情報理論 配布資料 #2

担当：井上 純一 (情報エレクトロニクス系棟 8-13)

平成 16 年 4 月 19 日

演習問題 1 の解答例

(1) 図 1 参照.

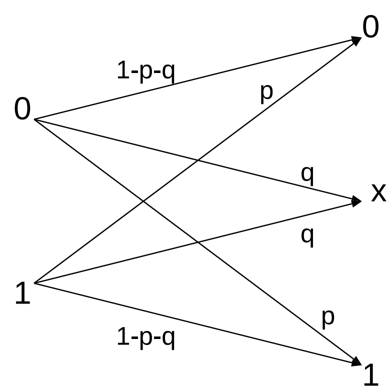

図 1: この問題の通信路に関するグラフ表現.

(2)

$$
\begin{aligned}
p(0|1) = p(1|0) &= p \\
p(\mathsf{x}|0) = p(\mathsf{x}|1) &= q \\
p(0|0) = p(1|1) &= 1 - p - q
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
p_0 = \sum_{k=1,0} p(0|k)p(k) &= p(0|1)p(1) + p(0|0)p(0) \\
&= \frac{1}{2} \times p + (1-p-q) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1-q) \\
p_1 = \sum_{k=1,0} p(1|k)p(k) &= p(1|1)p(1) + p(1|0)p(0) \\
&= (1-p-q) \times \frac{1}{2} + p \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1-q) \\
p_{\mathsf{x}} = \sum_{k=1,0} p(\mathsf{x}|k)p(k) &= p(\mathsf{x}|1)p(1) + p(\mathsf{x}|0)p(0) \\
&= \frac{1}{2} \times q + \frac{1}{2} \times q = q
\end{aligned}
$$

ここで, 出力値としては $0, 1$, 及び, x しかないことに注意すれば

$$p_0 + p_1 + p_{\mathsf{x}} = 1$$

が成り立っていることに注意.

(4) 例えば, $k = 2, l = 3$ の場合には, 2 個の x が, 3 個の b（反転ビット), 5 個の a(正常ビット) からなる 10 個の記号の列：

xxbbbaaaaa
xbaxbbaaaa
$\cdots$
$\cdots$

が現れる確率を求めればよい. 上記のような並べ方の総数が ${}_{10}C_2 \times {}_8C_3$ であることに注意する.
従って任意の k, l に対し, 求める確率 $p(k, l)$ は

$$p(k,l) = {}_{10}C_k \, q^k \, {}_{10-k}C_l \, p^l \, (1-p-q)^{10-k-l}$$

となる.

(5) $p(k, l)$ の定義から, この確率を可能な全ての k, l について和をとった p_{total} の値は 1 になることがすぐにわかるが, ここでは実際にこの和を計算することにより, これを確かめておくことにする. ヒントに与えた 2 項定理を用いると

$$\begin{aligned}
p_{\mathrm{total}} &= \sum_{k=0}^{10} \sum_{l=0}^{10-k} {}_{10}C_k \, q^k \, {}_{10-k}C_l \, p^l \, (1-p-q)^{10-k-l} \\
&= \sum_{k=0}^{10} {}_{10}C_k \, q^k \sum_{l=0}^{10-k} {}_{10-k}C_l \, p^l \, (1-p-q)^{10-k-l} \\
&= \sum_{k=0}^{10} {}_{10}C_k \, q^k \{p + 1 - p - q\}^{10-k} \\
&= \sum_{k=0}^{10} {}_{10}C_k \, q^k \, (1-q)^{10-k} \\
&= \{q + 1 - q\}^{10} = 1^{10} = 1
\end{aligned}$$

となる.

演習問題 2

1. A さんは札幌在住のアマチュア気象予報士であり, 彼独自の方法により明日の天気を予測する. その方法によると, 藻岩山に雲がかかることと明日の天気には相関があるそうで, $\mathcal{A}=\{a_1,a_2\}$, (a_1 : 晴れ, a_2 : 雨), $\mathcal{B}=\{b_2,b_2\}$, (b_1 : 藻岩山に雲なし, b_2 : 藻岩山に雲) とすると, 過去 10 年間にわたる統計により

$$p(a_1)=p(a_2)=\frac{1}{2},\ \ p(b_1|a_1)=\frac{1}{2},\ \ p(b_2|a_2)=1$$

であることがわかった. このとき以下の問いに答えよ.

(1) 次の関係式 :

$$\sum_{j=1,2} p(b_j|a_i) \quad = \quad 1$$

が成り立つことを示し, これを用いて $p(b_2|a_1), p(b_1|a_2)$ を求めよ.

(2) 「藻岩山にかかる雲」を確認することにより, 明日の天気に関してもたらされる情報量 : **相互情報量**

$$I(\mathcal{A};\mathcal{B}) \quad = \quad H(\mathcal{A})-H(\mathcal{A}|\mathcal{B})$$

を求めよ. ただし, 必要であれば次の公式 :

$$P(a_i|b_j) \quad = \quad \frac{p(b_j|a_i)p(a_i)}{\sum_{k=1,2} p(b_j|a_k)p(a_k)} = \frac{p(b_j|a_i)p(a_i)}{p(b_j|a_1)p(a_1)+p(b_j|a_2)p(a_2)}$$

を用いても良い.

2. 教科書 : p. 15 では, 2 個の事象からなるエントロピー : 2 **値エントロピー関数** $H(p)=-p\log p-(1-p)\log(1-p)$ の最大値が 1 であり, そのときの p の値が $p=1/2$ であることを学んだ. ここでは, これを n 個の事象に拡張することを考えたい. つまり, 事象 $1,2,\cdots,n$ の生起確率を $p_1,p_2,\cdots,p_n$ とするときの n **値エントロピー関数** :

$$H \quad = \quad -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$$

の最大値を与える $p_i\ \ (i=1,\cdots,n)$ の値と, そのときの最大値を考えよう. 以下の問いに答えよ.

(1) λ を定数とするとき, 次に定義される n 変数関数 $F(p_1,p_2,\cdots,p_n)$:

$$F(p_1,p_2,\cdots,p_n) \quad = \quad H+\lambda\left(1-\sum_{i=1}^{n} p_i\right)$$

に対し, F を最大とするような $p_k^*\ \ (k=1,\cdots,n)$ は

$$p_k^* \quad = \quad \mathcal{P}(\lambda)\ \ (k=1,\cdots,n)$$

であることを示し, λ の関数 $\mathcal{P}$ を求めよ.

(2) (1) の結果と n 個の事象の生起確率の和は 1 であるという条件：

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$$

を用いて λ, 及び, p_k^* $(k=1,\cdots,n)$ を n を用いて表し, $H^* = H(p_1^*, p_2^*, \cdots, p_k^*)$ を求めよ.

このとき, H^* が求める n 値エントロピー関数の最大値であり, p_k^* $(k=1,\cdots,n)$ がその最大値を与える p_k $(k=1,\cdots,n)$ となる[1] .

3. $\boxed{\textbf{演習問題 1}}$ で考えた通信路について以下の問いに答えよ.

(1) 入力値 $\mathcal{A} = \{0,1\}$, 及び出力値 $\mathcal{B} = \{0,1,\mathrm{x}\}$ を確率変数とするとき, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ の**エントロピー**： $H(\mathcal{A}), H(\mathcal{B})$, **結合エントロピー**： $H(\mathcal{A},\mathcal{B})$, 及び, **条件付きエントロピー**： $H(\mathcal{A}|\mathcal{B}), H(\mathcal{B}|\mathcal{A})$ を求めよ. ただし, $p_{\mathcal{A}}(1) = p_{\mathcal{A}}(0) = 1/2$ とする.

(2) (1) で求めたエントロピー, 結合エントロピー, 条件付きエントロピーに対して関係式：

$$H(\mathcal{A},\mathcal{B}) = H(\mathcal{A}) + H(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = H(\mathcal{B}) + H(\mathcal{A}|\mathcal{B})$$

が成立することを確かめよ.

(3) 確率変数 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ の**相互情報量**：$I(\mathcal{A};\mathcal{B})$ を求めよ. また, $q=0$ のとき相互情報量 $I(\mathcal{A};\mathcal{B})$ を最小とするような p の値を求めよ.

(注)：今回のレポート〆切は **5 月 10 日の次回講義開始時迄**です. 問題数は少し多めですが, 連休中に多少時間をさいて考えてみてください. なお, 4 月 26 日は井上出張のため休講です.

[1] ここでの例のように, $\sum_i p_i = 1$ 等の制約条件下で関数 $H(\{p_i\})$ の最大値を求める方法を**ラグランジュの未定係数法**と呼び, λ は**ラグランジュの未定係数**と呼ばれる.