HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	到着時間分布より定義される電子スオームパラメータ ： 多項近似ボルツマン方程式解析
Author(s)	伊達, 広行; 谷内, 滋; 近藤, 敬一 他
Citation	北海道大学医療技術短期大学部紀要, 3, 61-69
Issue Date	1990-10
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/37516
Type	departmental bulletin paper
File Information	3_61-70.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

到着時間分布より定義される電子スオームパラメータ
多項近似ボルツマン方程式解析

伊達　広行・谷内　滋*・近藤　敬一**
田頭　博昭***

Electron Swarm Parameters Defined by Arrival Time Spectra
A Multi-term Boltzmann Equation Analysis

Hiroyuki Date, Shigeru Yachi*, Kei-ichi Kondo** and Hiroaki Tagashira***

Abstract

In this paper a method of analysis for the electron swarm parameters deduced directly from the arrival time spectra (ATS) of electron swarms in gases is presented.

In the method the swarm parameters defined as the space derivatives of the moments of the arrival time of electron density distribution are calculated, using the new continuity equation derived from the Boltzmann equation (Kondo and Tagashira 1990).

The method is applied to obtain the electron energy distributions and swarm parameters in krypton gas at E/N=282.8 and 424.2 Td by utilising the spherical harmonic expansion for solution of the Boltzmann equation. The arrival time distributions of a swarm are also deduced by using the results from the ATS method.

要　　旨

本研究では，ガス中の電子スオームの挙動を，到着時間分布（Arrival Time Spectra ; ATS）から定義されるパラメータにより記述する理論とその解析方法について述べる。解析においては，この方法を実ガス（Kr）に適用し，ボルツマン方程式を多項式展開法によって解くことによって，電子エネルギー分布やスオームパラメータ等を計算する。さらに，得られたパラメータを用いて，到着時間分布の近似解を求める。

北海道大学医療技術短期大学部診療放射線技術学科
＊三菱電機㈱
＊＊阿南工業高等専門学校
＊＊＊北海道大学工学部電気工学科
Department of Radiological Technology, College of Medical Technology, Hokkaido University
＊ Mitsubishi Electric Corporation
＊＊ Anan Technical College
＊＊＊ Department of Electrical Engineering, Fauculty of Engineering, Hokkaido University

1．はじめに

気体放電中の電子スオームの振る舞いを正確に知ることは，気体の電子衝突断面積等の基本的な物理定数を決定するのみならず，最近の半導体プラズマプロセス，気体放電レーザ，プラズマディスプレイ，電子ビームスイッチ，放電灯，UV 光･X 線発生装置，しゃ断器等における放電現象を解析し技術開発を進める上で，きわめて重要である。

このため，電子スオームの時間的空間的挙動を，実験と理論の両面から詳細に調べ，その両者を比較し，互いに検証する研究がなされてきた（例えば，Huxley and Crompton 1974)。なかでも，Time-of-Flight (TOF) 法スオーム実験によって得られた移動速度や拡散係数などのパラメータから，電子やイオンとガス分子間の衝突断面積を評価する研究が最近さかんに行われている。

TOF 法実験では，通常ドリフト空間の定位置において粒子の到着時間分布が測定され，平均到着時間 $\langle t\rangle$ および $\langle t\rangle$ からのパルスの広がり（時間モーメント情報）の位置依存性が実験結果として得られる。しかし，従来のスオームの理論解析では，速度分布関数を密度勾配による展開形式で表わすことによって，同一発展過程を一定時刻に全位置空間にわたって記述する方法がとられている。これは，いわば駒取り写真状にスオームを観測することに相当するのものであり，TOF 法の実験結果を直接的に表現するものではない。

筆者らは，先にボルツマン方程式からスオームの到着時間分布（Arrival Time Spectra ; ATS) を厳密に表現する理論を提出し，平均到着時間 $\langle t\rangle$ および $\langle t\rangle$ からの時間モーメント $\langle(t-\langle t\rangle)^k\rangle$（$k=1$，2..）の勾配として到着時間分布から直接定義される新しいパラメータ（α パラメータ）を導入することにより，従来の密度勾配による展開と相対する時間微分展開による発展方程式を提案した（Kondo and Tagashira 1990)。この発展方程式に基づいてボルツマン方程式を解くことにより，直接的にかつ容易に，実験観測に対応する物理量を計算しうるようになった。

本稿では，ATS 観測に対応するこの理論とルジャンドル多項式展開近似法（本解析では 10 項）による具体的な計算方法について述べ，実際のガス (Kr) に適用した結果について報告する。また，従来の理論からのパラメータ（ω パラメータ，Tagashira 1985) との関係，および得られたパラメータから算出される到着時間分布の近似解について検討する。

2．理　　論

時刻 t，位置 z に依存する分布関数 f は，電界 E の方向を z 軸にとると，以下のようなボルツマン方程式に従う。

$$\frac{\partial f}{\partial t}+v_z\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{eE}{m}\frac{\partial f}{\partial v_z}+Jf=0 \tag{1}$$

ここで，電界 E と垂直な密度成分は積分されて，

$$f(\boldsymbol{v},z,t)=\iint f(\boldsymbol{v},\boldsymbol{r},t)dxdy \tag{2}$$

である。

流動平衡の下での TOF 法実験で得られる到着時間分布に対応する速度分布関数 $f(v,\ z,\ t)$ は，密度分布の時間変化率 $\nabla_t n(z,\ t)$ の多項式展開形式で与えることができる。

$$f(\boldsymbol{v},z,t)=\sum_K g^K(\boldsymbol{v},z)\cdot(-\nabla_t)^K n(z,t) \tag{3}$$

また，α パラメータを次のように導入する；

$$\frac{\partial n(z,t)}{\partial z}=\sum_K \alpha^{(K)}(z)\cdot(-\nabla_t)^K n(z,t) \tag{4}$$

（3），（4）式を（1）式に代入し，$(-\nabla_t)^K$ について整理すると，以下の方程式群が得られる。

$$\left(\frac{eE}{m}\frac{\partial}{\partial v_z}+\alpha^{(0)}v_z+J\right)g^0(\boldsymbol{v})=0 \qquad (K=0)$$

$$\left(\frac{eE}{m}\frac{\partial}{\partial v_z}+\alpha^{(0)}v_z+J\right)g^K(\boldsymbol{v})=g^{K-1}(\boldsymbol{v})-v_z\sum_{J=1}^{K}\alpha^{(J)}g^{K-J}(\boldsymbol{v}) \qquad (K\geqq 1) \tag{5}$$

ここで，eE/m は電界による加速度，J は衝突オペレータ項を表わす。

（4）式の時間モーメントをとることにより，α パラメータの物理的表現が次のように得られる (Kondo and Tagashira 1990)。

$$\alpha^{(0)}=\frac{d(logN(z))}{dz}\alpha_T \tag{6-a}$$

$$\alpha^{(1)}=\frac{d\langle t\rangle}{dz}=\frac{1}{W_m} \tag{6-b}$$

$$\alpha^{(2)}=\frac{1}{2!}\frac{d\langle T^2\rangle}{dz} \tag{6-c}$$

$$N(z)=\int N(z,t)dt$$

ここで，$T=t-\langle t\rangle$，$\langle t\rangle$ はスオームの平均到着時間であり，$\alpha^{(0)}$ はタウンゼントの一次電離係数 α_T，$\alpha^{(1)}$ は平均到着時間移動速度 W_m の逆数を意味している。$N(z)$ は定常タウンゼント (Steady-state-Townsend；SST) 観測法の位置 z での電子数密度を表す。また，拡散を考慮した SST 法に対する移動速度 V_d はここでは，

$$V_d=\int v_z g^0(\boldsymbol{v})d\boldsymbol{v} \tag{7}$$

で与えられる。

次に，（5）式を解き α パラメータを求める具体的な方法について述べる。

従来さかんに行なわれている球面調和関数による展開法によれば，ベクトル $\boldsymbol{v}$ の関数である $g^K(\boldsymbol{v})$ は，次式のようにルジャンドル展開される。

$$g^K(\boldsymbol{v})=\sum_n g_n^K(v)P_n(\cos\theta_v) \tag{8}$$

これを（5）式に代入することにより，$K=0$，1，2...に対して，それぞれ n 本の連立方程式が得られる。

$$\frac{eE}{m}\left[\frac{n}{2n-1}\left(\frac{d}{dv}-\frac{n-1}{v}\right)g_{n-1}^{0}+\frac{n+1}{2n+3}\left(\frac{d}{dv}+\frac{n+2}{v}\right)g_{n+1}^{0}\right]+J_n g_n^0$$
$$=-v\alpha^{(0)}\left(\frac{n}{2n-1}g_{n-1}^{0}+\frac{n+1}{2n+3}g_{n+1}^{0}\right) \qquad (K=0)$$

$$\frac{eE}{m}\left[\frac{n}{2n-1}\left(\frac{d}{dv}-\frac{n-1}{v}\right)g_{n-1}^{K}+\frac{n+1}{2n+3}\left(\frac{d}{dv}+\frac{n+2}{v}\right)g_{n+1}^{K}\right]+J_n g_n^K$$
$$=g_n^{K-1}-v\sum_{J=1}^{K}\alpha^{(J)}\left(\frac{n}{2n-1}g_{n-1}^{K-J}+\frac{n+1}{2n+3}g_{n+1}^{K-J}\right) \qquad (K\geqq 1) \tag{9}$$

上式において，衝突項$J_n(v)$は以下のように仮定される。

$$J_0(v)=-Nvq_m(v)g_0^K(v)-N\frac{1}{v^2}\frac{m}{M}\frac{\partial}{\partial v}\left\{v^4 q_m(v)g_0^K(v)\right\}$$
$$-N\frac{v'_{ex}{}^2}{v}q_{ex}(v'_{ex})g_0^K(v'_{ex})-N\frac{1}{\Delta}\frac{v'_i{}^2}{v}q_i(v'_i)g_0^K(v'_i)$$
$$-N\frac{1}{1-\Delta}\frac{v''_i{}^2}{v}q_i(v''_i)g_0^K(v''_i)+Nvq_T(v)g_0^K(v)$$
$$v'_{ex}=\left[\frac{2\varepsilon_{ex}}{m}+v^2\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$v'_i=\left[\frac{2\varepsilon_i}{m}+\frac{v^2}{\Delta}\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$v''_i=\left[\frac{2\varepsilon_i}{m}+\frac{v^2}{1-\Delta}\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$J_1(v)=\frac{1}{3}\frac{1}{v^2}\frac{m}{M}\frac{\partial}{\partial v}\left\{v^4 Nq_m(v)g_1^K(v)\right\}+Nvq_T(v)g_1^K(v)$$
$$J_n(v)=Nvq_T(v)g_n^K(v) \quad (n\geqq 2) \tag{10}$$

ここで，$q_T(v)=q_m(v)+q_{ex}(v)+q_i(v)+q_a(v)$ であり，$q_m(v)$、$q_{ex}(v)$、$q_i(v)$そして$q_a(v)$は，それぞれ，運動量移行断面積，励起断面積，電離断面積，付着断面積を表す。また，ε_{ex}とε_iはそれぞれ，励起しきい値，電離しきい値を，Δ：$1-\Delta$は電離後の2つの電子のエネルギー分配率を表す。

本解析では，(9)式の数値計算は，伝統的な二項近似法と，ガレルキン法を組み合わせた方法を用いる (Yachi et al 1988)。この方法は：① 数値計算上安定な二項近似法で$n=0$，1について(9)式を解く，② 残りの高次項($n\geqq 2$)をガレルキン法で一まとめに解く，③ ②で求めた第3項を①にフィードバックし，解が自己矛盾なく収束するまで①から③までを繰り返す，という手順を踏む。この手法の特徴は，n項まですべてをガレルキン法で解く方法に比べ，ガレルキン法で用いるマトリクスのサイズを小さくできること，連立方程式の解を求める際に必要な非同次項が，0にならないように設定しうる，等が挙げられる。

$n\geqq 2$に対する解は，ガレルキン法において次のように仮定される。

$$g_n^K(v)=\sum_{j=1}^{N}\omega_{nj}^K\Psi_j(v)+r_n^K(v) \tag{11}$$

ここで，Ψ_j は基底関数，ω_{nj}^K はその重み係数，r_n^K は残差である。これを（9）式に代入し残差 r_n^K と基底関数 Ψ_j を直交させるようにすることによって，ω_{nj}^K を未知係数とする連立方程式が得られる。

$$\sum_{j=1}^{N}\omega_{2j}^K a_{2ij}^K+\sum_{j=1}^{N}\omega_{3j}^K c_{3ij}^K=\phi_{2i}^K$$

$$\sum_{j=1}^{N}\omega_{2j}^K b_{2ij}^K+\sum_{j=1}^{N}\omega_{3j}^K a_{3ij}^K+\sum_{j=1}^{N}\omega_{4j}^K c_{4ij}^K=\phi_{3i}^K$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\sum_{j=1}^{N}\omega_{n-2,j}^K b_{n-2,ij}^K+\sum_{j=1}^{N}\omega_{n-1,j}^K a_{n-1,ij}^K+\sum_{j=1}^{N}\omega_{nj}^K c_{nij}^K=\phi_{n-1,i}^K$$

$$\sum_{j=1}^{N}\omega_{n-1,j}^K b_{n-1,ij}^K+\sum_{j=1}^{N}\omega_{nj}^K a_{nij}^K=\phi_{ni}^K$$

$$(i=1,2,\cdots,\mathrm{N}) \tag{12}$$

ここで，

$$a_{nij}^K=\int_0^\infty \Psi_i A_n^K(\Psi_j)dv$$

$$b_{nij}^K=\int_0^\infty \Psi_i B_n^K(\Psi_j)dv$$

$$c_{nij}^K=\int_0^\infty \Psi_i C_n^K(\Psi_j)dv$$

$$\phi_{2i}^K=\int_0^\infty \Psi_i\{D_2^K(v)-B_1^K(g_1^K)\}dv$$

$$\phi_{ni}^K=\int_0^\infty \Psi_i D_n^K(v)dv,\quad n\geqq 3$$

$$A_n^K=J_n^K$$

$$B_n^K=\frac{eE}{m}\frac{n}{2n-1}\left(\frac{d}{dv}-\frac{n-1}{v}\right)g_{n-1}^K+v\alpha^{(0)}\frac{n}{2n-1}g_{n-1}^K$$

$$C_n^K=\frac{eE}{m}\frac{n+1}{2n+3}\left(\frac{d}{dv}+\frac{n+2}{v}\right)g_{n+1}^K+v\alpha^{(0)}\frac{n+1}{2n+3}g_{n+1}^K$$

$$D_n^K=g_n^{K-1}-v\sum_{J=1}^{K}\alpha^{(J)}\left(\frac{n}{2n-1}g_{n-1}^{K-J}+\frac{n+1}{2n+3}g_{n+1}^{K-J}\right)$$

である。求められた係数 ω_{nj}^K をもとに，分布関数の解が合成されることになる。

本解析では，基底関数に3次(4階)の B－スプラインを用い，基底関数の個数 N を 120 とする。また，ルジャンドル展開の際の項数は 10 項とする。(12) の連立方程式は，ガウスの消去法によって計算される。

結果と考察

本解析では，Kr（クリプトン）ガスに対し上記理論を適用し，種々のパラメータを算出した。断面積は，筆者らが先に決定したもの（Date et al 1989）を使用した。

計算は，電離が十分に起こる，比較的高い換算電界 E/N（282.8 および 424.2 Td）下において行なわれた。

Table 1 に，各パラメータの値を示す。

Table 1. ＡＴＳスオームパラメータ

E/N (Td)	$\alpha^{(0)}(=\alpha_T)$ (cm^{-1})	$\alpha^{(1)}(=1/W_m)$ ($cm^{-1}s$)	$\alpha^{(2)}$ ($cm^{-1}s^2$)	W_m (cms^{-1})	V_d (cms^{-1})
282.8	1.72	0.493×10^{-7}	0.107×10^{-15}	20.3×10^{6}	18.4×10^{6}
424.2	3.06	0.336×10^{-7}	0.366×10^{-16}	29.8×10^{6}	26.1×10^{6}

Table 1 から明らかなように，平均到着時間移動速度 W_m は，SST 観測に対する移動速度 V_d と各 E/N において，10%程度値が異なっている。電子スオームの一定時刻における位置分布からスオームパラメータを導出するこれまでの理論（以下，Flight Distance Spectra ; FDS 法と呼ぶことにする）では，W_m は直接求められる値ではなく，タウンゼントの実効電離係数 α_T，スオームの重心の移動速度 W_r，縦方向拡散係数 D_L 等の値から，以下のように間接的に得られるものであった（Tagashira 1985）。

$W_m=W_r-2\alpha_T D_L+3\alpha_T{}^2 D_3-+\cdots$

ここで，D_3 は FDS 解析における 4 次のパラメータであり，この式からわかるように，TOF 実験から得られる移動速度に対応すると考えられる W_mは，高次項なしには原理的に正確な値が FDS 解析では求められない（計算が困難な D_3 以降のパラメータを無視して，上式右辺の第 2 項までの近似計算をメタンガスについて行った経験によると，同様な E/N 条件で，ATS 解析で求められた W_m とは数%値が異なる）。$\alpha^{(2)}$ は，ATS 解析で初めて導入されたパラメータであり，FDS 解析での拡散係数に対応する次数をもつ（D_L は ω パラメータの 2 次の係数 $\omega^{(2)}$ となっている）。多項式展開の項数はここでは 10 項としたが，6 項としたときの場合と較べ，パラメータ値に差異はほとんどみられなかった。このことから，今回のような条件においては，多項式の展開項数は 6 項程度でも十分であると考えられる。

Figure 1 には，$E/N=424.2$ Td でのエネルギー分布関数を示す。エネルギー空間への変換は次式によって行った。

$$F_n^K(\varepsilon)=\frac{4\pi v}{m}g_n^K(v),\ \varepsilon=\frac{mv^2}{2}$$

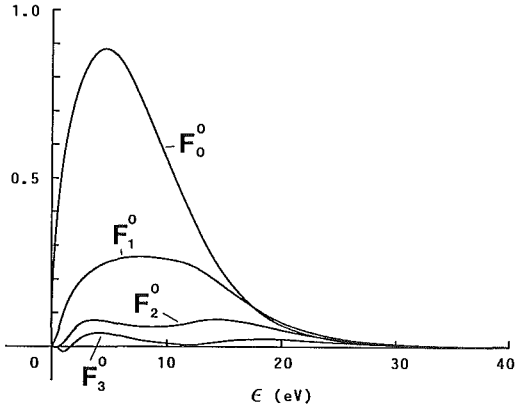

Figure 1. (a) $K=0$ に対するエネルギー分布関数 ($E/N=424.2$ Td)

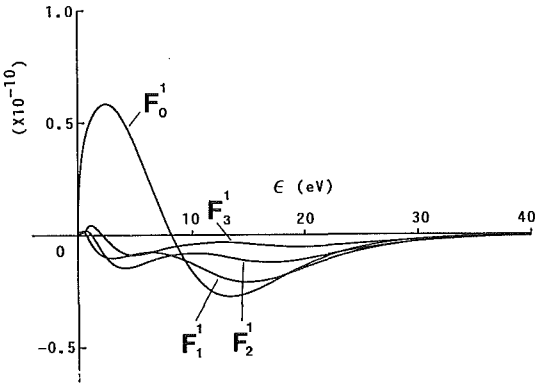

Figure 1. (b) $K=1$ に対するエネルギー分布関数 ($E/N=424.2$ Td)

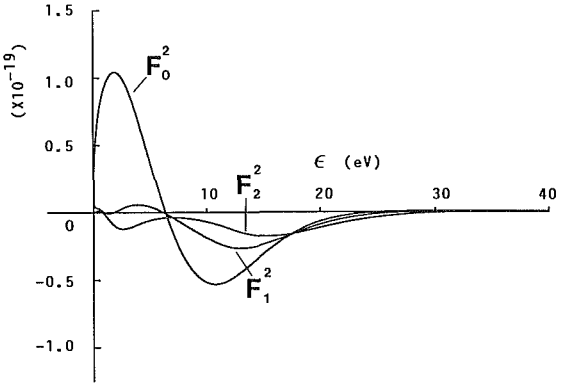

Figure 1. (c) $K=2$ に対するエネルギー分布関数 ($E/N=424.2$ Td)

Figure 1 (a) は SST 法の電子エネルギー分布に等しく，対応する FDS 解析（K が 0 次）においては，パルスタウンゼント（Pulsed Townsend；PT）法観測でのエネルギー分布が求まることと対称をなしている。

Table 1 で示されている 2 次までの α パラメータを用いると，（4）式は

$$\frac{\partial n(z,t)}{\partial z}=\alpha^{(0)}n(z,t)-\alpha^{(1)}\frac{\partial n(z,t)}{\partial t}+\alpha^{(2)}\frac{\partial^2 n(z,t)}{\partial t^2} \tag{13}$$

となり，これは従来の良く知られた拡散方程式において，時間 t と位置 z を入れ換えたものと類似している。この解は，次式のように得られる。

$$n(z,t)=\frac{n_0 e^{\alpha^{(0)}z}}{\sqrt{4\pi\alpha^{(2)}z}}\,exp\left\{-\frac{(t-\alpha^{(1)}z)^2}{4\alpha^{(2)}z}\right\} \tag{14}$$

ここで，n_0 は初期電子の個数を表す。この式は，到着時間分布（ATS）の近似関数（ガウス型）となっている。先に計算された Table 1 の α パラメータの値を代入した結果を Figure 2 と Figure 3 に示す。ここで，n_0 はどちらも 1 とし，図の縦軸は毎秒あたりの到着電子数を表す。

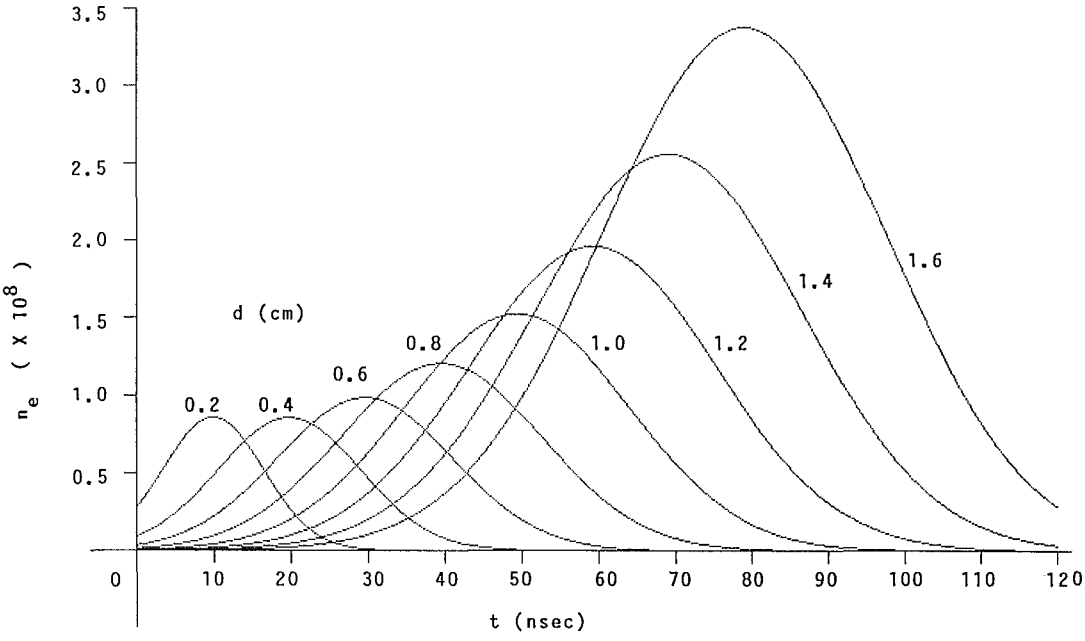

Figure 2.　$E/N=282.8$ Td における電子の到着時間分布

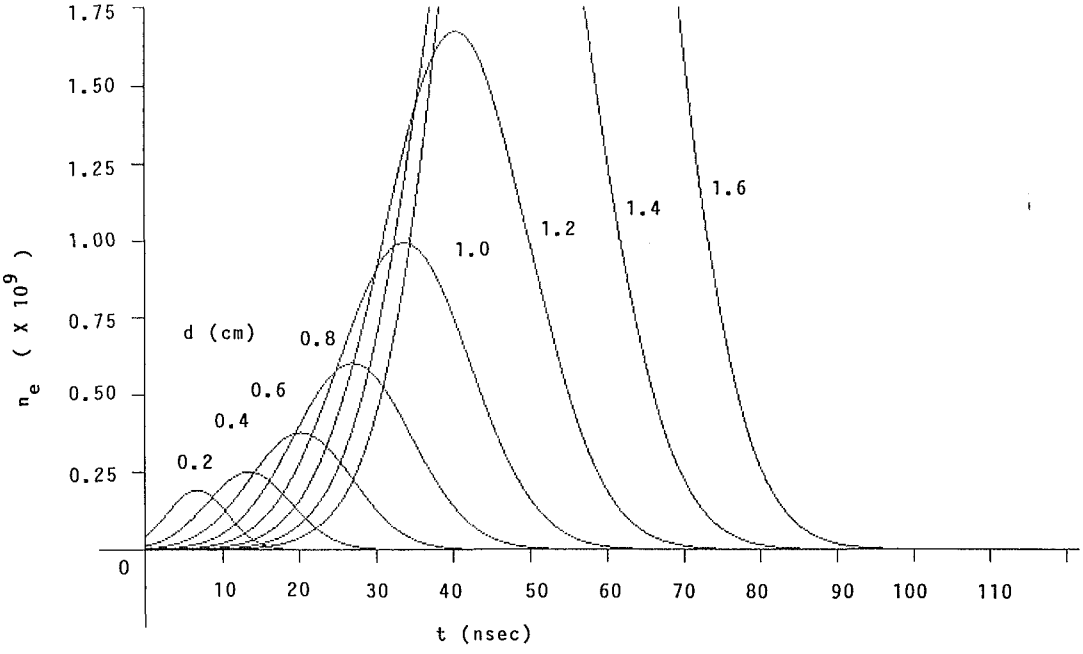

Figure 3.　$E/N=424.2$ Td における電子の到着時間分布

Figure 2, Figure 3 は，陰極からの距離 d(cm)の位置において，電子の到着時間分布がどのように観測されるかを示している。各位置における時間分布はガウス分布で近似されているため，左右対称形となっているが，距離 d が小さいところでは，左側の裾が十分小さくならないうちに $t=0$ の点で途切れている。到着時間 $t=0$ で，$d\neq 0$ の位置に電子が観測されることは有り得ないので，距離 d が小さいところでの到着時間分布としては，(14)式は不適切であることがわかる。またこのことは，陰極近傍は電子エネルギーの緩和過程を含むために，流動平衡状態を仮定して求めた本解析パラメータと（13）式が，この領域では成立しないことを示唆しているものと考えられる。しかし両図から，E/N が 282.8 Td の場合は $d=0.6$ cm, 424.2 では $d=0.4$ cm 以上からは，現実に近い分布となっていることが期待でき，これから逆に，この d の値が実際の放電の緩和距離に近い値を示していると考えられる。

4. ま と め

電子スオームの到着時間分布（ATS）から定義されるパラメータを，ボルツマン方程式の多項式展開による解析で求める方法を確立し，この方法を Kr（クリプトン）ガスに適用して，電子エネルギー分布関数や平均到着時間移動速度 W_m をはじめとするパラメータを計算した。また，得られたパラメータを用いて，到着時間分布の近似解を求めた。

本解析は，従来の理論解析とは，時空対称の関係にあり，通常の実験観測に直接的に対応しているため，今後，重要な解析方法となると考えられる。

最後に，本研究を遂行するにあたり，ご配慮と激励をして下さった本学工学部電気工学科酒井洋輔助教授，医療技術短期大学部診療放射線技術学科山口成厚教授，下妻光夫助教授に心より感謝申し上げます。また，図面の作成に協力いただいた医療技術短期大学部診療放射線技術学科1年高橋秀樹君に厚くお礼申し上げます。

参考文献

Date H., Sakai Y. and Tagashira H. 1989 J. Phys. D : Appl. Phys. 22 1478−81

Huxley L. G. H. and Crompton R. W. 1974 The Diffusion and Drift of Electrons in Gases (New York : Wiley)

Kondo K. and Tagashira H. 1990 to be published in J. Phys. D : Appl. Phys.

Tagashira H. 1985 Technical paper of electrical discharge committee, I. E. E Japan : Gas Discharges ED−85−39

Yachi S., Kitamura Y., Kitamori K. and Tagashira H. 1988 J. Phys. D : Appl. Phys. 21 914−21