



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	赤池情報量基準によるX線フィルム特性曲線の決定法
Author(s)	花田, 博之; 関之山, 勝博; 加藤, 浩
Citation	北海道大学医療技術短期大学部紀要, 4, 33-40
Issue Date	1991-12
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/37532
Type	departmental bulletin paper
File Information	4_33-40.pdf



赤池情報量基準によるX線フィルム特性曲線の決定法

花田 博之・関之山勝博・加藤 浩

Determination of a X-ray film characteristic curve by use of Akaike information criterion

Hiroyuki Hanada, Katsuhiro Sekinoyama and Hiroshi Kato

Abstract

One of the important factors affecting radiographic image quality is the x-ray film characteristic curve of a screen-film system. To find a statistical model which fits the characteristic curve, a finite Fourier series is assumed as an approximate formula of this curve. Then the statistical model is determined by use of maximum likelihood method to the number of terms of the series, and Akaike information criterion (AIC) is computed at the same time.

Although the value of AIC changed a little complexly with the increase of the number of terms of the series, the statistical model which had the first minimum value of AIC was the best one.

要 旨

スクリーンフィルムシステムによるX線検査法では、X線フィルム特性曲線がシステムの画質評価のための重要な役割を担っている。したがって濃度測定により得られたいくつかのデータから、どのような方法で特性曲線を作製するのが重要なこととなる。この論文では特性曲線の近似モデルとして、種々の項数をもつ複数個の有限フーリエ級数を考え、最尤法を用いて最適モデルを定めるとともに、赤池情報量基準との関係をもとめた。

級数の項数の増加につれて赤池情報量基準はやや複雑な変化をするが、最初に現われる極小値に対応する項数のモデルが、曲線の形状の観察で最も良いとされたモデルと一致した。

1. はじめに

近年、コンピュータ技術の進歩とあいまってCR、DSAにみられるようなデジタルラジオグラフィの発展、普及はめざましく、それらを導入する病院、診療所の数も増加の一途をたどっている。しかしこのような時代にあってもスクリーンフィルムシステムは、X線撮影系において主要な位置を占めていることには変わりはない。これは診断技術が確立していること、小規模診療施設でも設置可能なこと、経済的成本が低いこと等にその理由の一端があると考えられるが、そのほかにCRと比較して微小部分の診断に威力を発揮していることも重要な点である¹⁾²⁾。

このスクリーンフィルムシステムによる画質を特徴づけるものは、X線写真コントラスト、鮮鋭度、粒状性の3つである。このうちX線写真コントラストは特性曲線で表わされる。また鮮鋭度はレスポンス関数で記述できるが、その過程でフィルム濃度のX線強度への変換に特性曲線の使用が不可欠である。粒状性については量子モトルのウィーナスペクトルにおいて、フィルムのガンマ（特性曲線の勾配）が重要な因子になっている³⁾⁴⁾。これらの理由からスクリーンフィルムシステムの画質評価に特性曲線は重要な役割を担っている。

特性曲線はいくつかのX線強度に対応するフィルム濃度を曲線で結んだものであり、その曲線の描き方は、曲線定規を利用した手書きのもの、補間法、関数近似法などいくつかの方法が提案されている⁵⁾⁶⁾。しかしそれらの中に、情報量基準を用いて曲線近似モデルを評価したものは見あたらない。

本論文では数理統計学における情報量基準のひとつである赤池情報量基準を用いて、有限フーリエ級数で近似した特性曲線作製の方法を述べる。

2. A I C

一般に実験で得られる統計的なデータ群を支配する真の分布則は未知である。通常それらに既知の統計的モデルをあてはめ、種々のデータ解析を行なう。このとき統計的モデルの平均値、分散等のパラメータの決定法ならびにその評価の仕方は非常に重要である。

近年赤池により提唱された情報量基準は統計的モデルを評価する方法としてすぐれ^{7)~9)}、種々の分野でひろく利用され成功をおさめている^{10)~12)}。この情報量基準は赤池情報量基準(Akaike information criterion)とよばれ、その頭文字をとって通常AICと記される。本論文では以後、赤池情報量基準をAICと記す。

AICは以下のようにして定義される⁹⁾。

いま一対の観測データ群を $x_1, x_2, \dots, x_n$, ならびに $y_1, y_2, \dots, y_n$, それらを確率変数とみなしたときは x ならびに y と記し、統計的モデルを規定するパラメータを $\mathbf{a} = a_1, a_2, \dots, a_t$ とする。このとき x と y がそれぞれ独立な場合、統計的モデルの密度関数を $f(x, y | \mathbf{a})$ とすると

$$L(\mathbf{a}) = f(x_1, y_1 | \mathbf{a}) \cdots \cdots f(x_n, y_n | \mathbf{a}) \quad (1)$$

を尤度とよび、その自然対数をとった

$$l(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n \log f(x_i, y_i | \mathbf{a}) \quad (2)$$

を対数尤度とよぶ。ここで n は観測データ数である。 $l(\mathbf{a})$ は一連の観測値 $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ で定まる $\mathbf{a}$ の関数である。 $\mathbf{a}$ に適当な値を与えれば $l(\mathbf{a})$ を最大にすることができ、そのときの $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{a}}$ を最尤推定量、 $l(\hat{\mathbf{a}})$ を最大対数尤度という。このとき最尤推定量によって定められるモデルが良いモデルとされ、最尤モデルとよばれる。

AICは

$$\text{AIC} = -2 \times (\text{モデルの最大対数尤度}) + 2 \times (\text{モデルのパラメータ数}) \quad (3)$$

で定義される。

いくつかのモデルがあるとき、最小のAICをもつモデルが最適なモデルと考える^{7)~9)}。

3. AIC による特性曲線作製法

一般的な特性曲線作製法では、X線管焦点とフィルム間距離（FFD）を数点もしくは十数点変化させてX線を照射し、それぞれのフィルム濃度をX線強度の常用対数に対してプロットして、それらの点を曲線で結ぶことによって特性曲線を得ている。このときFFDで定まるX線強度は高々十数通りの値をとるだけだが、個々のX線強度に対するフィルム濃度は測定点をえてマイクロフォトメータまたは濃度計で測定すれば、一般に2個以上の数となる。

本論文ではX線強度を x 、それに対応するフィルム濃度を y とすると、 y を x に依存する正規分布母集団の確率変数とみなすことにする。このとき濃度分布 y の統計的モデルの密度関数 $f(x, y|\mathbf{a})$ を

$$f(x, y|\mathbf{a}) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(x)}} e^{-(y-D(x|\mathbf{a}))^2/2\sigma^2(x)} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x < 0, x > 1 \end{cases} \quad (4)$$

と定めることにする⁹⁾。上式において $\sigma^2(x)$ は各X線強度における濃度分布の分散、 $D(x|\mathbf{a})$ は濃度分布の平均値で、ともにX線強度の関数である。 $\mathbf{a}$ は $D(x|\mathbf{a})$ にふくまれるパラメータである。なおX線強度 x はその最大値を1に規格化している。以上により特性曲線の近似式は、(4)式中の $D(x|\mathbf{a})$ である。

本実験では $D(x|\mathbf{a})$ を(5)式に記すような有限フーリエ級数とした。

$$D(x|\mathbf{a}) = a_0 + \sum_{m=1}^M (a_{2m-1} \sin 2m\pi x + a_{2m} \cos 2m\pi x) \quad (5)$$

上式において、 $M=1, M=2, \dots$ と順次変えていき、それぞれの M 値ごとに(2)式、(4)式、(5)式を使って対数尤度を定め、ついで最大対数尤度をもとめれば最尤モデルが決定される。次に各モデルのAICを計算して、曲線の形状とAICの関係を調べた。

したがって数学的手順は以下になる。まず M に適当な値をあたえて、(2)式、(4)式、(5)式より対数尤度 $l(\mathbf{a})$ をもとめる。

$$\begin{aligned} l(\mathbf{a}) &= \sum_{i=1}^n \log f(x_i, y_i|\mathbf{a}) \\ &= \sum_{i=1}^n \log \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(x_i)}} e^{-(y_i-D(x_i|\mathbf{a}))^2/2\sigma^2(x_i)} \\ &= -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log \sigma^2(x_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma^2(x_i)} \{y_i - D(x_i|\mathbf{a})\}^2 \end{aligned} \quad (6)$$

ここで n は濃度データの総個数である。 $l(\mathbf{a})$ はX線強度と濃度の対のデータ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ と各X線強度における濃度分布の分散 $\sigma^2(x)$ が定められ、 $\mathbf{a} = \{a_0, a_1, \dots, a_{2M}\}$ の関数となるので、 $l(\mathbf{a})$ を最大にするための条件、つまり最尤推定量 $\hat{\mathbf{a}} = \{\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{2M}\}$ をもとめるための必要条件は $l(\mathbf{a})$ を $\mathbf{a}$ で微分して、導関数を零とおくことである。導関数は

$$\frac{\partial l(\mathbf{a})}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma^2(x_i)} \{y_i - D(x_i|\mathbf{a})\} \quad (7)$$

$$\frac{\partial l(\mathbf{a})}{\partial a_{2m-1}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma^2(x_i)} \{y_i - D(x_i|\mathbf{a})\} \sin 2m\pi x_i \quad (8)$$

$$\frac{\partial l(\mathbf{a})}{\partial a_{2m}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma^2(x_i)} \{y_i - D(x_i|\mathbf{a})\} \cos 2m\pi x_i \quad (9)$$

となり、それらを零とおくと

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma^2(x_i)} D(x_i | \mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\sigma^2(x_i)} \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{D(x_i | \mathbf{a}) \sin 2m\pi x_i}{\sigma^2(x_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i \sin 2m\pi x_i}{\sigma^2(x_i)} \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{D(x_i | \mathbf{a}) \cos 2m\pi x_i}{\sigma^2(x_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i \cos 2m\pi x_i}{\sigma^2(x_i)} \quad (12)$$

となる。(10), (11), (12)式は $a_0, a_1, \dots, a_{2M}$ を未知数とする連立一次方程式なので、それらより最尤推定量 $\hat{\mathbf{a}} = \{\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{2M}\}$ をもとめることができる。これらを(5)式に代入して、級数の項数 $2M+1$ のモデルのときの特性曲線近似式 $D(x | \hat{\mathbf{a}})$ が決定される。

4. 実験方法

4.1 フィルム濃度試験片の作製

濃度測定のためのフィルム試験片は以下の装置、材料、条件で作製した。X線装置、増感紙、X線フィルムには、それぞれ島津ED-150L, KYOKKO BM-III, サクラAを使用した。照射条件は日本放射線技術学会総合委員会報告¹³⁾の内容におおむね準拠させ、管電圧、管電流、照射時間をそれぞれ80 kV, 30 mA, 0.04 sとした。付加フィルタは3.0 mmAl+0.5 mmCuを用いた。照射方法は逆二乗則を利用した距離法で行ない、相対露光量の対数で0.2間隔になるようにX線管焦点・フィルム間距離(FFD)を32 cmから320 cmまで変化させ、11種類のフィルム濃度試験片を作製した。

4.2 濃度測定

濃度測定にはユニオン光学製マイクロフォトメータMPM-2型を用いた。測定範囲はフィルム中央部 $20 \times 20 \text{ mm}^2$ の正方形部分で、測定スリット幅は試料面で $10 \times 50 \mu\text{m}^2$ である。各露光量での測定データ数は1440個から1800個までの範囲である。これらのデータはマイクロフォトメータの出力電圧に対応しているので、AD変換器を経てパソコンへ入力し、以後の計算処理に使用した。

5. 計算方法、結果ならびに考察

5.1 濃度データの統計的性質

濃度データの、各X線強度ごとの個数、平均値、分散、標準偏差を表1に示す。X線強度はFFD 320 cmのときの値を1として他をその相対値で表わし、さらにその常用対数をとったものである。ただしX線強度が2.4のデータについては後述する。

本実験では表1の各X線強度に属するデータ群を、濃度の正規分布母集団とした。また表1の平均値をX線強度に対してプロットしたものを図1に示す。ただし黒い四角マークについては後述する。

表1 濃度データの統計的性質

X線強度	個 数	平均値	分 散	標準偏差
0.0	1700	0.225	0.00267	0.052
0.2	1800	0.236	0.00211	0.046
0.4	1750	0.279	0.00250	0.050
0.6	1650	0.388	0.00325	0.057
0.8	1440	0.549	0.00369	0.061
1.0	1700	1.043	0.00602	0.078
1.2	1700	1.772	0.00991	0.100
1.4	1700	2.520	0.01299	0.114
1.6	1750	3.180	0.01321	0.115
1.8	1750	3.483	0.00784	0.089
2.0	1750	3.641	0.00833	0.091
2.4	1000	3.714	0.00839	0.092

5.2 有限フーリエ級数近似

有限フーリエ級数近似を適用するためには、対象とする曲線を周期関数の形にする必要がある。フーリエ級数の収束を高めるため、X線強度2.4の位置に仮想的濃度値を配置し、その点を中心とした右側に実験値を対称的に配置したものを周期関数の1周期分とした。1周期分の

データ配置の様子を図2に示す。仮想的濃度値の平均値は、X線強度1.8と2.0に対する濃度の平均値を D_1 と D_2 とすると、 $D_2 + (D_2 - D_1)/2$ より定め⁹⁾、分散はX線強度2.0のときの値と同じものを用いた。この平均値と分散をパラメータとする正規乱数を1000個発生させて、それを仮想的濃度データの母集団とした。表1のX線強度2.4にそれらの値を記し、その平均値を図1の黒い四角マークで示す。特性曲線の有限フーリエ級数近似の適合度を視覚的に判断する場合は、図1の12個の点を基準においた。

ところで図1の白い四角マークを曲線で結べば特性曲線が得られるが、コンピュータで曲線近似する際に濃度データの母集団すべてを利用すると、表1と図2より合計38380個のデータを処理対象としなければならない。これはパソコンの容量や計算時間の点で現実的ではないので、次節以降の考えのもとで、より数少ないデータで曲線を作製した。

5.3 最尤モデルと曲線の形状

表1はマイクロフォトメータの測定値から得られたものなので、濃度の時系列データと考えられる。本実験では各X線強度に属する時系列データのうち最初の20個を濃度データ y_i とし、表1の分散を $\sigma^2(x_i)$ として(6)~(12)式に適用して最尤モデル $D(x|\bar{a})$ をもとめた。

以上の計算を(5)式の M を1,2,... (したがってフーリエ係数の個数 A を3,5,...)と変化させて実行した。得られた最尤モデルを図3に示す。図中の A はフーリエ係数の個数である。また濃度の平均値に対する曲線の適合度を示すため、図1の12個の点を記した。 $A=25$ 以上では値が発散して特性曲線の領域内に曲線を描くことができなかった。

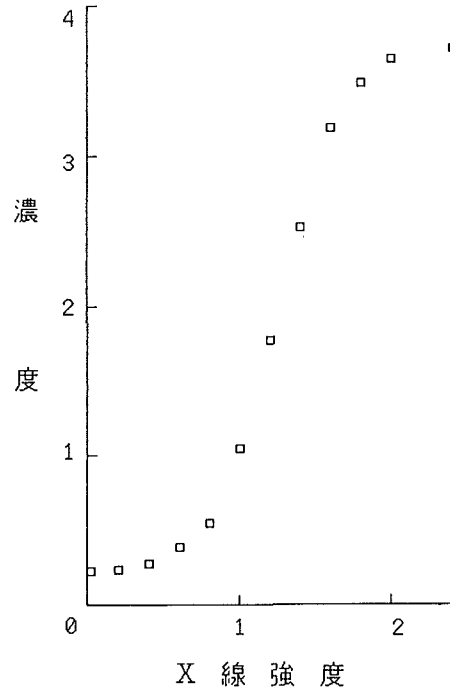


図1 X線強度に対する濃度データの平均値

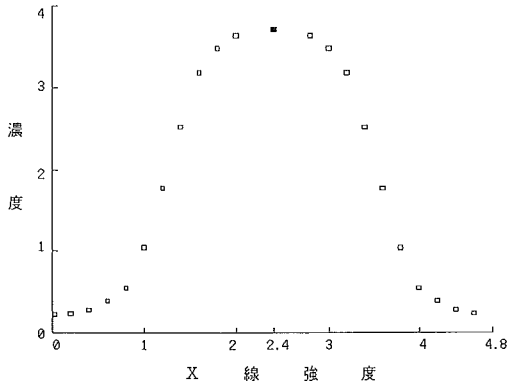


図2 周期関数のデータ配置

表2 最尤モデルのAIC

フーリエ係数の 個数	AIC	(13)式の値
3	3268.23	4734.39
5	1222.86	2689.02
7	-952.93	513.24
9	-1058.84	407.33
11	-1129.22	336.94
13	-1127.39	338.77
15	-1132.79	333.38
17	-1135.07	331.09
19	-1145.10	321.07
21	-1144.25	321.91
23	-1140.62	325.54

5.4 最尤モデルのAIC

(3)式中の「モデルのパラメータ数」は、今までの記述からフーリエ係数の個数のことである。したがって(10)~(12)式を解いて得られる $\hat{\mathbf{a}}$ を(6)式の $l(\mathbf{a})$ に代入して最大対数尤度をもとめれば、(3)式のAICが決定される。

以上の過程で得られたAICを表2に示す。またフーリエ係数の個数 A に対するAICの変化を図4に示す。ただし、(3)式のAICは各モデルに共通な項をふくんでいるので、変化の様子を分かりやすくするために、モデルに依存する項のみの値を図4のAICとした。その項を以下に記す。

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma^2(x_i)} \{y_i - D(x_i|\hat{\mathbf{a}})\}^2 + 2(2M+1) \quad (13)$$

5.5 曲線の形状とAIC

どの最尤モデルが特性曲線近似として適正かを視覚的に判断するために、図3を観察してみる。

$A=3$ と $A=5$ は測定値との一致度が全体にわたってきわめて悪い。フーリエ級数の項数が少ないために、急激な変化に対応できないためである。

$A=7$ は足部での一致度が良くない。

$A=9$ は肩部での一致度が良くない。

$A=11$ と $A=13$ は足部、直線部、肩部の全域にわたって良好な一致度を示す。

$A=15$ は $A=11$ と $A=13$ に比較して仮想値との一致度が劣る。

$A=17$ はX線強度0.0と0.2との濃度がほとんど同一となり、実験値を正しく反映していない。

$A=19$ と $A=21$ は足部と肩部の両方で一致度が悪く、かつ乱れている。

$A=23$ は全体にわたって一致度が良くない。特に肩部で大きく乱れる。これは高周波成分の影響が大きくなったものと思われる。

ところで、AICはその値そのものの大きさには意味があるのではなく、他のモデルのAICとの大小関係に意味をもつ。表2と図4を観察すると、AICは A の増加とともに最初は単調に減少して、 $A=11$ で極小値をとり、 $A=13$ から再び減少して $A=19$ で最小値をとった後、増加に転じている。図4全体で観察すると、 $A=11$ と $A=13$ は両者で停留点を形成しているとも考えられる。

曲線の形状の観察では、明らかに $A=11$ と $A=13$ が最良のモデルであるので、AICの変化におい

赤池情報量基準によるX線フィルム特性曲線の決定法

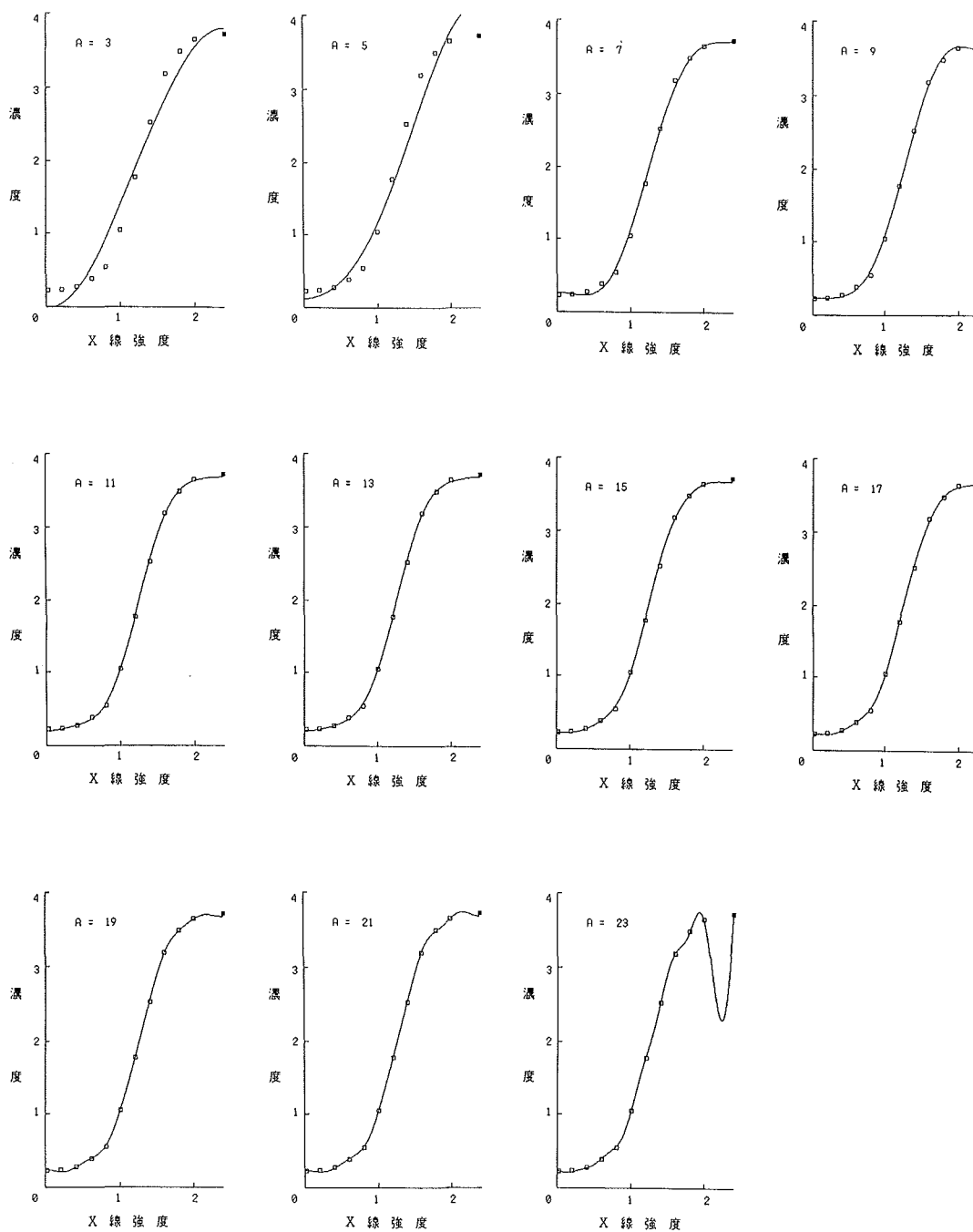


図3 最尤モデルの曲線の形状

で最初に現われる極小値または停留点を見つけることが、良いモデル発見の指針になると考える。

6. ま と め

距離法による特性曲線作製のために、数理統計学の AIC を利用する有限フーリエ級数近似を行なって、以下の結果を得た。

- (1) 有限フーリエ級数の特性曲線近似に対して、AIC を適用する方法を導いた。
- (2) 級数の項数を変えて作られた最尤モデルの中から最良のモデルを決定するためには、曲線の形状の観察とともに AIC の停留点を見つける必要がある。

最後に、本研究を遂行するにあたりコンピュータの利用法ならびに周辺機器の使用法について有益な助言を下された、本学医療技術短期大学部診療放射線技術学科の荒井博史氏に感謝いたします。

文 献

- 1) 鬼塚英雄：輝天性蛍光体イメージング・プレートを用いた胸部デジタルラジオグラフィーの診断能，日本医放会誌，49(2)，177-190，1989
- 2) 小田純一：胸部単純X線撮影における FCR (Fuji Computed Radiography) の画像評価，日本医放会誌，50(12)，1485-1498，1990
- 3) 土井邦雄，他：増感紙フィルム系の MTF とウィナースペクトル，1988，日本放射線技術学会
- 4) 土井邦雄：放射線画像の特性と測定，1988，日本放射線技術学会
- 5) H. Chan : Determination of radiographic screen-film system characteristic curve and its gradient by use of a curve-smoothing technique, Med. Phys., 5(5), 443-447, 1978
- 6) 山田金市，他：フーリエ級数によるX線フィルムの特性曲線の近似法，日放技学誌，44(12)，1675-1681，1988
- 7) H. Akaike : Information theory and an extension of the maximum likelihood principle, 2nd Inter. Symp. on Information Theory, 267-281, 1973
- 8) H. Akaike : A new look at the statistical model identification, IEEE Trans. Autom. Contr., 716-723, 1974
- 9) 坂本慶行，石黒真木夫，北川源四郎：情報量統計学，27-64，1983，共立出版
- 10) 赤池弘次，中川東一郎：ダイナミックシステムの統計的解析と制御，94-122，1972，サイエンス社
- 11) 赤池弘次，他：モデルによってデータを測る，数理科学，No. 213，7-66，1981
- 12) 赤池弘次：統計的検定の新しい考え方，数理科学，No. 198，51-57，1979
- 13) 日本放射線技術学会総合委員会：増感紙フィルムシステムのX線センシトメトリについて，日放技学誌，40(1)，59-78，1984

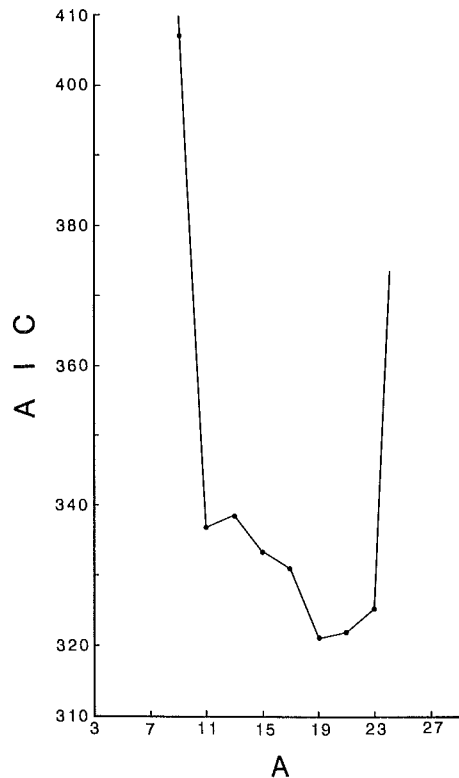


図4 最尤モデルの AIC 変化