情報理論 配布資料 #10

担当：井上 純一 (情報エレクトロニクス系棟 8-13)

平成 16 年 6 月 28 日

演習問題 9 の解答例

(1) $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$.
(2) $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{v}$.
(3) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ に対し, ハミング距離 d は次の三角不等式：

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \quad \geq \quad d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \tag{1}$$

を満たす. ここで

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= w(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \\ &= w(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \qquad (2) \\ d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) &= w(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}) \\ &= w(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) \qquad (3) \\ d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) &= w(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}) \\ &= w(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}) \qquad (4) \\ & \qquad (5) \end{aligned}$$

が成り立つ. 従って (1) 式の三角不等式はハミング重みを用いて

$$w(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + w(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) \quad \geq \quad w(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}) \tag{6}$$

と書き直すことができる. ところで

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{u} \qquad (7) \\ \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} &= \boldsymbol{v} \qquad (8) \end{aligned}$$

とおき, (7)(8) 式の辺々を足してみると

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}) \quad = \quad \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \tag{9}$$

つまり

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} \quad = \quad \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \tag{10}$$

が得られるから, 結局 (6) の不等式は

$$w(\boldsymbol{u}) + w(\boldsymbol{v}) \quad \geq \quad w(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \tag{11}$$

となり, 題意が示された.

(4) 例えば 1 ビット誤りベクトル $\boldsymbol{z} = (1,0,0,0,0,0)$ に対し, $\boldsymbol{s}_z = \boldsymbol{z}\boldsymbol{H}^T$ を計算すると

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{s}_z &= \boldsymbol{z}\boldsymbol{H}^T \\
&= (1,0,0,0,0,0)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= (0,1,1)
\end{aligned} \tag{12}$$

となるから, 1 ビット誤りベクトルの復号表は

$\boldsymbol{z}$ (1 ビット誤りベクトル)	$\boldsymbol{s}_z = \boldsymbol{z}\boldsymbol{H}^T$
(1,0,0,0,0,0)	(0,1,1)
(0,1,0,0,0,0)	(1,0,1)
(0,0,1,0,0,0)	(1,1,0)
(0,0,0,1,0,0)	(1,0,0)
(0,0,0,0,1,0)	(0,1,0)
(0,0,0,0,0,1)	(0,0,1)

となる. また, 上記表から全ての 1 ビット誤りベクトルには異なる $\boldsymbol{s}_z$ が対応しているので, この線形符号は 1 ビット誤り訂正符号である.

(5) 送信ベクトル $\boldsymbol{r} = (0,1,0,1,1,0)$ に対し $\boldsymbol{s}_r = \boldsymbol{r}\boldsymbol{H}^T$ は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{s}_r &= \boldsymbol{r}\boldsymbol{H}^T \\
&= (0,1,0,1,1,0)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= (0,1,1)
\end{aligned} \tag{13}$$

となる. 従って, 問題 (4) で求めた復号表から該当する 1 ビット誤りベクトルを探すと, これは $\boldsymbol{z} = (1,0,0,0,0,0)$ であり, 送信ベクトルの 1 ビット目に誤りがあることがわかる. また, 送信ベクトル $\boldsymbol{u}$ は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{r} + \boldsymbol{z} \\
&= (1,1,0,1,1,0)
\end{aligned} \tag{14}$$

である. よって求める答えは

$$\boldsymbol{u} = (1,1,0,1,1,0) \tag{15}$$

$$\boldsymbol{z} = (1,0,0,0,0,0) \tag{16}$$

である.

(6) 誤りなし確率は全ビットが誤りなしに送られる場合と, 1 ビット誤りが全 6 ビットの中の何処か 1 箇所にある場合であるから, これと余事象の確率を考えれば誤り確率 p_{z} は

$$p_{\mathrm{z}} = 1-(1-p)^6-6p(1-p)^5 \tag{17}$$

となる.

演習問題 8 に関するコメント

(今回は忙しくて時間がとれなかったので簡単に) 前回も述べましたが, 講義内容と演習内容が一致していなかったこともあり, 正答率は高くありませんでした. 配布した解答例等を読んでおいてください. なお, この問題で扱ったような「加法的雑音」の場合には相互情報量は入力分布に依らなくなります (相互情報量最大 = エントロピー最大).

演習問題 10

$\boldsymbol{F}^2$ 上の巡回符号に関して, 以下の小問 (1)-(5) に答えよ.

(1) $\boldsymbol{F}^2$ 上の多項式 : $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ について, 方程式 $f(x)=0$ の根のべき乗 α^i とその多項式表現を教科書 p.80 表 5.3 にならって求めよ.
(2) (1) の $f(x)$ を生成多項式とする巡回符号のパリティ検査行列を求め, 全ての符号語を列記せよ.
(3) (2) の巡回符号の符号語を作るシフトレジスタによる回路を作成せよ.
(4) $c(x)=(x^2+x)g(x)$ なる符号語を送信したとき, 2 ビット目に誤りを発生させるベクトル $e(x)$ が加わり

$$\overline{c}(x) = c(x)+e(x)$$

を受信したとしょう. このとき, シンドローム多項式 $s(x)$ を求めよ.
(5) (4) でのシンドローム多項式を具体的に求めるためのシフトレジスタによる回路を作成せよ.

注意 7/5,7/12 は休講ですので, **今回のレポート締め切りは 7/26 の講義開始時まで**とします.