



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	2004年度 情報理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一; Inoue, Jun-ichi
Description	この講義資料は著者のホームページ http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/ からもダウンロードできます。 http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/
Issue Date	2004
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/374
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	learning object
File Information	InfoTheory04_12.pdf, 第12回講義ノート



情報理論 配布資料 #12 (最終回)

担当：井上 純一 (情報エレクトロニクス系棟 8-13)

平成 16 年 7 月 30 日 (補講)

演習問題 11 の解答例

1.

(1) $u(t)$ を図示すると図 1 のようになる.

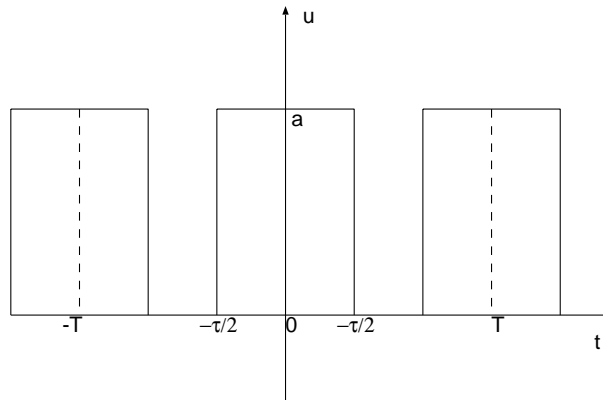


図 1: ここで考える $u(t)$ の概形.

(2) 前回 (7/26) 配布の資料 #11 の (16)-(20) に従ってフーリエ展開を行おう. 各フーリエ係数は簡単に

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} a dt = \frac{2a}{T} [t]_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{a\tau}{T} \quad (1)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} a \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt = \frac{2a}{T} \left[\frac{T}{2\pi n} \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \right]_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{2a}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n\tau}{T}\right) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} a \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt = \frac{2a}{T} \left[-\frac{T}{2\pi n} \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \right]_{-\tau/2}^{\tau/2} \\ &= \frac{a}{\pi n} \left\{ \cos\left(-\frac{\pi n\tau}{T}\right) - \cos\left(\frac{\pi n\tau}{T}\right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

と求まるので¹, $u(t)$ のフーリエ展開表示は

$$u(t) = \frac{a\tau}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n\tau}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \quad (4)$$

となる.

¹ b_n に関しては被積分関数が奇関数なので, 積分するまでもなくゼロとわかる.

2. まず, $n = m$ のときには

$$\sum_{k=1}^N 1 = N \quad (5)$$

となるので, 与式が成り立つのはあきらか.

$n \neq m$ のときには, $\sum_{k=1}^N e^{2\pi i(n-m)k/N}$ が初項 $e^{2\pi i(n-m)/N}$, 公比 $e^{2\pi i(n-m)/N}$ の等比数列であるから, 等比数列の和の公式から

$$\sum_{k=1}^N e^{2\pi i(n-m)\frac{k}{N}} = \frac{e^{\frac{2\pi i(n-m)}{N}}(1 - e^{2\pi i(n-m)})}{1 - e^{\frac{2\pi i(n-m)}{N}}} \quad (6)$$

となるが, 任意の自然数 n, m に対し, $e^{2\pi i(n-m)} = 1$ となるので, 上式はゼロとなり, 結局

$$\sum_{k=1}^N e^{2\pi i(n-m)\frac{k}{N}} = N\delta_{mn} \quad (7)$$

が成り立つことがわかる.

3. 等比級数の和の公式を用いた後に, ド・モアブルの公式を用いて $e^{i\varphi}$ 等を三角関数で表すと

$$\begin{aligned} \sum_{k=-K}^K e^{ik\varphi} &= \sum_{k=1}^K e^{ik\varphi} + \sum_{k=1}^K e^{-ik\varphi} + 1 \\ &= \frac{e^{i\varphi}(1 - e^{iK\varphi})}{1 - e^{i\varphi}} + \frac{e^{-i\varphi}(1 - e^{-iK\varphi})}{1 - e^{-i\varphi}} + 1 \\ &= \frac{e^{i\varphi}(1 - e^{-i\varphi})(1 - e^{iK\varphi}) + e^{-i\varphi}(1 - e^{i\varphi})(1 - e^{-iK\varphi})}{(1 - e^{i\varphi})(1 - e^{-i\varphi})} + 1 \\ &= \frac{2 \cos \varphi - 2 \cos(K+1)\varphi - 2 + 2 \cos K\varphi}{2(1 - \cos \varphi)} + 1 \\ &= \frac{\cos K\varphi - \cos(K+1)\varphi}{1 - \cos \varphi} \\ &= \frac{\cos K\varphi - \{\cos K\varphi \cos \varphi - \sin K\varphi \sin \varphi\}}{2 \sin^2(\varphi/2)} \\ &= \frac{2 \cos K\varphi \sin^2(\varphi/2) + 2 \sin K\varphi \sin(\varphi/2) \cos(\varphi/2)}{2 \sin^2(\varphi/2)} \\ &= \frac{\cos K\varphi \sin(\varphi/2) + \sin K\varphi \cos(\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)} \\ &= \frac{\sin(K+1/2)\varphi}{\sin(\varphi/2)} \end{aligned} \quad (8)$$

となり, 与式の成立を示すことができる.

演習問題 10 に関するコメント

10 回ともなると皆さん疲れてきたのでしょうか? レポート提出者数も, 全問解答者数も少なめでした. 内容的にはシフトレジスタ回路の部分で, 回路は書いたものの, その動作を確認していないレポートが多数見受けられました. 教科書, 配布資料等をもう一度確認しておいてください.

2 連続信号の解析：標本化定理について II

前回 (7/26) に引き続き、連続信号の取り扱いとして、標本化定理について学ぶ。今回は信号 $u(t)$ が非周期関数の場合を考える。その前に、既に学んだフーリエ級数の $T \rightarrow \infty$ (単位周波数 $\Delta f \rightarrow 0$) の極限としてフーリエ変換を定義しておこう。

2.1 準備：フーリエ変換 (恐らく復習になると思うのだが)

前回学んだフーリエ展開：

$$u_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{\frac{2\pi i n}{T} t} \quad (9)$$

において、単位周波数 (隣り合う周波数間の間隔) Δf を

$$\Delta f \equiv \frac{1}{T} \quad (10)$$

で定義する。このとき、 $T \rightarrow \infty$ 、つまり、周期 T を十分に長くすれば、単位周波数 Δf は微小量となる。また、この単位周波数の n 倍で周波数を

$$f = n\Delta f = \frac{n}{T} \quad (11)$$

で定める。ここで、フーリエ係数 A_n は

$$A_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u_T(t) e^{-\frac{2\pi i n}{T} t} dt \quad (12)$$

で与えられたことを思い出すと、単位周波数あたりの周波数成分は

$$\frac{A_n}{\Delta f} \equiv U(f) \quad (13)$$

で定義することができる。これから $A_n = U(f)\Delta f$ であるから、これと単位周波数を用いて (9) 式を書き直すと

$$u_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta f U(f) e^{2\pi i f t} \quad (14)$$

となるが、ここで $\Delta f \rightarrow 0$ の極限をとれば

$$\lim_{\Delta f \rightarrow 0} u_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} df U(f) e^{2\pi i f t} \equiv u(t) \quad (15)$$

が得られる。一方、 $U(f)$ は (12)(13) から $T \rightarrow \infty$ の極限で

$$U(f) = \frac{A_n}{\Delta f} = \frac{1}{\Delta f T} \int_{-T/2}^{T/2} u_T(t) e^{-\frac{2\pi i n}{T} t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-2\pi i f t} dt \quad (16)$$

となる。従って、我々は次のような 1 対の積分を得ることができた。

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} df U(f) e^{2\pi i f t} \quad (17)$$

$$U(f) = \int_{-\infty}^{\infty} dt u(t) e^{-2\pi i f t} \quad (18)$$

ここで、(18) を関数 $u(t)$ のフーリエ変換と呼ぶ。このフーリエ変換を用いることにより、任意の時間の関数 $u(t)$ に対し、どのくらいの割合でどのような周波数 f が含まれるか — つまり $U(f)$ — を求めることができる。一方、(17) 式で定義される積分はフーリエ逆変換と呼ばれる。その作り方から明らかに、 $u(t), U(f)$ のどちらか一方がわかれば他方は自動的に定まることになる。

2.2 標本化定理：非周期関数に対して

(標本化定理：非周期関数に対して)

時間の関数 $u(t)$ のフーリエ変換 $U(f)$ が $|f| > W$ でゼロであるとする。このとき、時間軸上に $\Delta t = 1/2W$ で標本点 $t_k = k\Delta t$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) をとり、 $u_k = u(t_k)$ とすると、任意の時刻での関数値 $u(t)$ は

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k g_2(t - t_k), \quad g_2(t) = \frac{\sin(2\pi Wt)}{2\pi Wt}$$

で与えられる。(g_2 は標本化関数)

この定理は、その周波数成分が $|f| \leq W$ に制限されてさえいれば、信号 $u(t)$ を観測値から再構成する場合に無限個の連続した観測点を設ける必要はなく、 $1/2W$ の間隔で「飛び飛び」の値さえ調べておけば十分であり、それら有限個の標本値をつなぎ合わせていけば元の信号 $u(t)$ が必ず再構成できることを保障している。

さて、ここで周波数 W 、周期 $T = 1/W$ の単振動の解を考えてみると（以下、各自が周期 $T = 1/W$ の正弦曲線を頭に思い描きながら読んでください！）、その正弦曲線の「山」と「谷」の間隔が $1/2W$ であることは直ちにわかるであろう。ここがこの定理のポイントの一つである。つまり、「山」と「谷」の間隔 $T/2 = 1/2W$ でもって信号 $u(t)$ をサンプリングしさえすれば、その間隔の中でさらに細かく $u(t)$ がギザギザと波打っているという状況はありえない（もし、この間隔の中でさらに細かな「山」「谷」が現れたとすると、それは周波数が W であるという前提に反する）。従って、この間隔「 $1/2W$ 」でサンプリングした点を「滑らかに」つなげば、サンプリングの間隔が荒いのではなかろうか、ということは一切気にすることはなく、元の信号 $u(t)$ が再構成できるであろうことは容易に想像できる（ほぼ自明だと思う）。

しかし、かと言って「どのように標本点を滑らかにつなげばよいか」に関しては自明ではない。それがこの定理では具体的に与えられているわけである。そこで定理の証明を詳しく見ていくことにしよう。

(証明)

証明はさほど難しくなく、まずは $u(t)$ のフーリエ変換 $U(f)$ が $|f| > W$ でゼロであるから

$$u(t) = \int_{-W}^W df U(f) e^{2\pi i f t} \quad (19)$$

となるので、この $U(f)$ は f の関数としてフーリエ級数展開することができ、

$$U(f) = \sum_k B_k e^{-\frac{2\pi i k f}{2W}} \quad (20)$$

$$B_k = \frac{1}{2W} \int_{-W}^W df U(f) e^{\frac{2\pi i k f}{2W}} \quad (21)$$

となる。従って、(20) を (19) に代入して f に関する積分を実行すれば

$$u(t) = \sum_k B_k \int_{-W}^W df e^{2\pi i f (t - \frac{k}{2W})} = \sum_k B_k \frac{\sin \left[2\pi W \left(t - \frac{k}{2W} \right) \right]}{\pi \left(t - \frac{k}{2W} \right)} \quad (22)$$

となるが、(19)(21) 式より

$$B_k = \frac{u(t_k)}{2W} \quad (23)$$

であるから、結局

$$u(t) = \sum_k u(t_k) \frac{\sin [2\pi W (t - \frac{k}{2W})]}{2\pi W (t - \frac{k}{2W})} \quad (24)$$

となり、確かに $u(t)$ は標本化関数 $g_2(t)$ を用いて定理のように書くことができる。(証明おわり).

ところで、この標本化関数を $\sin(x)/x$ としてプロットしてみると図のようになる。 $x = 0$ のとき、この関

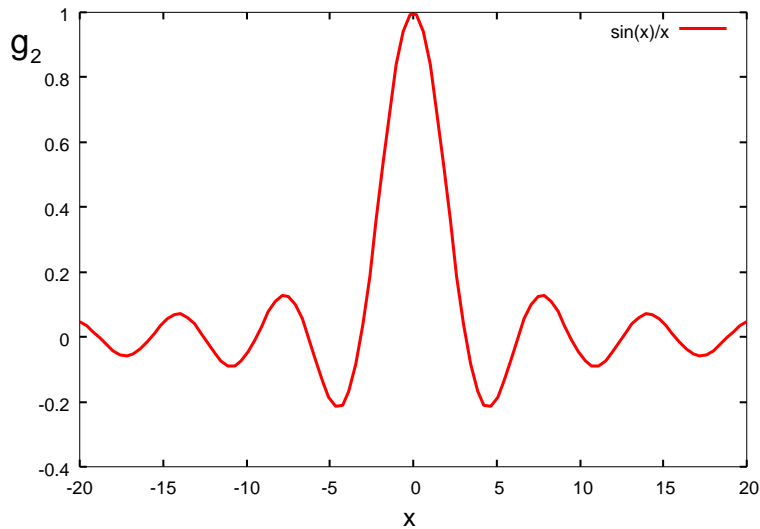


図 2: 標本化関数.

数は 1 を与え、 x が大きくなるにつれて、その値は減少していくことがわかる。このグラフと式 (24) から明らかのように、各標本点 $t_k = k/2W$ では $u(t)$ への寄与は重み 1 であり、それ以外では各標本点からの距離が大きければ大きいほど小さな重み (その重みは $1/t$ の形で減衰する) で $u(t)$ へ寄与するような形となっている。これは直観的にもっともらしい形と言えるであろう。

演習問題 12

1. 周期 $1/W$ の正弦波を $1/2W$ の間隔でサンプリングした場合と、同じ波を $3/2W$ の間隔でサンプリングした場合とを比べ、後者では本来の波の他、各標本点を通る周波数のさらに低い波が存在することを図示することにより示せ。このような波が出現することをエイリアシングと呼んでいる。
2. 前回の周期関数に対する標本化定理 (配布資料 #11 p. 6 参照) と今回の場合の関係はどのようになっているのか、を調べることは興味深い。これを見るために、前回の $u(t) = \dots$ の式で、 $T/N = \Delta t$ (一定) のまま $N, T \rightarrow \infty$ とすると、今回の標本化定理が得られることを示せ。

注意事項 : 今回のレポート切は 8/20(金) 正午です。提出先は情エレ棟 8-13 の井上の部屋前のレポートボックスまで。なお、今回のレポートの返却を希望される方は個人的に部屋まで取りに来てください。10 月末頃まで保管しておきます。

期末試験等に関して (重要)

試験等に関する注意を以下に書いておきます。

- 試験は 8 月 2 日 (月) 第 2 講時 M151 講義室にて行う。持ち込み不可。
- 試験開始後 30 分間は退室禁止。また、試験 30 分経過後の入室も禁止 (遅刻しないように)。
- 試験問題は大問で 3 題。制限時間 90 分。解答例 & 配点表を終了後に配布するのでもらって帰るように。
- 試験の答えは返却しない。自分の採点済答案をどうしても見たい人は個別に来てくだされば見せて差し上げます。
- 追加課題に関して。情報理論の講義サイト：

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/InfoTheory/InfoTheory2004.html

からダウンロードできるので、該当者は注意事項を熟読の上、課題を提出してください。なお、今回 (第 12 回) の演習問題の解答例も 8/20 以降に上記サイトにアップロードしておきます。ただし、こちらで印刷したものを配布するということはないので、必要な者は各自が計算室等からダウンロードし、印刷してください。