情報理論 配布資料 #7

担当 : 井上 純一 (情報エレクトロニクス系棟 8-13)

平成 16 年 6 月 7 日

演習問題 6 の解答例

1. $P_X(x), P_Y(y)$ を入, 出力の確率分布, $P_{Y|X}(y|x)$ を通信路の確率分布としよう.

(1) $H(Y|X=0), H(Y|X=1)$ はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
H(Y|X=0) &= -\sum_Y P_{Y|X}(Y|X=0)\log P_{Y|X}(Y|X=0) \\
&= -P_{Y|X}(Y=0|X=0)\log P_{Y|X}(Y=0|X=0) \\
&- P_{Y|X}(Y=1|X=0)\log P_{Y|X}(Y=1|X=0) \\
&= -(1-\alpha)\log(1-\alpha) - \alpha\log\alpha \qquad (1) \\
H(Y|X=1) &= -\sum_Y P_{Y|X}(Y|X=1)\log P_{Y|X}(Y|X=1) \\
&= -P_{Y|X}(Y=0|X=1)\log P_{Y|X}(Y=0|X=1) \\
&- P_{Y|X}(Y=1|X=1)\log P_{Y|X}(Y=1|X=1) \\
&= -\alpha\log\alpha - (1-\alpha)\log(1-\alpha) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

となり, x の値にはよらないことがわかる. つまり

$$
\begin{aligned}
H(Y|X) &= \sum_x P_X(x)H(Y|X=x) \\
&= h(\alpha)\sum_x P_X(x) = h(\alpha) \qquad (3)
\end{aligned}
$$

であるから, 条件付きエントロピー $H(Y|X)$ は入力分布 $P_X(x)$ によらず, 2 値エントロピー関数 :

$$
h(\alpha) \equiv -\alpha\log\alpha - (1-\alpha)\log(1-\alpha) \qquad (4)
$$

で与えられる.

(2) (1) の結果から 2 元対称通信路の通信路容量 C_1 は

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \max_{P_X(x)} I(X;Y) \\
&= \max_{P_X(x)}\{H(Y) - H(Y|X)\} \\
&= \max_{P_X(x)}\{H(Y)\} - h(\alpha) \qquad (5)
\end{aligned}
$$

となるが, $P_X(x)$ が一様分布のとき, すなわち $P_X(0)=P_X(1)=1/2$ のとき, 出力分布も

$$\begin{aligned}
P_Y(0) &= \sum_{x=0,1} P_{Y|X}(Y=0|X=x)P_X(x) \\
&= \frac{1}{2}(1-\alpha)+\frac{1}{2}\alpha=\frac{1}{2} \qquad (6) \\
P_Y(1) &= \sum_{x=0,1} P_{Y|X}(Y=1|X=x)P_X(x) \\
&= \frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}(1-\alpha)=\frac{1}{2} \qquad (7)
\end{aligned}$$

のように一様分布となり, エントロピーの性質から $H(Y)$ は Y の分布が一様のときその最大値 $-2\times(1/2)\log(1/2)=1$ をとることがわかるので, 結局, 求める通信路容量は

$$C_1 = 1-h(\alpha)=1+\alpha\log\alpha+(1-\alpha)\log(1-\alpha) \tag{8}$$

である.

2. 誘導に従えばよい.

(1) $\boldsymbol{P}_n$ と $\boldsymbol{P}_{n-1}$ とは 2 元対称通信路で結ばれるので

$$\begin{pmatrix} p_n \\ 1-p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{n-1} \\ 1-p_{n-1} \end{pmatrix} \tag{9}$$

が成立する. すなわち, 遷移行列 $\boldsymbol{W}$ は

$$\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix} \tag{10}$$

となる.

(2)(3) 行列 $\boldsymbol{W}$ の固有値を λ_1, λ_2, 対応する固有ベクトルを

$$\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

とすると, もちろん

$$\boldsymbol{W}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{W}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\lambda_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{12}$$

が成り立つ. ここで, これら 2 つの固有ベクトルを列に並べた次のような行列 $\boldsymbol{U}$:

$$\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{X}_1 \ \boldsymbol{X}_2)=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \tag{13}$$

を用いて, 積 $\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{U}$ を作ってみると

$$\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1}\boldsymbol{W}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1} \left(\lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \ \lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \begin{pmatrix} y_2 & -x_2 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix} \left(\lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \ \lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \begin{pmatrix} \lambda_1(x_1 y_2 - x_2 y_1) & \lambda_2(x_2 y_2 - x_2 y_2) \\ \lambda_1(-x_1 y_1 + x_1 y_1) & \lambda_2(x_1 y_2 - x_2 y_1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad (14)
\end{aligned}
$$

つまり

$$
\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad (15)
$$

が得られるので, 両辺を n 乗することにより

$$
(\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{U})^n = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{U}\cdots\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{W}^n\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \qquad (16)
$$

であるから, この両辺の左右からそれぞれ $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}^{-1}$ をかけて

$$
\boldsymbol{W}^n = \boldsymbol{U} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \boldsymbol{U}^{-1} \qquad (17)
$$

が得られる. よって, あとは具体的に行列 $\boldsymbol{W}$ の固有値, 固有ベクトルを求めればよいだけである.

$$
|\boldsymbol{W} - \lambda \boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} 1-\alpha-\lambda & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (18)
$$

より ($\boldsymbol{I}$ は単位行列), $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1 - 2\alpha$ が得られ, それぞれの固有ベクトルは

$$
\boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad (19)
$$

である. 従って (13) (17) より

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{W}^n &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-2\alpha)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\{1+(1-2\alpha)^n\}}{2} & \frac{\{1-(1-2\alpha)^n\}}{2} \\ \frac{\{1-(1-2\alpha)^n\}}{2} & \frac{\{1+(1-2\alpha)^n\}}{2} \end{pmatrix} \qquad (20)
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{pmatrix} p_n \\ 1 - p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\{1+(1-2\alpha)^n\}}{2} & \frac{\{1-(1-2\alpha)^n\}}{2} \\ \frac{\{1-(1-2\alpha)^n\}}{2} & \frac{\{1+(1-2\alpha)^n\}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ 1 - p_0 \end{pmatrix} \qquad (21)
$$

から, 求める p_n は

$$
p_n = \left(p_0 - \frac{1}{2} \right) (1 - 2\alpha)^n + \frac{1}{2} \qquad (22)
$$

となる．従って

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{2} \tag{23}$$

である．

(注)：p_n に関する 2 項間漸化式

$$p_n = (1-\alpha)p_{n-1} + \alpha(1-p_{n-1}) = \alpha + (1-2\alpha)p_{n-1} \tag{24}$$

を直接解いてもよい．(24) が

$$(p_n - \beta) = (1-2\alpha)(p_n - \beta) \tag{25}$$

のように変形できたとすれば, $\beta = 1/2$ となるべきことは直ちにわかるので

$$p_n - \frac{1}{2} = (1-2\alpha)\left(p_{n-1} - \frac{1}{2}\right) = (1-2\alpha)^2\left(p_{n-2} - \frac{1}{2}\right) = \cdots = (1-2\alpha)^n\left(p_0 - \frac{1}{2}\right) \tag{26}$$

から

$$p_n = \left(p_0 - \frac{1}{2}\right)(1-2\alpha)^n + \frac{1}{2} \tag{27}$$

としても同じ．

(4) (21) より, ここで考えている n 個の 2 元対称通信路を並べたものを一つの通信路とみなせば, この通信路を特徴つける条件付き確率が

$$P_{Y|X}(0|0) = P_{Y|X}(1|1) = \frac{1}{2}\{1+(1-2\alpha)^n\} \equiv 1-\overline{\alpha} \tag{28}$$

$$P_{Y|X}(0|1) = P_{Y|X}(1|0) = \frac{1}{2}\{1-(1-2\alpha)^n\} \equiv \overline{\alpha} \tag{29}$$

であるから, 問題 1 での結果を用いることにより通信路容量 C_n：

$$\begin{aligned} C_n &= 1 - h(\overline{\alpha}) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\{1+(1-2\alpha)^n\}\log\frac{1}{2}\{1+(1-2\alpha)^n\} + \frac{1}{2}\{1-(1-2\alpha)^n\}\log\frac{1}{2}\{1-(1-2\alpha)^n\} \end{aligned} \tag{30}$$

が得られる．また, この結果で $n\to\infty$ の極限を考えることは簡単であり

$$\lim_{n\to\infty} C_n = 1 + \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} = 0 \tag{31}$$

となり, 題意が示せる．

演習問題 5 に関するコメント

問題 1. の漸化式の解法で, 誘導に従って解の形を仮定するのではなく, 次のようにして解くこともできます. まずは得られた N_k に関する漸化式 :

$$N_k = N_{k-1} + 2N_{k-2} \tag{32}$$

が定数 α, β を用いて

$$N_k - \alpha N_{k-1} = \beta(N_{k-1} - \alpha N_{k-2}) \tag{33}$$

のように変形されたとすれば, (32)(33) が等しいとおくことにより, 定数 α, β が $(\alpha, \beta) = (2, -1), (-1, 2)$ と決まります. 従って, 漸化式 (32) は

$$N_k - 2N_{k-1} = (-1)(N_{k-1} - 2N_{k-2}) = \cdots = (-1)^{k-1}(N_1 - 2N_0) = (-1)^k \tag{34}$$

$$N_k + N_{k-1} = 2(N_{k-1} + N_{k-2}) = \cdots = 2^{k-1}(N_1 + N_0) = 2^k \tag{35}$$

と書き換えることができるので, あとは (34)(35) を N_k について解いて

$$N_k = \frac{2^{k+1} + (-1)^k}{3} \tag{36}$$

とすれば求める解 N_k が得られます.

[**参考までに ···**]
本問題では境界条件 : $N_0 = N_1 = 1$ で

$$N_k = N_{k-1} + 2N_{k-2} \tag{37}$$

なる数列を扱ったわけですが, この漸化式の右辺の第 2 項の係数を 2 から 1 に換え

$$N_k = N_{k-1} + N_{k-2} \tag{38}$$

とすると, この数列は自然界の様々な現象にみられる**フィボナッチ数列**になります. 従って, この問題で扱った表の中の符号語 x_3 を削除して, $\mathsf{x}_1 = 0, \mathsf{x}_2 = 10$ のみで長さ k の符号化系列を作る場合, その個数 N_k の従う数列はフィボナッチ数列です. ちなみにフィボナッチ数列の一般項も, ここで示した方法により求めることが可能です. また, 「情報工学演習 I(A)」でやったように, 計算機を使えば, この数列の初めの 1000 項くらい (フィボナッチ数) を出力してみることは簡単ですから, 元気のある人はいろいろ試して楽しんでみると良いと思います.

問題 2. ではハフマン符号を求めるのですが, 各ステップで一番小さな 2 つの確率を足して, その値と残りの確率を並べる際に, 大小関係の間違いをして, 得られた符号の長さが十数桁にもなってしまった人が何人もいましたが, 前回配布の資料に書いたように符号長はおおよそ $\lceil -\log_K p_i \rceil$ と見積もれるので, この値と自分が出した符号長が一致しているかどうかをチェックすべきです. また, 当たり前のことですが, 符号の木の各レベルで確率の総和は必ず 1 になっていなければならないので, 少なくともこれを確認しつつ, 符号の木を作っていくべきでしょう (そうなっていない人が数名いました).

演習問題 7

確率変数 X が $0, 1$ のように離散的な値ではなく, 連続値をとるような確率分布 $P_X(x)$ を考えよう. この分布 $P_X(x)$ に対し, エントロピーは

$$H(X) \quad = \quad -\int_{-\infty}^{\infty} P_X(x) \log_2 P_X(x)\, dx \tag{39}$$

で定義される. 分布 $P_X(x)$ が分散 σ^2 を持つものとして以下の問いに答えよ.

(1) 分布 $P_X(x)$ が平均 0, 分散 σ^2 のガウス分布 (正規分布) に従う場合, エントロピー $H(X)$ を求めよ.

(2) $\alpha\,(>0)$ に対し, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\log_2 \alpha \leq (\alpha - 1)\, \log_2 \mathrm{e} \tag{40}$$

ただし, e は自然対数の底である.

(3) (1)(2) の結果を用いて

$$H(X) \quad \leq \quad \frac{1}{2}\, \log_2(2\pi \mathrm{e}\, \sigma^2) \tag{41}$$

が成り立つことを示し, 等号成立する条件を求めよ.

(注) これらの問題を解く際に必要であるならば次の積分公式 :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{e}^{-ax^2} \quad = \quad \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{42}$$

を用いてもよい.