11 を考慮してその範囲の内部に $\tilde{\Delta}$ を含むようにしておけば、その範囲での u の一様強凹性が成立する事になる。すると、 k^0 は所与なので仮定 1''' の u の一様強凹性を仮定 1'' の u の閉強凹性へ変更でき、 u を D 上で閉かつ強凹と変更しても定理 3 の近傍ターンパイク定理は成立して、次の結果が得られる。

系 3 仮定 1'', 2, 3, 4', 5 をおく。 $k^0 = \{k^t\}_{t=0}^\infty, k^t = k^0, t = 0, 1, \dots$ を $\bar{\rho} \leq \rho \leq 1$ に対する ρ -割引最適定常経路とする。 x を充分的と仮定する。その時、 $k(\rho) = \{k^t(\rho)\}_{t=0}^\infty$ が $k^0 = x$ からの最適経路であれば、任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\rho_\epsilon > 0$ と T_ϵ が存在して任意の $t > T_\epsilon$ と任意の $\rho \in (\rho_\epsilon, 1]$ に対して $\|k^t(\rho) - k^0\| < \epsilon$ となる。

u のヘッセ行列に対する負値定符号性に関する条件を加えれば、マッケンジー (1982, 86) で示されたように、最適経路 $k(\rho)$ の定常資本ストック k^0 への漸近的な収束という漸近ターンパイク定理も示すこともできる²⁷⁾。

6 終わりに

将来効用の割引のない定常的なケースでは、効用関数の強凹性を利用する事で良好な経路が、故に最適経路が、最大効用維持可能資本ストック $\bar{k}$ に収束しに行くという漸近ターンパイク定理の成立を示してから、最適経路の存在を示したのであるが、将来効用の割引のある準定常的なケースでは、 $\sum_{t=1}^\infty \rho^{t-1} u(k^{t-1}, k^t)$ が収束級数であるという事によって、直接的にその（座標別収束位相に関する）上半連続性が確立できるので、最適経路が ρ -割引最適定常資本ストックに収束しに行くというターンパイク定理を利用する事なく、最適経路の成立を示す事が出来る。将来効用を割引くか割引かないかという事によって、証明にこのような差異が発生するというのは誠に興味深い。

将来効用の割引のある準定常的なケースでは、ここでは $\sum_{t=1}^\infty \rho^t u(k^{t-1}, k^t)$ という時間分離加法的な効用関数を利用したが、これを一般化した再帰的選好 (*Recursive Preference*) を用いても、ボイド (1990, 1996) やベッカー/ボイド (1997) で定常的最適経路を含めた最適経路の存在やターンパイク定理が示されているので、その議論も別の機会に行いたいと考えている。また、マッケンジー (2002, 第 7 章) の最終節は、ビューレー (1982) によって始められた競争均衡とターンパイク定理の結合という大変に興味深い問題を扱っているの、マッケンジー (2002, 第 7 章) のこの部分の検討についても別の機会に行いたいと考えている。

27) ダナル・ヴァン (2003, 第 8 章) での、効用関数のヘッセ行列の負値定符号性の下で示された 1 財モデルにおける準定常型ラムゼーモデルにおける漸近ターンパイク定理は、大変に分かり易い記述でなされているので、それをマッケンジー (2002, 第 7 章) や本稿のような多部門モデルで考察する事については、別の機会に行う事にする。

謝辞

内田先生には、著者の北海道大学大学院経済学研究科赴任以来、様々な機会でお世話になった。ここに記してお礼申し上げる。なお、本稿の内容については、ロチェスター大学経済学部のマッケンジー名誉教授との、教授の著書である『*Classical General Equilibrium Theory*』に関して様々な機会に行った討論に負っている。ここに記してマッケンジー教授に感謝申し上げ、本年1月で90歳になられた事にお祝い申し上げます。

参考文献

- [1] Becker, R.A (1980) : “On the long-run steady state in a simple dynamic model of equilibrium with heterogeneous households” *Quarterly Journal of Economics*, 95, pp.375-82
- [2] ———— . and J.H.Boyd III (1997) : *Capital Theory, Equilibrium Analysis and Recursive Utility*. Black-Well (Boston, MA, USA)
- [3] Bewley, T (1982) : “An integration of equilibrium theory and turnpike theory” *Journal of Mathematical Economics*, 10, pp.233-68
- [4] ———— (2007) : *General Equilibrium, Overlapping Generations Models, and Optimal Growth Theory*. Harvard University Press (Cambridge, MA, USA)
- [5] Boyd, J.H.III (1990) : “Recursive utility and the Ramsey problem” *Journal of Economic Theory*, 50, pp.326-45
- [6] Boyd, J.H.III (1996) : “The existence of steady states in multisector capital accumulation models” *Journal of Economic Theory*, 71, pp.289-97
- [7] Cass, D (1965) : “Optimum growth in an aggregate model of capital accumulation” *Review of Economic Studies*, 12, pp.233-40
- [8] Dana, R.A. and C. Le Van (2003) : *Dynamic Programming in Economics* Kluwer Academic Press (Boston, MA, USA)
- [9] ———— (2006) : “Optimal growth models without discounting” Ch.1 of *Handbook on Optimal Growth Vol.1 Discrete Time ed.by Dana et. al.* Springer (New York, NY, USA) pp.19-54
- [10] Epstein, L.G (1986) : “The global stability of efficient intertemporal allocations” *Econometrica*, 55, pp.329-56
- [11] Kahn, M.A. and T.Mitra (1986) : “On the existence of stationary optimal stock for a multi-sector Economy: A primal approach” *Journal of Economic Theory*, 40, pp.319-28
- [12] Koopmans, T (1965) : “On the concept of optimal economic growth” in *Pontificiae Academiae Scientiarum Scripta Varia*, No.23, Amsterdam, North-Holland
- [13] 久保田肇 (2008) : 「既約型一般ラムゼー成長モデルにおける最適経路の存在 - 将来効用の非割引のケース」『彦根論叢』(滋賀大学) 第372号 pp. 49-76
- [14] Le Van, C (2006) : “Optimal growth models with discounted return” Ch.2 of *Handbook on Optimal Growth Vol.1 Discrete Time ed.by Dana et. al.* Springer (New York, NY, USA) pp.19-54
- [15] McKenzie, L. W. (1982) : “A primal route to the turnpike and Liapounov stability” *Journal of Economic Theory*, 27, pp.194-209
- [16] ———— . (1983) : “Turnpike theory, discounted utility, and the von Neumann facet” *Journal of Economic Theory*, 30, pp.330-52
- [17] ———— . (1986) : “Optimal economic growth, turnpike theorems, and comparative dynamics”

- Ch.26 of *Handbook of Mathematical Economics Vol.III* ed.by Arrow K.J. and M.D. Interigator. North-Holland (Amsterdam, Holland) pp.1281-358
- [18] ————. (1987) : “Turnpike theory” in *The New Palgrave: A Dictionay of Economics Vol.IV* ed.by Eatwell et.al. Macmillan Press (London, England) pp.712-20
- [19] ————. (2002) : *Classical General Equilibrium Theory* MIT Press (Boston, MA, USA)
- [20] 西村和雄／矢野誠 (2007) : 『マクロ経済動学』 岩波書店
- [21] Ramsey, F.A. (1928) : “A mathematical theory of saving” *Economic Journal*, 38, pp.543-59
- [22] Scheinkman, J. (1976) : “On optimal steady state of n-sector growth models when utility is discounted” *Journal of Economic Theory*, 12, pp.11-20
- [23] Sutherland, W.A. (1970) : “On optimal development in multi-sectoral economy: the discounted case” *Review of Economic Studies*, 37, pp.585-9
- [24] Weitzman, W.L. (1973) : “Duality theory for infinite horizon convex models” *Management Science*, 19, pp.783-9
- [25] Yano, M (1984a) : “Competitive equilibria on turnpikes in a McKenzie economy I : a neighborhood turnpike theorem” *International Economic Review*, 25, pp.695-718
- [26] ————. (1985) : “Competitive equilibria on turnpikes in a McKenzie economy II : an asymptotic turnpike theorem” *International Economic Review*, 26, pp.661-70
- [27] 矢野誠 (1994) : 「一般均衡理論の動学的展開」 岩井克人／伊藤元重編著 『現代の経済理論』 東京大学出版会