HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	非有界境界関数のDirichlet問題についての1つの例
Author(s)	長坂, 行雄
Citation	北海道大学医療技術短期大学部紀要, 5, 11-14
Issue Date	1992-12
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/37539
Type	departmental bulletin paper
File Information	5_11-14.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

非有界境界関数のDirichlet問題についての１つの例

長坂　行雄

An example of the Dirichlet problem for unbounded boundary functions

Yukio Nagasaka

Abstract

Let D be a bounded region in the complex plane and φ be an extended real-valued function on the boundary ∂D of D. We are concerned with the Dirichlet problem by the Perron-Brelot method. If φ is resolutive, we denote by H_φ^D the solution. Let b a point of ∂D. If there is a barrier at b, then $\lim_{z\to b} H_\varphi^D(z)=\varphi(b)$ for any bounded continuous function φ on ∂D.

In this paper, we show that there is a region D and an extended real-valued function φ on ∂D having the following properties :

(i) φ is continuos and resolutive,

(ii) there exists a continuum K on ∂D such that $\lim_{z\to b} H_\varphi^D(z)\neq\varphi(b)$ for every $b\in K$.

1．はじめに

Dを複素平面上の有界領域とする。Dの境界∂D上の$\pm\infty$を許す実数値関数φに対して，Perron-Brelotの方法によるDirichlet問題の解が存在するとき，φは可解であるといい，その解をH_φ^Dで表す。H_φ^DはD上の調和関数で，φが有界連続関数の場合は，Dの正則境界点bにおいて境界値$\varphi(b)$をとる，即ち

$$\lim_{z\to b} H_\varphi^D(z)=\varphi(b) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

が成立つ。Brelot［1］において，φが非有界な場合にはφが連続であっても正則境界点bで必ずしも(1)が成立たないと述べられている。この論文の目的は，次の２つの性質をもつ有界領域Dと∂D上の関数φを実際に作ることである。

(i)　φは$+\infty$を許す連続関数で可解である。

(ii)　∂D上に連続体Kが存在して，Kの各点bで$\lim_{z\to b} H_\varphi^D(z)\neq\varphi(b)$である。

連続体Kの各点はDの正則境界点であるから，この例が目的のものになっている。

Dirichlet問題についての定理，記号などは，Constantinescu-Cornea［2］に従った。

2．領　域　D

実数の狭義単調減少数列$\{p_n\}$で

$$p_1=1,\ \lim_{n\to\infty} p_n=0$$

北海道大学医療技術短期部大学一般教育
College of Medical Technology, Hokkaido University

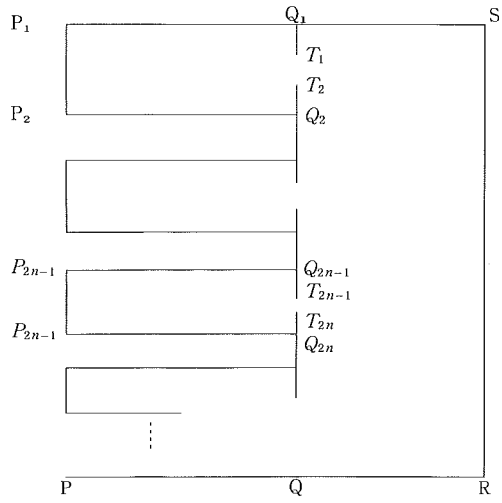

図1　領域D

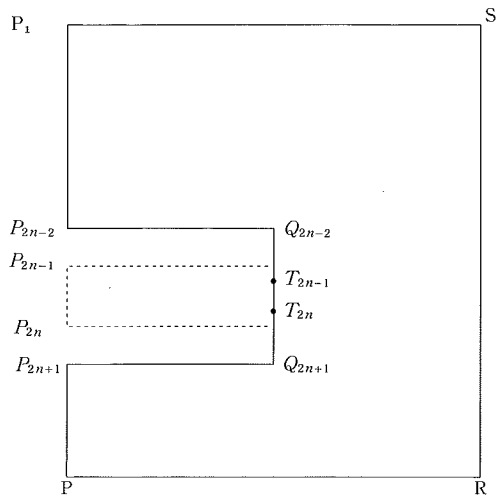

図2　領域 D_n

をみたすものを任意に1つとり以後，固定する。複素平面上の点P, Q, R, S, 点列$\{P_n\}$, $\{Q_n\}$, $\{T_n\}$ を次のように定める。

$$P=0,\quad Q=\frac{1}{2},\quad R=1,\quad S=1+i$$

$$P_n=p_ni,\quad Q_n=\frac{1}{2}+p_ni$$

$$T_{2n-1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(p_{2n-1}+p_{2n}+\varepsilon_n)i$$

$$T_{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(p_{2n-1}+p_{2n}-\varepsilon_n)i$$

$$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots.$$

数列$\{\varepsilon_n\}$は$0<\varepsilon_n<\frac{1}{2}(p_{2n-1}-p_{2n})$をみたしていて4節で定める。これらの点を次の順で結んだ折線

$$P\ Q\ R\ S\ Q_1\ P_1\ P_2\ Q_2\ Q_3\ P_3\ P_4\ Q_4\ \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\ Q_{2n-1}\ P_{2n-1}\ P_{2n}\ Q_{2n}\ \cdots\cdots$$

で囲まれた領域をGとし，Gから線分の列$\{Q_{2n-1}\ T_{2n-1}\}$, $\{T_{2n}\ Q_{2n}\}$ を除いた領域をDとする。（図1が領域Dである。）

3．境界関数φ

a, bは実数で$a>b$とする。4つの頂点を，$A=ai$, $B=bi$, $C=\frac{1}{2}+bi$, $D=\frac{1}{2}+ai$ とする長方形の領域をΩとし，Ωに関する辺ABの調和測度をωとする。ωはΩで正値調和で$\partial\Omega$上ABで1，他の部分で0の境界値をとる関数である。ωのΩ内の線分

$$K=\left\{z=x+yi\mid\frac{1}{8}\leqq x\leqq\frac{3}{8},\ y=\frac{a+b}{2}\right\}$$

上の最小値$\min\omega(z)$は正であるから，任意の自然数nに対して，実数$\alpha>0$を十分大きくとりさえすれば$\min\alpha\omega(z)\geqq n$とできる。

2節のDにおいて，各nについて頂点をP_{2n-1}, P_{2n}, Q_{2n}, Q_{2n-1}とする長方形の領域を考えその辺$P_{2n-1}P_{2n}$の調和測度をω_nとし，この長方形内の線分K_nを

$$K_n=\left\{z=x+yi\ \middle|\ \begin{array}{l}\frac{1}{8}\leqq x\leqq\frac{3}{8},\\ y=\frac{1}{2}(p_{2n-1}+p_{2n})\end{array}\right\}$$

とする。次の条件をみたす実数の増加列$\{\alpha_n\}$を任意に1つ固定する。

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=+\infty,$$

各nについて　$\min_{z\in K_n}\alpha_n\omega_n(z)\geqq n.$

各nについて∂D上の境界関数f_nを次のように決める。線分$P_{2n-1}P_{2n}$, $P_{2n-1}Q_{2n-1}$, $P_{2n}Q_{2n}$, $Q_{2n-1}T_{2n-1}$, $T_{2n}Q_{2n}$上でそれぞれ

$$f_n(yi)=\alpha_n\quad(p_{2n}\leqq y\leqq p_{2n-1})$$

$$f_n(x+p_{2n-1}i)=f_n(x+p_{2n}i)$$

$$=\min\left(\alpha_n,\ \frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(0\leqq x\leqq\frac{1}{2}\right)$$

$$f_n\left(\frac{1}{2}+yi\right)=0$$

$$\left(\begin{matrix}p_{2n}\leqq y\leqq\frac{1}{2}(p_{2n-1}+p_{2n}-\varepsilon_n)\\ \frac{1}{2}(p_{2n-1}+p_{2n}+\varepsilon_n)\leqq y\leqq p_{2n-1}\end{matrix}\right)$$

とし，Dの残りの境界，nと異なるmのついた各線分や折線$PRSQ_1$上では0とする。f_nは∂D上で$0\leqq f_n\leqq\alpha_n$をみたす連続関数でPerron-Brelot方法によるDrichlet問題に関して可解である。$f=\sum_{n=1}^{\infty}f_n$とおく。

1節で述べた∂D上の関数φを定義する。線分PQ上では，

$$\varphi(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\qquad\left(0\leqq x\leqq\frac{1}{2}\right)$$

∂Dの線分PQ以外の点で

$$\varphi(z)=\mathrm{f}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$$

とする。線分PQ上で$f=0$である。∂D上$0\leqq f\leqq\varphi$であり，φは$\varphi(0)=+\infty$，$z=0$以外では$0\leqq\varphi(z)<+\infty$をみたす$+\infty$を許す連続関数であることがわかる。

4．$\{\varepsilon_n\}$の決め方

Dの一点z_0を$z_0=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}i$とする。各$n$について折線

$$PRSP_1\ P_{2n-2}\ Q_{2n-2}\ Q_{2n+1}\ P_{2n+1}\ P$$

で囲まれた領域をD_nとする。(図2が領域D_nである。) ∂D_n上の線分$Q_{2n-2}\ Q_{2n+1}$上にある線分$T_{2n-1}\ T_{2n}$の長さε_nを決める。D_nに関する線分$T_{2n-1}\ T_{2n}$の調和測度をω'_nとする。D_nは中心$s_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(p_{2n-1}+p_{2n})\ i$，半径$\sqrt{2}$の円板$U(s_n,\ \sqrt{2})$に含まれるから

$$h_{\varepsilon n}(z)=\frac{\log(\sqrt{2}/|z-s_n|)}{\log(\sqrt{2}/\varepsilon_n)}$$

とおくと，$D_n-U(s_n,\ \varepsilon_n)$上で$\omega'_n\leqq h_{\varepsilon n}$となる。$\varepsilon_n\to 0$のとき，$h_{\varepsilon n}(z_0)\to 0$であるから，$\varepsilon_n>0$を十分小さくとることにより，$h_{\varepsilon n}(z_0)<\frac{1}{2^n\alpha_n}$をみたすようにできる。　$D\cap D_n$上で$H^D_{f_n}\leqq\alpha_n\ \omega'_n$であるから，数列$\{\varepsilon_n\}$を，$\varepsilon_n>0$であって一点$z_0$で

$$H^D_{f_n}(z_0)<\frac{1}{2^n}\quad n=1,2,3,\ \cdots\cdots$$

をみたしているように決めるのである。
そうすると，

$$\sum_{n=1}^{\infty}H^D_{f_n}(z_0)<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$$

となる。ここで[1]の22ページにある定理3.1を用いると，$f=\sum_{n=1}^{\infty}f_n$は可解な関数であって，Dで$H^D_f=\sum_{n=1}^{\infty}H^D_{f_n}$が成立つことがわかった。

5．D，φが条件(i)，(ii)をみたすこと

(i)について，φが可解な関数であることを示す。fは可解であり，∂D上の線分PQを除いてfとφは一致しているから，Dに関して線分PQの調和測度wが0であることが示されると，φも可解であることがわかり，$H^D_\varphi=H^D_f$が成立つ。([1]の28ページの定理3.3.) 線分PQの調和測度が0であることは次のように考えるとわかる。折線

$$P_1\ P_{2n}\ Q_{2n}\ QRSP_1$$

で囲まれた領域をD'_nとし，D'_nに関する線分$Q_n\ Q$の調和測度をw_nとすると，$D\cap D'_n$上で$0\leqq w\leqq w_n$となる。一方，線分$Q_n\ Q$の長さp_nは$p_n\to 0\ (n\to\infty)$であるから，logを用いて4節と同じ方法で，$\lim_{n\to\infty}w_n(z_0)=0$がわかりDで$w=0$となる。

(ii)について，$\{\alpha_n\}$の作り方から，各nについてK_n上で

$$H^D_\varphi=H^D_f\geqq H^D_{f_n}\geqq\alpha_n\ \omega_n\geqq n$$

このことから，線分PQ上の連続体

$$K=\{z=x+yi\mid\frac{1}{8}\leqq x\leqq\frac{3}{8},\ y=0\}$$

の任意の点bにおいて，

$$\varphi(b)=\frac{1}{b}-\frac{1}{2}<+\infty,$$

しかし，$\overline{\lim_{z\to b}}\ (z)=+\infty$.

6．おわりに

この例から，非有界な境界関数φについては，連続であっても，正則境界点bで必ずしも$\varphi(b)$をとらないことがわかった。しかし

$$A=\{b\in\partial D \mid \lim_{z\to b} H_{\varphi}^{D}(z)=\varphi(b)\}$$

とおくとき，Dに関する$\partial D-A$の調和測度は0でないだろうか。

文　献

[1] M. Brelot : Sur la mesure harmonique et le problème de Dirichlet, Bull. Sci. Math. (2) 69 (1945), 153－156.

[2] C. Constantinescu-A. Conea : Ideale Ränder Riemannscher Elächen, Springer, 1963.