情報理論 配布資料 #11

担当：井上 純一 (情報エレクトロニクス系棟 8-13)

平成 16 年 7 月 26 日

演習問題 10 の解答例

(1) $f(x)=0$ の根の冪乗の多項式表現を書き下していってみると

$$
\begin{aligned}
\alpha^0 &= 1 \\
\alpha^1 &= \alpha \\
\alpha^2 &= \alpha^2 \\
\alpha^3 &= \alpha^3 \\
\alpha^4 &= \alpha^3+\alpha^2+\alpha+1 \\
\alpha^5 &= \alpha(\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1) \\
&= \alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha \\
&- (\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)+\alpha^3+\alpha^2+\alpha = 2\alpha^3+2\alpha^2+2\alpha+1=1
\end{aligned}
$$

となるから周期 5 であり, 教科書 p.80 表 5.3 にならって表にすると

i	α^3	α^2	α	1
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	1	0	0	0
4	1	1	1	1

となる.

(2) 前問 (1) の結果から, パリティ検査行列 $\boldsymbol{H}$ は

$$
\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}
$$

で与えられるから, $\boldsymbol{x} \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ と置けば, ベクトル $\boldsymbol{x}$ は

$$
\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}^T = \boldsymbol{0} \tag{2}
$$

つまり

$$
x_1 = x_5
$$

$$
\begin{aligned}
x_2 &= x_5 \\
x_3 &= x_5 \\
x_4 &= x_5
\end{aligned}
$$

を満たすべきである. 従って, 求めるべき符号は全部で 2 つであり, (11111), 及び, (00000) である.

(3) まず, 求めるシフトレジスタ回路を図 1 に示す. このシフトレジスタ回路の動作を実際に確認してみ

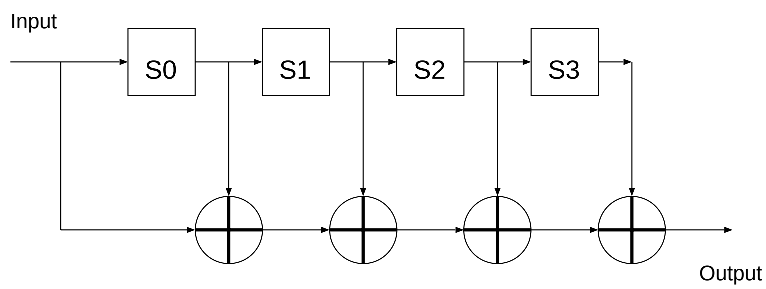

図 1: 任意の符号語 $b(x)f(x) = b(x)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ を作るシフトレジスタ回路.

よう.
まずは試しに $b(x) = x^3 + x^2$ と選んで $b(x)f(x)$ を $\boldsymbol{F}_2$ 上において予め手で計算しておくと

$$
b(x)f(x) = (x^3 + x^2)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^7 + x^2 \tag{3}
$$

である. この結果と図 1 に描いたシフトレジスタ回路の出力結果を比較する. $b(x)f(x) = X_0x^7 + X_1x^6 + X_2x^5 + X_3x^4 + X_4x^3 + X_5x^2 + X_6x + X_7$ とおけば, 図 1 に描かれたシフトレジスタ回路の出力 $X_0, X_1, \cdots$ としては

$$
(X_0X_1X_2X_3X_4X_5X_6X_7) = (10000100) \tag{4}
$$

となればよい. $b(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2$, $(a_0a_1a_2) = (110)$ を逐次, このシフトレジスタ回路に入力してみると (各レジスタの初期値は $S_0 = S_1 = S_2 = S_3 = 0$ とする. また, 以下の括弧内はその出力時点でのレジスタの内容を表す).

- $a_0 = 1$

$$
\begin{aligned}
X_0 &= a_0 + S_0 + S_1 + S_2 + S_3 \\
&= 1 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1, \quad (S_0 = 1, S_1 = S_2 = S_3 = 0)
\end{aligned}
$$

- $a_1 = 1$

$$
\begin{aligned}
X_1 &= a_1 + S_0 + S_1 + S_2 + S_3 \\
&= 1 + 1 + 0 + 0 + 0 = 0, \quad (S_0 = 1, S_1 = 1, S_2 = S_3 = 0)
\end{aligned}
$$

- $a_2 = 0$

$$
\begin{aligned}
X_2 &= a_2 + S_0 + S_1 + S_2 + S_3 \\
&= 0 + 1 + 1 + 0 + 0 = 0, \quad (S_0 = 0, S_1 = 1, S_2 = 1, S_3 = 0)
\end{aligned}
$$

- 入力ゼロ (i)

$$\begin{aligned} X_3 &= 0 + S_0 + S_1 + S_2 + S_3 \\ &= 0+0+1+1+0 = 0, \quad (S_0 = 0, S_1 = 0, S_2 = 1, S_3 = 1) \end{aligned}$$

- 入力ゼロ (ii)

$$\begin{aligned} X_4 &= 0 + S_0 + S_1 + S_2 + S_3 \\ &= 0+0+0+1+1 = 0, \quad (S_0 = S_1 = S_2 = 0, S_3 = 1) \end{aligned}$$

- 入力ゼロ (iii)

$$\begin{aligned} X_5 &= 0 + S_0 + S_1 + S_2 + S_3 \\ &= 0+0+0+0+1 = 1, \quad (S_0 = S_1 = S_2 = S_3 = 0) \end{aligned}$$

- 入力ゼロ (iv)

$$X_6 = 0, \quad (S_0 = S_1 = S_2 = S_3 = 0)$$

- 入力ゼロ (v)

$$X_7 = 0, \quad (S_0 = S_1 = S_2 = S_3 = 0)$$

となる. 従って, 結局, このシフトレジスタ回路の出力は

$$(X_0X_1X_2X_3X_4X_5X_6X_7) = (10000100) \tag{5}$$

となり, これは先に確認した「手計算」の結果と一致する. ちなみに, 入力, 及び, 各シフトレジスタから $\boldsymbol{F}_2$ 上の加算器への入力線がこの図 1 では 5 本あるが, これはこの問題の生成多項式が

$$f(x) = 1 \cdot x^4 + 1 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 1 \tag{6}$$

であり, 4 次以下のすべての x 冪がふくまれているので, 計 5 本の入力線が存在し, 左から, $x^4, x^3, \cdots$ に対応している. 教科書 p. 83 の図 5.2 は生成多項式

$$g(x) = \quad 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 1 \tag{7}$$

に対応するシフトレジスタ回路であるが, x^2 の係数がゼロ (x^2 が含まれない) なので, s_0, s_1 間の信号の加算器への入力線は存在しない (教科書にはこの点も含めたシフトレジスタによる掛け算回路の構成法が書かれていないのでこの点を確認しておくこと).

(4) まずは 2 ビット目に誤りを生じさせる多項式 $e(x)$ は $e(x) = x^2$ であるから, 受信多項式 $\overline{c}(x)$ は

$$\begin{aligned} \overline{c}(x) &= (x^2 + x)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) + x^2 \\ &= x^6 + x^2 + x \\ &\equiv x^2 \pmod{g(x)} \end{aligned} \tag{8}$$

従って, シンドローム多項式は $s(x) = x^2$ である.

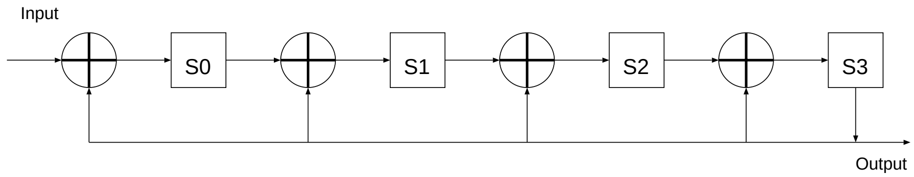

図 2: 受信多項式 $\overline{c}(x)$ を生成多項式 $g(x) = f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ で割るシフトレジスタ回路.

(5) 受信多項式 $\overline{c}(x)$ を生成多項式 $g(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ で割るためのシフトレジスタ回路は図 2 のようになる．このシフトレジスタ回路の動作を確認するために, $\overline{c}(x) = x^6 + x^2 + x$ に対して, $a_0x^6 + a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + a_4x^2 + a_5x + a_6$, とおき, この回路に逐次 $(a_0a_1a_2a_3a_4a_5a_6) = (1000110)$ を代入していく．シフトレジスタの内容は初期値として $S_0 = S_1 = S_2 = S_3 = 0$ とする．

- $(a_0 = 1)$ $S_0 = 1, S_1 = S_2 = S_3 = 0, X_0 = 0$
- $(a_1 = 0)$ $S_0 = 0, S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 0, X_1 = 0$
- $(a_2 = 0)$ $S_0 = 0, S_1 = 0, S_2 = 1, S_3 = 0, X_2 = 0$
- $(a_3 = 0)$ $S_0 = 0, S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = 1, X_3 = 1$
- $(a_4 = 1)$ $S_0 = 0, S_1 = 1, S_2 = 1, S_3 = 1, X_4 = 1$
- $(a_5 = 1)$ $S_0 = 0, S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 0, X_5 = 0$

となる． この時点での出力の列： $(X_0X_1X_2X_3X_4X_5) = (000110)$ が商 $X_0x^5 + X_1x^4 + X_2x^3 + X_3x^2 + X_4x + X_5$ を表しているので, この場合の商は $x^2 + x$ である．また, シフトレジスタの内容 $(S_0S_1S_2S_3) = (0100)$ がシンドローム多項式 $S_0x^3 + S_1x^2 + S_2x + S_3$ を表しているので, この場合には x^2 となり, いずれも手計算の結果と合っている.

演習問題 8 に関するコメント

この問題はハミング符号による 1 ビット誤り検出・訂正の典型的な手続きを (4),(5) という小問にしてあり, 重要ですので, 各自が再度確認しておいて下さい. (1)-(3) は $\boldsymbol{F}_2$ (あるいは GF(2)) 上の演算規則と関連する不等式についての問題ですが, これらも基本的なものなので, 間違えた人は解答例を見ておくように.

比較的出来は良かったのですが, (6) の問題の意味がわからなく, 解答できなかった人がいました．通常の 2 元対称通信路では, 6 ビットの情報を送信した際に誤りが生じる確率, 言い換えれば, 受信側が誤情報を受け取る確率は 1 ビットでも間違えが生じればアウトなわけですから, 全く誤りがない確率 $(1-p)^6$ の余事象の確率を考えて

$$p_z = 1 - (1-p)^6 \tag{9}$$

となりますが, ここで扱ったハミング符号を通信に用いるならば, 受信者は 1 ビットの誤りまで検出・訂正できるわけですから, 誤り確率は何も工夫しない場合の $1-(1-p)^6$ より, ${}_6C_1p(1-p)^5$ だけ減少して

$$p_z = 1 - (1-p)^6 - 5p(1-p)^5 \tag{10}$$

となるわけです.

1 連続信号の解析：標本化定理について I

今回と次回（補講：7/30) の 2 回を使って, 連続信号の取り扱いとして重要な**標本化定理**について見ていく.

一般的に言って連続的な時間信号 $u(t)$ は, ある時間間隔の信号値が失われると再生できないが, **信号の周波数成分がある有限範囲内に限られる場合には時間軸上にある密度 (間隔) でとった点における信号値のみで全ての時間の信号値が決定できる.** これが「標本化定理」と呼ばれる定理としてまとめられている.
今回は話として幾分簡単である, 連続的信号 $u(t)$ が周期的な関数の場合を扱う. より実用性が高く重要な $u(t)$ が非周期関数の場合に関しては次回に述べることにしょう.

1.1 準備：フーリエ級数展開 (もしかすると復習になるのかもしれない ⋯)

$u(t)$ を冪関数で展開する方法として 1 年次の「物理学 I」等の講義でテーラー展開：

$$u(t) = u(0) + \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0} t + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2u}{dt^2}\right|_{t=0} t^2 + \cdots \tag{11}$$

を学び, 実際に様々な場面で用いたことと思うが, 関数 $u(t)$ が周期 T の周期関数の場合には, $u(t)$ を次のように調和関数 (三角関数) で展開 (分解) することができる.

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \, \mathrm{e}^{\frac{2\pi i n}{T} t} \tag{12}$$

$$A_n \equiv \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)\, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i n}{T} t}\, dt \tag{13}$$

ここで, $2\pi/T \equiv \omega$ は**角周波数**, $1/T \equiv f$ を**周波数**と呼ぶ. A_n は**フーリエ係数**と呼ばれる係数であり, フーリエ級数に展開するとはつまるところ, (12) 式で定義される $u(t)$ の「重み $\mathrm{e}^{-2\pi i n t/T}$ 付き積分」を実行し, A_n を n の関数として求めることである (テーラー展開が $u(t)$ の微分係数を求めることであったように)[1] .

さて, 実際に (13) が展開 (12) の展開係数になっているかどうかを確かめておこう. (12) 式の両辺に $\mathrm{e}^{-2\pi i m t/T}$ をかけて, t に関して $-T/2$ から $T/2$ まで積分し, T で割ってみると, $n = m$ ならば

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)\, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i m}{T} t}\, dt = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i (n-m)}{T} t}\, dt = A_m \tag{14}$$

$n \neq m$ であるならば, ド・モアブルの公式：$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ を用いて

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)\, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i m}{T} t}\, dt &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i (n-m)}{T} t}\, dt \\
&= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \left\{ \int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{2\pi(n-m)}{T} t\right) dt + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{2\pi(n-m)}{T} t\right) dt \right\} \\
&= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \Bigg\{ \left[\frac{T}{2\pi i (n-m)} \sin\left(\frac{2\pi(n-m)}{T} t\right)\right]_{-T/2}^{T/2} \\
&+ \left[-\frac{T}{2\pi(n-m)} \cos\left(\frac{2\pi(n-m)}{T} t\right)\right]_{-T/2}^{T/2} \Bigg\} = 0
\end{aligned} \tag{15}$$

[1] 工学系の教科書では虚数単位を j を用いて記述することが多いと思うが, この講義ノートでは i を用いることに注意されたい.

となるから, 結局 (13) が展開係数であることがわかる.

また, $u(t)$ が実関数であるならば, A_n^* を A_n の複素共役として, $A_{-n} = A_n^*$ が成り立つので, フーリエ展開 (12) は

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) \tag{16}$$

$$a_n \equiv \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)\, \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt \tag{17}$$

$$b_n \equiv \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)\, \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt \tag{18}$$

$$a_0 \equiv A_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t) dt \tag{19}$$

のように書くこともできる.

1.2 標本化定理：周期関数に対して

(標本化定理：周期関数に対して)

周期 T の周期関数 $u(t)$ のフーリエ係数 A_n が $|n| > n_{\mathrm{M}}$ に対してゼロであるとき, 区間 $(0, T)$ 内の任意の時刻 t の信号値 $u(t)$ は, $N = 2n_{\mathrm{M}} + 1$, $\Delta t = T/N$ (**標本化間隔**), $t_k = k\Delta t$, $u_k = u(t_k)$ (**標本値**) として

$$u(t) = \sum_{k=1}^{N} u_k\, g_1(t - t_k)$$

で与えられる. ただし, $g_1(t)$ は**標本化関数**と呼ばれる関数であり

$$g_1(t) = \frac{1}{N}\sum_{n=-n_{\mathrm{M}}}^{n_{\mathrm{M}}} \mathrm{e}^{2\pi i n t/T} = \frac{1}{N}\frac{\sin(\pi N t/T)}{\sin(\pi t/T)}$$

である.

(証明)

$|n| > n_{\mathrm{M}}$ で $u(t) = 0$ に注意して $u(t)$ をフーリエ展開すると

$$u(t) = \sum_{n=-n_{\mathrm{M}}}^{n_{\mathrm{M}}} A_n\, \mathrm{e}^{2\pi i n t/T} \tag{20}$$

が得られるが, $N = 2n_{\mathrm{M}} + 1, \Delta t = T/N, u(k\Delta t) = u_k, t = k\Delta t$ とおけば, 上式は

$$u_k = \sum_{n=-n_{\mathrm{M}}}^{n_{\mathrm{M}}} A_n\, \mathrm{e}^{2\pi i n k/N} \tag{21}$$

と書き直すことができる. そこで, この両辺に $\mathrm{e}^{-2\pi i m k/N}$ をかけて, k に関して 1 から N まで和をとると

$$\sum_{k=1}^{N} u_k\, \mathrm{e}^{-2\pi i m k/N} = \sum_{n=-n_{\mathrm{M}}}^{n_{\mathrm{M}}} \sum_{k=1}^{N} A_n\, \mathrm{e}^{\frac{2\pi i (n-m) k}{N}}$$

$$= \quad N \sum_{n=-n_{\mathrm{M}}}^{n_{\mathrm{M}}} A_n \delta_{n,m} = N A_m \tag{22}$$

が得られる. ただし, $\delta_{n,m}$ はクロネッカのデルタであり, 整数 n, m に対して成り立つ次の恒等式 :

$$\sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{\frac{2\pi i (n-m)k}{N}} \quad = \quad N \delta_{n,m} \tag{23}$$

を用いた. (これを示せ ⇒ **演習問題 11** 2.)

従って,

$$A_n \quad = \quad \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} u_k \, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i n k}{N}} \tag{24}$$

なので, これを (21) 式に代入すれば

$$\begin{aligned} u(t) \quad &= \quad \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} u_k \sum_{n=-n_{\mathrm{M}}}^{n_{\mathrm{M}}} \mathrm{e}^{\frac{2\pi i n (t - k\Delta t)}{T}} \\ &= \quad \sum_{k=1}^{N} u_k \frac{\sin\{\pi N (t - t_k)/T\}}{N \sin\{\pi (t - t_k)/T\}} \end{aligned} \tag{25}$$

が得られる. ただし, ここでは恒等式 :

$$\sum_{k=-K}^{K} \mathrm{e}^{ik\phi} \quad = \quad \frac{\sin(K + 1/2)\phi}{\sin(\phi/2)} \tag{26}$$

を用いた. (これを示せ ⇒ **演習問題 11** 3.)

(証明おわり).

演習問題 11

1. 周期 T の関数 $u(t)$:

$$u(t) \quad = \quad \begin{cases} a & (mT - \frac{\tau}{2} \le t \le mT + \frac{\tau}{2} : m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \\ 0 & (t > mT + \frac{\tau}{2}, t < mT - \frac{\tau}{2} : m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \end{cases}$$

に対し

(1) $u(t)$ を図示せよ.

(2) $u(t)$ をフーリエ展開せよ.

2. 整数 n, m に対して成り立つ次の恒等式 :

$$\sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{\frac{2\pi i (n-m)k}{N}} \quad = \quad N \delta_{n,m}$$

を示せ.

3. 恒等式 (**ラグランジュの恒等式**と呼ばれる) :

$$\sum_{k=-K}^{K} \mathrm{e}^{ik\phi} \quad = \quad \frac{\sin(K+1/2)\phi}{\sin(\phi/2)}$$

を示せ.

\# **注意** : 7/30 (金) 第 3 講時に補講を行う関係で, 今回のレポート〆切をこの補講の開始時までとします.