



|                  |                                                                                   |
|------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| Title            | 非有界境界関数のDirichlet問題についての1つの例                                                      |
| Author(s)        | 長坂, 行雄                                                                            |
| Citation         | 北海道大学医療技術短期大学部紀要, 5, 11-14                                                        |
| Issue Date       | 1992-12                                                                           |
| Doc URL          | <a href="https://hdl.handle.net/2115/37539">https://hdl.handle.net/2115/37539</a> |
| Type             | departmental bulletin paper                                                       |
| File Information | 5_11-14.pdf                                                                       |



# 非有界境界関数のDirichlet問題 についての1つの例

長坂 行雄

## An example of the Dirichlet problem for unbounded boundary functions

Yukio Nagasaka

### Abstract

Let  $D$  be a bounded region in the complex plane and  $\varphi$  be an extended real-valued function on the boundary  $\partial D$  of  $D$ . We are concerned with the Dirichlet problem by the Perron-Brelot method. If  $\varphi$  is resolutive, we denote by  $H_\varphi^D$  the solution. Let  $b$  a point of  $\partial D$ . If there is a barrier at  $b$ , then  $\lim_{z \rightarrow b} H_\varphi^D(z) = \varphi(b)$  for any bounded continuous function  $\varphi$  on  $\partial D$ .

In this paper, we show that there is a region  $D$  and an extended real-valued function  $\varphi$  on  $\partial D$  having the following properties :

- (i)  $\varphi$  is continuous and resolutive,
- (ii) there exists a continuum  $K$  on  $\partial D$  such that  $\lim_{z \rightarrow b} H_\varphi^D(z) \neq \varphi(b)$  for every  $b \in K$ .

### 1. はじめに

$D$ を複素平面上の有界領域とする。 $D$ の境界  $\partial D$ 上の $\pm\infty$ を許す実数値関数 $\varphi$ に対して、Perron-Brelotの方法によるDirichlet問題の解が存在するとき、 $\varphi$ は可解であるといい、その解を $H_\varphi^D$ で表す。 $H_\varphi^D$ は $D$ 上の調和関数で、 $\varphi$ が有界連続関数の場合は、 $D$ の正則境界点 $b$ において境界値 $\varphi(b)$ をとる、即ち

$$\lim_{z \rightarrow b} H_\varphi^D(z) = \varphi(b) \dots\dots\dots(1)$$

が成立つ。Brelot [1]において、 $\varphi$ が非有界な場合には $\varphi$ が連続であっても正則境界点 $b$ で必ずしも(1)が成立たないと述べられている。この

論文の目的は、次の2つの性質をもつ有界領域  $D$ と $\partial D$ 上の関数 $\varphi$ を実際に作ることである。

- (i)  $\varphi$ は $+\infty$ を許す連続関数で可解である。
- (ii)  $\partial D$ 上に連続体 $K$ が存在して、 $K$ の各点  $b$ で $\lim_{z \rightarrow b} H_\varphi^D(z) \neq \varphi(b)$ である。

連続体 $K$ の各点は $D$ の正則境界点であるから、この例が目的のものになっている。

Dirichlet問題についての定理、記号などは、Constantinescu-Cornea [2]に従った。

### 2. 領域 $D$

実数の狭義単調減少数列  $\{p_n\}$  で

$$p_1 = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$$

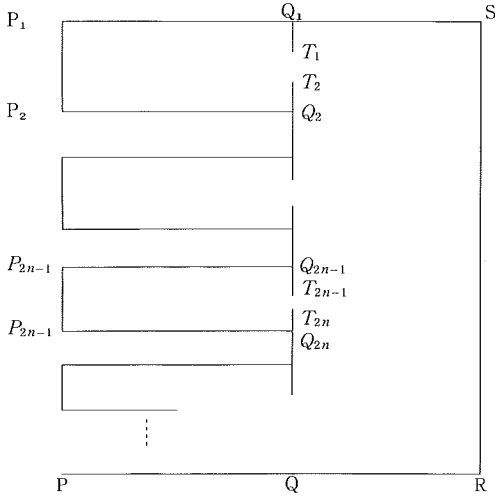


図1 領域D

をみたすものを任意に1つとり以後、固定する。複素平面上の点  $P, Q, R, S$ , 点列  $\{P_n\}, \{Q_n\}, \{T_n\}$  を次のように定める。

$$P = 0, \quad Q = \frac{1}{2}, \quad R = 1, \quad S = 1 + i$$

$$P_n = p_n i, \quad Q_n = \frac{1}{2} + p_n i$$

$$T_{2n-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (p_{2n-1} + p_{2n} + \varepsilon_n) i$$

$$T_{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (p_{2n-1} + p_{2n} - \varepsilon_n) i$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

数列  $\{\varepsilon_n\}$  は  $0 < \varepsilon_n < \frac{1}{2} (p_{2n-1} - p_{2n})$  をみたして4節で定める。これらの点を次の順で結んだ折線

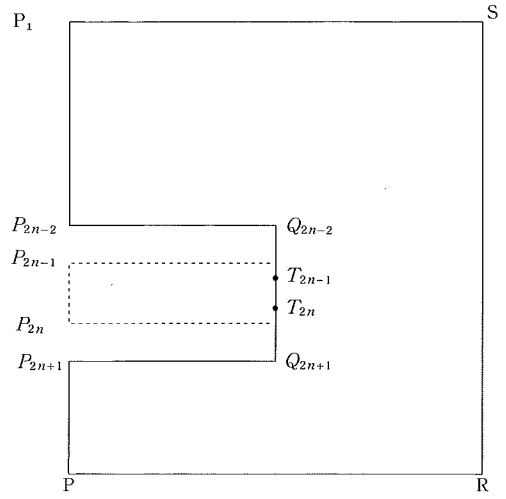
$$P \quad Q \quad R \quad S \quad Q_1 \quad P_1 \quad P_2 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad P_3 \quad P_4 \quad Q_4 \quad \dots$$

$$\dots \quad Q_{2n-1} \quad P_{2n-1} \quad P_{2n} \quad Q_{2n} \quad \dots$$

で囲まれた領域を  $G$  とし、 $G$  から線分の列  $\{Q_{2n-1} T_{2n-1}\}, \{T_{2n} Q_{2n}\}$  を除いた領域を  $D$  とする。(図1が領域  $D$  である。)

### 3. 境界関数 $\varphi$

$a, b$  は実数で  $a > b$  とする。4つの頂点を、 $A = ai, B = bi, C = \frac{1}{2} + bi, D = \frac{1}{2} + ai$  とする長方形の領域を  $\Omega$  とし、 $\Omega$  に関する辺  $AB$  の調和測度を  $\omega$  とする。 $\omega$  は  $\Omega$  で正值調和で


 図2 領域  $D_n$ 

$\partial\Omega$  上  $AB$  で1, 他の部分で0の境界値をとる関数である。 $\omega$  の  $\Omega$  内の線分

$$K = \left\{ z = x + yi \mid \frac{1}{8} \leq x \leq \frac{3}{8}, y = \frac{a+b}{2} \right\}$$

上の最小値  $\min \omega(z)$  は正であるから、任意の自然数  $n$  に対して、実数  $\alpha > 0$  を十分大きくとりさえすれば  $\min \alpha \omega(z) \geq n$  とできる。

2節の  $D$  において、各  $n$  について頂点を  $P_{2n-1}, P_{2n}, Q_{2n}, Q_{2n-1}$  とする長方形の領域を考えその辺  $P_{2n-1} P_{2n}$  の調和測度を  $\omega_n$  とし、この長方形内の線分  $K_n$  を

$$K_n = \left\{ z = x + yi \mid \frac{1}{8} \leq x \leq \frac{3}{8}, y = \frac{1}{2} (p_{2n-1} + p_{2n}) \right\}$$

とする。次の条件をみたす実数の増加列  $\{\alpha_n\}$  を任意に1つ固定する。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = +\infty,$$

$$\text{各 } n \text{ について } \min_{z \in K_n} \alpha_n \omega_n(z) \geq n.$$

各  $n$  について  $\partial D$  上の境界関数  $f_n$  を次のように決める。線分  $P_{2n-1} P_{2n}, P_{2n-1} Q_{2n-1}, P_{2n} Q_{2n}, Q_{2n-1} T_{2n-1}, T_{2n} Q_{2n}$  上でそれぞれ

$$f_n(yi) = \alpha_n \quad (p_{2n} \leq y \leq p_{2n-1})$$

$$f_n(x + p_{2n-1}i) = f_n(x + p_{2n}i)$$

$$= \min(\alpha_n, \frac{1}{x} - \frac{1}{2})$$

$$(0 \leq x \leq \frac{1}{2})$$

$$f_n(\frac{1}{2} + yi) = 0$$

$$\left( \begin{array}{l} p_{2n} \leq y \leq \frac{1}{2}(p_{2n-1} + p_{2n} - \varepsilon_n) \\ \frac{1}{2}(p_{2n-1} + p_{2n} + \varepsilon_n) \leq y \leq p_{2n-1} \end{array} \right)$$

とし、 $D$ の残りの境界、 $n$ と異なる $m$ のついた各線分や折線 $PRSQ_1$ 上では0とする。 $f_n$ は $\partial D$ 上で $0 \leq f_n \leq \alpha_n$ をみたす連続関数でPerron-Brelot方法によるDirichlet問題に関して可解である。 $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ とおく。

1節で述べた $\partial D$ 上の関数 $\varphi$ を定義する。線分 $PQ$ 上では、

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \quad (0 \leq x \leq \frac{1}{2})$$

$\partial D$ の線分 $PQ$ 以外の点で

$$\varphi(z) = f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

とする。線分 $PQ$ 上で $f = 0$ である。 $\partial D$ 上 $0 \leq f \leq \varphi$ であり、 $\varphi$ は $\varphi(0) = +\infty$ 、 $z = 0$ 以外では $0 \leq \varphi(z) < +\infty$ をみたす $+\infty$ を許す連続関数であることがわかる。

#### 4. $\{\varepsilon_n\}$ の決め方

$D$ の一点 $z_0$ を $z_0 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}i$ とする。各 $n$ について折線

$$PRSP_1 P_{2n-2} Q_{2n-2} Q_{2n+1} P_{2n+1} P$$

で囲まれた領域を $D_n$ とする。(図2が領域 $D_n$ である。)  $\partial D_n$ 上の線分 $Q_{2n-2} Q_{2n+1}$ 上にある線分 $T_{2n-1} T_{2n}$ の長さ $\varepsilon_n$ を決める。 $D_n$ に関する線分 $T_{2n-1} T_{2n}$ の調和測度を $\omega'_n$ とする。 $D_n$ は中心 $s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(p_{2n-1} + p_{2n})i$ 、半径 $\sqrt{2}$ の円板 $U(s_n, \sqrt{2})$ に含まれるから

$$h_{\varepsilon_n}(z) = \frac{\log(\sqrt{2}/|z - s_n|)}{\log(\sqrt{2}/\varepsilon_n)}$$

とおくと、 $D_n - U(s_n, \varepsilon_n)$ 上で $\omega'_n \leq h_{\varepsilon_n}$ となる。 $\varepsilon_n \rightarrow 0$ のとき、 $h_{\varepsilon_n}(z_0) \rightarrow 0$ であるから、

$\varepsilon_n > 0$ を十分小さくとることにより、 $h_{\varepsilon_n}(z_0) < \frac{1}{2^n \alpha_n}$ をみたすようにできる。 $D \cap D_n$ 上で $H_{f_n}^D \leq \alpha_n \omega'_n$ であるから、数列 $\{\varepsilon_n\}$ を、 $\varepsilon_n > 0$ であって一点 $z_0$ で

$$H_{f_n}^D(z_0) < \frac{1}{2^n} \quad n=1, 2, 3, \dots$$

をみたしているように決めるのである。

そうすると、

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_{f_n}^D(z_0) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

となる。ここで[1]の22ページにある定理3.1を用いると、 $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は可解な関数であって、 $D$ で $H_f^D = \sum_{n=1}^{\infty} H_{f_n}^D$ が成立つことがわかった。

#### 5. $D$ 、 $\varphi$ が条件(i), (ii)をみたすこと

(i)について、 $\varphi$ が可解な関数であることを示す。 $f$ は可解であり、 $\partial D$ 上の線分 $PQ$ を除いて $f$ と $\varphi$ は一致しているから、 $D$ に関して線分 $PQ$ の調和測度 $w$ が0であることが示されると、 $\varphi$ も可解であることがわかり、 $H_{\varphi}^D = H_f^D$ が成立つ。([1]の28ページの定理3.3.) 線分 $PQ$ の調和測度が0であることは次のように考えるとわかる。折線

$$P_1 P_{2n} Q_{2n} QRSP_1$$

で囲まれた領域を $D'_n$ とし、 $D'_n$ に関する線分 $Q_n Q$ の調和測度を $w_n$ とすると、 $D \cap D'_n$ 上で $0 \leq w \leq w_n$ となる。一方、線分 $Q_n Q$ の長さ $p_n$ は $p_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ )であるから、 $\log$ を用いて4節と同じ方法で、 $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n(z_0) = 0$ がわかり $D$ で $w = 0$ となる。

(ii)について、 $\{\alpha_n\}$ の作り方から、各 $n$ について $K_n$ 上で

$$H_{\varphi}^D = H_f^D \geq H_{f_n}^D \geq \alpha_n \omega_n \geq n$$

このことから、線分 $PQ$ 上の連続体

$$K = \{z = x + yi \mid \frac{1}{8} \leq x \leq \frac{3}{8}, y = 0\}$$

の任意の点 $b$ において、

$$\varphi(b) = \frac{1}{b} - \frac{1}{2} < +\infty,$$

しかし,  $\overline{\lim}_{z \rightarrow b} (z) = +\infty$ .

## 6. おわりに

この例から, 非有界な境界関数  $\varphi$  については, 連続であっても, 正則境界点  $b$  で必ずしも  $\varphi(b)$  をとらないことがわかった。しかし

$$A = \{b \in \partial D \mid \lim_{z \rightarrow b} H_{\varphi}^D(z) = \varphi(b)\}$$

とおくとき,  $D$  に関する  $\partial D - A$  の調和測度は 0 でないだろうか。

## 文 献

- [1] M. Brelot : Sur la mesure harmonique et le problème de Dirichlet, Bull. Sci. Math. (2) 69 (1945), 153–156.
- [2] C. Constantinescu-A. Conea : Ideale Ränder Riemannscher Flächen, Springer, 1963.