Title	2004年度 情報理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一; Inoue, Jun-ichi
Description	この講義資料は著者のホームページhttp://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/ からもダウンロードできます。 http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/
Issue Date	2004
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/374
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	learning object
File Information	InfoTheory04_6.pdf, 第6回講義ノート

情報理論 配布資料 #6

担当：井上 純一 (情報エレクトロニクス系棟 8-13)

平成 16 年 5 月 31 日

演習問題 5 の解答例

1. 問題文の誘導に従えばよい.

(1) 長さ k である符号化系列の総数は, 長さ $k-1$ である符号化系列と長さ 1 の符号化系列の並べ方, 長さ $k-2$ の符号化系列と長さ 2 の符号化系列の並べ方の和であるから

$$N_k = w_1 N_{k-1} + w_2 N_{k-2} \quad (k \geq 3) \tag{1}$$

と表すことができる.

(2) (1) で得られた N_k に関する 3 項間漸化式の解を

$$N_k = \lambda^k \tag{2}$$

と仮定しよう. すると, この (2) 式を (1) 式に代入することにより

$$\lambda^{k-2}(\lambda^2 - w_1\lambda - w_2) = 0 \tag{3}$$

が得られる. $\lambda \neq 0$ であり, 問題の表に与えられた符号語の個数より $w_1 = 1, w_2 = 2$ であるから, λ は 2 次方程式：

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \tag{4}$$

の解である.

(3) この方程式 (4) は 2 つの異なる実根 $\lambda = 2, -1$ をもつ. 従って, 漸化式 (1) の解は 2^k と $(-1)^k$ の線形結合として与えられる. つまり, a_1, a_2 を定数として

$$N_k = a_1 2^k + a_2(-1)^k \tag{5}$$

が問題の漸化式の解である. ただし, 定数 a_1, a_2 は初期条件 (ここではむしろ「境界条件」と言った方がよいかもしれない) から決まる. $N_0 = N_1 = 1$ より, この定数は直ちに $a_1 = 2/3$, $a_2 = 1/3$ と定まるので, 結局, 求める長さ k の符号化系列の総数 N_k は

$$N_k = \frac{2^{k+1}}{3} + \frac{1}{3}(-1)^k \tag{6}$$

となる.

さて, この解の正当性を確認しよう. まずは問題文にその値が与えられている N_1, N_2, N_3 は上 (6) 式に $k = 1, 2$, 及び, $k = 3$ を代入することにより, それぞれ

$$N_1 = \frac{2^2}{3} - \frac{1}{3} = 1 \tag{7}$$

$$N_2 = \frac{2^3}{3} + \frac{1}{3} = 3 \tag{8}$$

$$N_3 = \frac{2^4}{3} - \frac{1}{3} = 5 \tag{9}$$

となり, 一致することが確認できる. 問題の $k = 4$ のときには

$$N_4 = \frac{2^5}{3} + \frac{1}{3} = 11 \tag{10}$$

が得られるが, 実際にこの長さ 4 の符号化系列を与える情報源アルファベットの組み合わせを列挙してみると $\{x_1x_1x_1x_1, x_1x_1x_2, x_1x_2x_1, x_2x_1x_1, x_1x_1x_3, x_1x_3x_1, x_3x_1x_1, x_2x_3, x_3x_2, x_2x_2, x_3x_3\}$ のように確かに 11 通りある.

2. ハフマン符号を作成するアルゴリズムに従って符号の木を作ると図のようになる. 従って, 求める符号

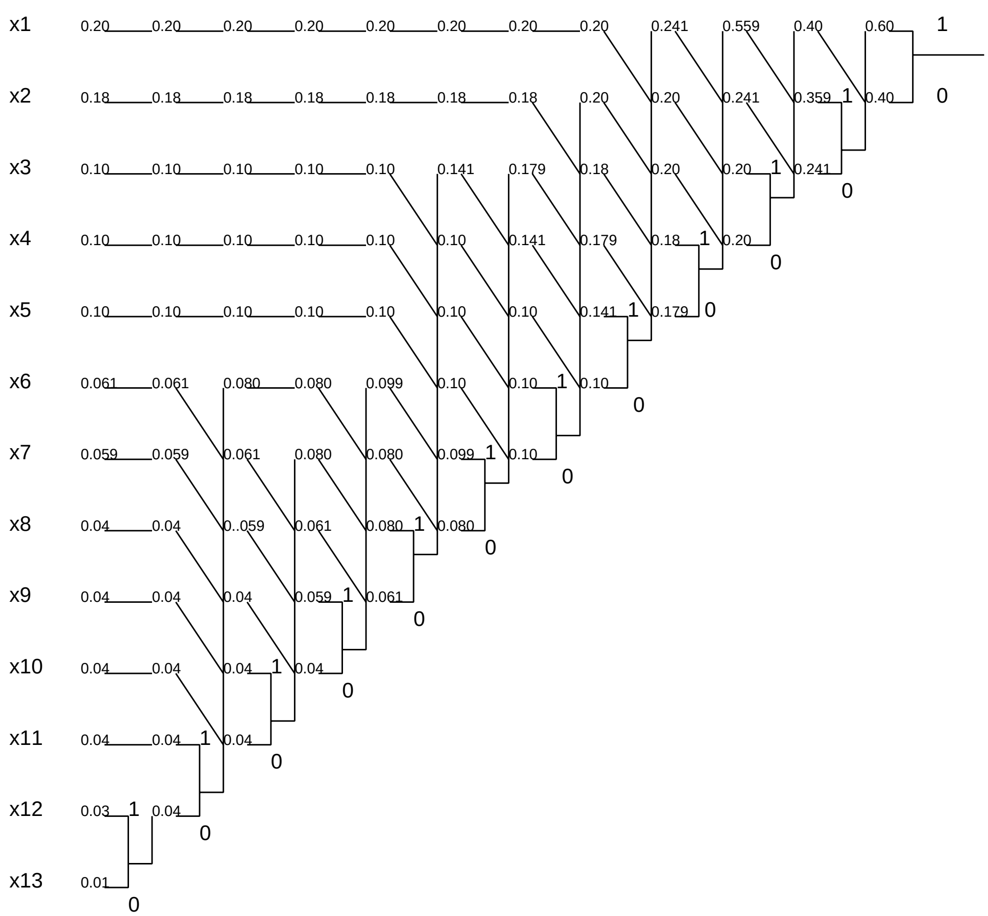

図 1: 情報源アルファベット x1 ∼ x13 に対するハフマン符号の符号の木.

語, 生成確率, 符号長等を表にまとめれば次のようになる.

アルファベット	**符号語**	**符号長** (l_i)	**生成確率** (p_i)	$p_i \times l_i$
x_1	01	2	0.20	0.40
x_2	111	3	0.18	0.54
x_3	100	3	0.10	0.30
x_4	001	3	0.10	0.30
x_5	000	3	0.10	0.30
x_6	1010	4	0.061	0.244
x_7	11011	5	0.059	0.295
x_8	11010	5	0.04	0.20
x_9	10111	5	0.04	0.20
x_{10}	10110	5	0.04	0.20
x_{11}	11001	5	0.004	0.20
x_{12}	110001	6	0.03	0.18
x_{13}	110000	6	0.01	0.06

平均符号長はこの表から直ちに

$$L = \sum_{i=1}^{13} p_i \, l_i = \underline{3.419} \tag{11}$$

と求まる.

演習問題 5 に関するコメント

問題 2. において, エントロピーの計算における対数の底を 2 ではなく, 4 にした人がかなりの数にのぼったのですが, この対数の底としては何でも良いわけではなく, 符号語を構成する記号の数, すなわち, この場合には $\mathcal{B}=\{0,1\}$ ですから, $K=2$ を選ばなければなりません. 仮に $K=4$ を底に選んだ場合, 符号語は $\mathcal{B}=\{0,1,2,3\}$ を用いて作ることになります.

ここでクラフトの不等式 :

$$\sum_{x\in\mathcal{A}} K^{-l(x)} \quad \leq \quad 1 \tag{12}$$

を「K の大きさ」という観点から見直してみると, K の大きさが大きいほど, この不等式は「余裕をもって」成立することが直ちにわかるでしょう. また, 生成確率が p_i である情報源アルファベットはその長さ l_i が, 記号 $\lceil w \rceil$ を w 以上の最小の整数を表すものとしたときに

$$l_i \quad = \quad \lceil -\log_K p_i \rceil \tag{13}$$

で符号化されるべきであることがわかるので (この l_i の選び方はクラフトの不等式を満たします. 教科書 p. 38 を参照), 情報源アルファベットの生成確率が等しいならば K が大きければ大きいほど, つまり, より多くの記号を用いて符号化すればするほど, その符号長は短くて済むことになります. 従って, $K=2$ で記号 $\mathcal{B}=\{0,1\}$ を用いて符号化する際に $K=4$ に対応する対数の底を用いてエントロピーを計算してしまうと, 必要な各符号長を実際より短く見積もってしまい, 適切でないというわけなのです.

2 回にわたり情報源符号化について見てきました. 結局, 我々がここでわかったことと言えば

出現確率が小さい情報源アルファベットには長い符号語を, 逆に,
出現確率が大きいアルファベットには短い符号語を割り当てればよい

という, 割と当たり前の事実でした. ただし, 各符号語の長さに関してはもう少し定量的なことまでが言えて, 「出現確率が p_i であるアルファベットの符号語の長さは $-\log_K p_i$ 以上の最小な整数に選べば良い」ことがわかりました. この指針により, 我々は情報源の冗長性を除去し, 無駄なく情報を伝達することができます. ただし, 以上は伝送時に雑音 (ノイズ) が無い場合に限った話あり, ノイズがある際には逆に情報に冗長性を持たせて多少の間違いがあってもそれを発見し, 修正できるような方策を立てる必要がでてきます.

さて, 今年度, 私は 1 年生のクラス担任をやっているのですが, 彼らは (まだクラスに友人も少ないこともあり), 私語 (雑音) は無く, 私の話をきちんと聞いてくれます. 従って, クラスアワーで私は 1 度しか伝達事項を話しません. しかし学年が上がるにつれ, なぜか私語も増え, 驚くべきことに内職などをする者まで出てくる始末 (そう言えば, この前回収したこの講義のレポートの中に, どういうわけか『情報工学演習 I(A)』と完璧なまでに正しい漢字で書かれたレポートが一部混じっていました !). こうなると, 例えば「補講を○月○日に行います」という連絡事項一つとっても, 2,3 回, うっかりすると, 4,5 回もアナウンスする必要が出てくるわけです. きちんと聞いてる人は「何回もウットウシイなあ」と思ったに違いありませんが, 私が何回も何回も同じことを話したのは, 実は「マットウな情報理論的考察」に基づくものであったのであり, 何度も同じことを話すことにより情報に冗長性を持たせ, 私語の多い教室内でも全ての人に伝えたいことを伝えるための戦略であったというわけです.

まあ, それはまた別な話として, 今回の講義からは雑音のある通信路で情報を伝達する際にどうするか, という話題に入っていくことにしましょう.

演習問題 6

1. この講義で度々取り上げてきた図 2 のような 2 元対称通信路を考える．このとき以下の問いに答えよ．

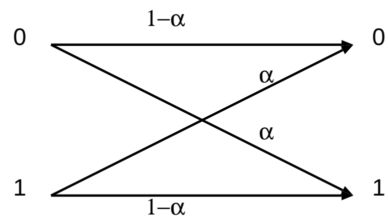

図 2: ここで考える 2 元対称通信路.

(1) この通信路において, 入力値の確率変数を $X \in \{0, 1\}$, 出力値の確率変数を $Y \in \{0, 1\}$ とするとき, $H(Y|X = 0)$, 及び, $H(Y|X = 1)$ を求めよ.

(2) (1) の結果から, この通信路の**通信路容量**：

$$C_1 = \max_{P_X}\{H(Y) - H(Y|X)\} \tag{14}$$

を求めよ．ただし, P_X は入力の確率分布である.

2. 上の問題 1. で扱った 2 元対称通信路を n 個連ねた図 3 のような通信路を考えよう．つまり, $p_0 \equiv p_0(X =$

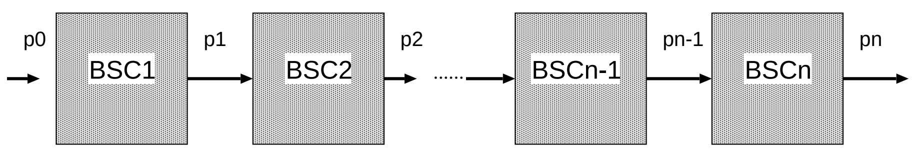

図 3: 図 2 の 2 元対称通信路 (BSC) を n 個並べた通信路を考える.

$0) = 1$ として一番左側の通信路 (BSC1) に $X = 0$ を入力すると信号は各通信路 (BSCi, i $= 2, \cdots, n$) において例えば $0 \to 1 \to 0 \to 0 \to \cdots \to 1 \to \cdots$ のように確率的にその状態を変えながら, BSCn を通過後に最終値を出力する．n 番目の通信路の出力 X が $X = 0$ である確率を $p_n \equiv p_n(X = 0)$ と定義し, 各通信路での誤り確率 α を $0 < \alpha < 1/2$ の範囲内で選ぶとき以下の問いに答えよ.

(1) 状態ベクトル $\boldsymbol{P_n}$ を

$$\boldsymbol{P}_n \equiv \left(\begin{array}{c} p_n \\ 1 - p_n \end{array}\right) \tag{15}$$

で定義しょう．このとき

$$\boldsymbol{P}_n = \boldsymbol{W}\,\boldsymbol{P}_{n-1} \tag{16}$$

を満たす 2×2 の行列 $\boldsymbol{W}$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{W}^n$ を計算することにより p_n を求めよ. (**注**: 線形代数の講義で学んだであろう, この手の行列の n 乗の計算法を忘れた者は p_n に関する漸化式を直接解いてもよい.)

(3) p_0 の値によらず

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{2} \tag{17}$$

となることを示せ.

(4) 問題 1. (2) の結果を用いることにより, この 2 元対称通信路を n 個並べた通信路の通信路容量 C_n を求め,

$$\lim_{n\to\infty} C_n = 0 \tag{18}$$

となることを示せ.

連絡: 7 月 30 日 (金) 第 3 講時に M151 講義室にて補講を行います.