



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	フーリエ変換形ボルツマン方程式による横方向電子スオームパラメータの解析
Author(s)	伊達, 広行; 近藤, 敬一; 田頭, 博昭
Citation	北海道大学医療技術短期大学部紀要, 5, 91-96
Issue Date	1992-12
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/37542
Type	departmental bulletin paper
File Information	5_91-96.pdf



フーリエ変換形ボルツマン方程式による横方向 電子スオームパラメータの解析

伊達 広行・近藤 敬一*・田頭 博昭**

Analysis of the Transverse Electron Swarm Parameters by a Fourier Transformed Boltzmann Equation

Hiroyuki Date, Kei-ichi Kondo* and Hiroaki Tagashira**

Abstract

A method for calculating the electron swarm parameters in gases for the transverse direction to the electric field by using a Fourier transformed Boltzmann equation is presented. In the method, transverse swarm parameters such as the transverse diffusion coefficient D_T are derived from the dispersion relation of the equation.

The method is applied to sulphur hexafluoride (SF_6), and it is shown that the present method is a reliable means to deduce the transverse coefficients. The lateral development of the electron swarm for the steady-state-Townsend experiment is also discussed.

要 旨

本稿では、気中放電の進展を記述する上で重要な、電界と垂直な方向に関する電子スオームパラメータを、フーリエ変換されたボルツマン方程式の固有値問題をもとに求める方法を紹介し、実際のガス中における計算の結果を報告する。また、電子付着が電離よりもより頻繁に起こるガス放電条件で、定常タウンゼント法実験に対応する解析を行い、横方向の電子密度分布について考察する。

1. はじめに

気体中の放電は、電子が電界下で加速され気体分子との衝突過程による電離増倍（電子なだれ）が生ずることによって起こる現象であり、放電形態を分類するといった現象論的な研究の歴史を経て、近年、電子や原子・分子の衝突確率を定量的に考慮し、微視的な立場からその振る舞いが明らかにされるようになった。

電子なだれ現象が種々の条件（気圧、電界強度、境界条件等）の下で起こることによって、異なる放電形態が現れると考えられるが、それらの現象を解明するには、一個の初期電子が電子なだれ

北海道大学医療技術短期大学部診療放射線技術学科

* 阿南工業高等専門学校電気工学科

** 北海道大学工学部電気工学科

Department of Radiological Technology, College of Medical Technology, Hokkaido University

* Department of Electrical Engineering, Anan Technical College

** Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Hokkaido University

(あるいは電子スオーム)としてどのように成長していくかを知ることが、第一に重要となる。このため、これまで多くの研究者によって、放電中の気体分子の電離度が十分低い、いわゆる弱電離気体領域において、一つの孤立した電子スオームが時間的・空間的に発展する過程が、実験と理論の両面から詳細に調べられてきた(例えば、Huxley and Crompton 1974)。それによって、気体の電子衝突断面積等の基本的な物理定数が決定されたり、半導体プラズマプロセスをはじめとする、工学的な応用に向けた放電パラメータや電子エネルギー分布等が求められ得るようになった。

本稿では、筆者らがこれまで行ってきた電子スオームの挙動に関するボルツマン方程式解析の一つとして、最近行われた電界と垂直方向の電子スオームパラメータ解析について解説する。この解析では、フーリエ変換されたボルツマン方程式の固有値問題から、いわゆる分散関係が求められ、スオームパラメータが決定される。解析の結果はさらに、電子付着性気体中での定常タウンゼント(steady-state-Townsend: SST)実験に対するスオームの横方向の広がりに関する知見を深め、新しいパラメータの導入をもたらすものとなっている。

2. 理論ならびに方法

電界 E の方向を z 軸にとると、 E と垂直な方向 x に依存する分布関数 f は、時刻 t で以下のようなボルツマン方程式に従う。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{eE}{m} \frac{\partial}{\partial v_x} + J\right) f(x, v, t) = 0 \quad (1)$$

ここで、 y 軸方向と電界 E の z 軸方向の成分は積分されており、

$$f(x, v, t) = \iint f(r, v, t) dy dz. \quad (2)$$

である。 e と m はそれぞれ電子電荷と質量を、 J は衝突項、 r は位置ベクトル $r(x, y, z)$ 、 $v(v_x, v_y, v_z)$ は電子速度を表す。上式は、一個の電子スオームが電界方向に向かって成長していく様子を、電界軸と垂直な平面に投影して観測する分布関数を表わしているものと考えられる。

$x = 0$ の点で初期電子がパルス状に与えられた後時間が十分経過した後の、いわゆる流体力学的な平衡状態(hydrodynamic regime)の下では、(1)式の解は以下のようなフーリエ積分で表されることが考えられる(Parker and Lowke 1969)。

$$f(x, v, t) = (2\pi)^{-1} \int dk \hat{f}(k, v) \exp\{ikx - \omega(k)t\} \quad (3)$$

ここで、 k は波数をあらわすフーリエパラメータであり、 $\omega(k) = -\sum \omega^{(r)}(-ik)^r$ (4)

$$\hat{f}(k, v) = \sum \hat{f}^{(r)}(v)(-ik) \quad (5)$$

である。(4)式の $\omega^{(r)}$ ($r=0, 1, 2, 3, \dots$)は横方向電子スオームパラメータであり、 $\omega^{(0)}$ は実効電離周波数($Ri-Ra$: Ri は電離周波数、 Ra は電子付着周波数)、 $\omega^{(2)}$ は横方向拡散係数(D_T)に対応している。(3)式を(1)に代入することにより(5)式の $\hat{f}(k, v)$ に対する方程式が次のように与えられる。

$$\left(ikv_x + \frac{eE}{m} \frac{\partial}{\partial v_x} + J\right) \hat{f}(k, v) = \omega(k) \hat{f}(k, v) \quad (6)$$

$\hat{f}(k, v)$ と $\omega(k)$ は、それぞれ各 k に対する固有関数とその固有値となっている。この式は、量子力学におけるSchrödingerの波動方程式(時間を含まない方程式)に類似した形を成しており、(4)と(5)

式は ik を摂動パラメータとする摂動法の展開式となっていることがわかる。(6)式を様々な ik について解き、 ω を求めることにより、 $\omega - ik$ なるいわゆる分散関係が得られるが、この関係を(4)式にある ik についての多項式でカーブフィッティングすることにより、多項式の係数である $\omega^{(r)}$ ($r=0, 1, 2, 3, \dots$)、すなわち横方向スオームパラメータを求めることが可能となる。

本解析では、(6)式を解くために、 $\hat{f}(k, v)$ を速度空間について球面調和関数で展開する。 $\hat{f}(k, v)$ は θ_v 、 ϕ_v をそれぞれ極角、方位角として次式のように展開できる。

$$\hat{f}(k, v) = \sum_l \left[\hat{f}_l(k, v) P_l(\cos \theta_v) - ik \cdot \hat{f}_l^1(v) P_l^1(\cos \theta_v) \cos \phi_v \right] \quad (7)$$

(7)式を(6)式に代入すると

$$\begin{aligned} & \left[-\omega(p) + \frac{eE}{m} \frac{(l+1)P_{l+1} + lP_{l-1}}{2l+1} \frac{\partial}{\partial v} \right. \\ & \quad \left. - \frac{eE}{m} \frac{1}{v} \frac{l(l+1)}{2l+1} \{P_{l+1} - P_{l-1}\} + J_l \right] \hat{f}_l(p, v) \\ & \quad + \frac{1}{2} p^2 v \frac{l(l+1)}{2l+1} \{P_{l+1} - P_{l-1}\} \hat{f}_l^1(v) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

が得られる。ここで、 $p = ik$ であり、 J_l ($l=0, 1, 2, \dots$) は伊達ら(1990)と同じ通常用いられる形の衝突項である。 $\omega(p)$ は、(6)式を $d\mathbf{v} = v^2 \sin \theta_v dv d\theta_v d\phi_v$ に関して積分することにより

$$\omega(p) = \frac{-\frac{p^2}{3} \int v^3 \hat{f}_1^1(v) dv + \int N \bar{q}_i v^3 \hat{f}_0(p, v) dv}{\int v^2 \hat{f}_0(p, v) dv} \quad (9)$$

のように与えられる。ここで、 N は気体分子密度を、 $\bar{q}_i$ は $q_i - q_a$ (q_i : 電離衝突断面積、 q_a : 付着衝突断面積)を表す。

(8)式の計算において、 $\hat{f}_l^1(v)$ ($l=1, 2, 3, \dots$) は横(x 軸)方向に特有な項であり、 p に依存せず、Yachi et al(1991)と同様な方法により、あらかじめ計算しておく必要がある。 $\hat{f}_l(p, v)$ ($l=0, 1, 2, \dots$)の算出は、ルジャンドルの二項近似解析とガレルキン法を組み合わせた方法(例えば、伊達ら、1990を参照のこと)により行われる。

3. 結果と考察

上記理論を SF_6 ガスに対して適用し、換算電界 $E/N = 500, 362, 250$ Tdにおいて、 ik を変数とする ω 曲線を算出した結果を図1に示す。 SF_6 の断面積には、Itoh et al (1988)が決定したものを使用した。各曲線が ω 軸に関して対称形となっていることがわかる。これは、(6)、(9)式において p が2乗の項として入っていることから明かであり、横方向のスオームの広がり $x=0$ の点に関して対称であることを意味していると考えられる。図1の曲線は、 ω を ik の適当な間隔($\Delta(ik) = 0.05 \sim 0.2$)で繰り返して求めその点を結んだものであるが、この曲線を構成する多数の点に対し(4)の多項式を仮定し、最小二乗法を用いてカーブフィッティングすると、多項式の係数である横方向パラメータが求められる。ただし、左右対称形なので、 ik の奇数乗の項は消えることに注意されたい。表1に最小二乗法によって計算したパラメータの値を示す。表1の結果は、 $(ik)^4$ 以降の高次の係数は $(ik)^0$ 、 $(ik)^2$ のものに比べ非常に小さく、図1の曲線がほとんど完全な放物線を描いていることを示してい

る。

図1に示した3つの曲線は、電離周波数と電子付着周波数がほぼ釣り合う E/N の条件 ($E/N = 362 \text{ Td}$) の他、電離が優勢な $E/N = 500 \text{ Td}$ と電子付着が優勢な $E/N = 250 \text{ Td}$ のときのものを表しており、曲線と縦軸との交点が実効電離周波数を表している。

$E/N = 250 \text{ Td}$ においては、曲線は縦軸だけではなく横軸 (ik -軸) とも2点で交差している。筆者らはこれまでに、電界と平行する縦方向に対して本解析と同様に分散曲線を求め、その曲線と ik -軸の交わる点が steady-state-Townsend (SST) 実験におけるタウンゼントの1次電離係数 α_T を表すことを示した (Date et al 1992)。横方向で、しかも電子付着が電離よりも優勢な条件における、この解析での交点の値は何を意味するのだろうか？これに対し、縦方向とのアナロジーから次のような SST 法に対応する解析を試みた。

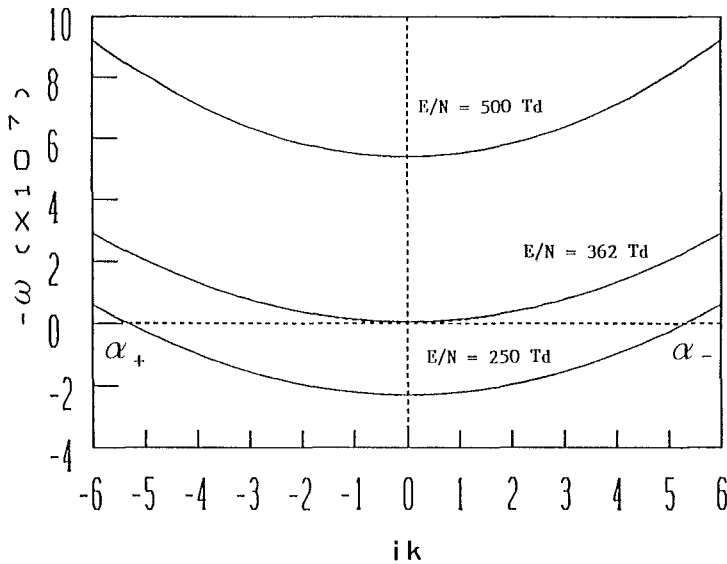


図1 SF₆に対する横方向 $\omega - ik$ 曲線

表1 SF₆中における横方向電子スオームパラメータ
(最小二乗法：14次方程式を仮定)

	$E/N = 500 \text{ Td}$	$E/N = 362 \text{ Td}$	$E/N = 250 \text{ Td}$
$\omega^{(0)}$ (1/s) [$=\bar{R}_1$]	5.397E+7	0.005E+7	-2.294E+7
$\omega^{(2)}$ (cm ² /s) [$=D_T$]	1.06E+6	0.81E+6	0.85E+6
$\omega^{(4)}$ (cm ⁴ /s) [$=D_{T4}$]	0.00	0.00	0.00
$\omega^{(6)}$ (cm ⁶ /s) [$=D_{T6}$]	0.00	0.00	0.00
			$ \alpha_+ = \alpha_- = 5.18$

今、横方向の電子流連続の式は、拡散係数 (D_T) までの横方向パラメータを用いて、

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = \bar{R}_i n(x,t) + D_T \frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2} \quad (10)$$

と表される。(10)式の右辺は、厳密には $\omega^{(r)}$ ($r = 4, 6, \dots$)といった高次のパラメータも係数として含む密度展開式となるはずであるが、表1の結果から、高次パラメータは非常に小さいものとして無視した。(10)式の解は次式のように求められる。

$$n(x,t) = \frac{N_0 e^{\nu t}}{\sqrt{4\pi D_T t}} \exp\left[-\frac{x^2}{4D_T t}\right], \quad \nu = R_i - R_a (= \bar{R}_i) \quad (11)$$

さて、SST実験に対するモデルとしては、 $n(x,t)$ は時間 t に関して0から ∞ まで積分されなければならないが、(11)式は ν が負のときのみ積分可能であることがわかる。 ν が負のとき、 $r = -\nu$ ($r > 0$)として

$$\begin{aligned} n(x) &= \int_0^\infty n(x,t) dt = 2A \int_0^\infty \exp\left[-s^2 - \frac{B}{s^2}\right] ds \\ &= \frac{N_0}{\sqrt{4D_T r}} e^{-\sqrt{r/D_T} x} \end{aligned} \quad (12)$$

が得られる。

ただし、 $A = \frac{N_0}{\sqrt{4\pi D_T r}}$, $B = \frac{rx^2}{4D_T}$ である。

また、(12)式での N_0 は毎秒あたりに $x = 0$ の位置に注入される初期電子数である。(12)式より、結局

$$\frac{dn(x)}{dx} = -\sqrt{r/D_T} n(x) \quad (13)$$

が得られる。(13)式の右辺の係数 $-\sqrt{r/D_T}$ は、縦方向における電離係数 α_T と同じディメンジョンをもつものであり、電界と垂直な平面に投影したSST実験の際の電子密度が、 $x = 0$ の点から横方向へ、指数関数的に $-\sqrt{r/D_T}$ の係数で減少していることを表している。

図1の曲線の交点 (図中 α_+ , α_- で示す) の値は $|\alpha_+| = |\alpha_-| = 5.18$ であり、一方(13)式の係数は、表1の $\omega^{(0)} (= \nu)$ と $\omega^{(2)} (= D_T)$ の値を用いて $\sqrt{r/D_T} = 5.20$ が得られる。両者が良く一致していることから、図1の α_+ は $-\sqrt{r/D_T}$ を、 α_- はそれと対称的に x が負の領域における係数 $\sqrt{r/D_T}$ の値を、それぞれ表していると考えられる。 $\nu \geq 0$ となる条件では、 $t = 0 \sim \infty$ の積分に対して、電子数が各 x 点で発散してしまい、このとき分散関係では、 $\omega(ik) = 0$ を満たす ik が2つの実数解を持たないという点が注目される。

以上のように、電離衝突よりも付着衝突が優勢な条件においては、SST法に対して、横方向においても電子密度の勾配を表す係数が定義され得ることがわかった。上記の事実はさらに、縦方向における従来の α_T は、2つの勾配係数の1つであり、電界と平行な z 軸において $z = 0$ の点 (初期電子が注入される点) よりも上流側 ($z < 0$) で定義される係数が、もう一つ存在することを示唆していると考えられる。

本解析は、ボルツマン方程式を位置に関してフーリエ変換し、その固有値問題を量子力学における摂動法と同様な手法により解いて、固有値へのカーブフィッティングからパラメータを求めるも

ので、これまで計算が困難であった高次のパラメータまでを、一括して求められる点が大きな特長である。

また、今回求めた ω は、2. の(6)式を満たす固有関数系の最小固有値に対応する解と考えられるもので、他の固有値と共に存在する固有関数系を用いることにより、ボルツマン方程式の時間や場所に依存する過渡の解(電子エネルギー分布と過渡パラメータ)を、Schödinger 方程式の場合と同様に求めることが可能になると考えられる。

4. ま と め

本稿では、一定電界中において電界と垂直な方向で定義される電子スオームパラメータを、フーリエ変換されたボルツマン方程式の固有値問題から得られた分散関係をもとに、カーブフィッティングによって求める方法を紹介し、これを SF₆ ガス中のスオーム解析に適用した例を示した。

また、結果において、電子付着衝突が電離衝突よりもより頻繁に起こる放電条件で、定常townゼント法実験に対応する横方向の電子密度勾配を表す係数が、分散曲線と横軸(ik -軸)の交点で与えられることが示された。

最後に、本研究を遂行するにあたり、ご配慮と激励をして下った本学医療技術短期大学部診療放射線技術学科下妻光夫助教授、横方向パラメータに関してご指摘いただいた室蘭工業大学伊藤秀範助教授に心より感謝申し上げます。

参考文献

- 伊達広行, 谷内 滋, 近藤敬一, 田頭博昭 1990 北海道大学医療技術短期大学部紀要, No. 3 61-9
 Date H, Kondo K, Yachi S and Tagashira H 1992 J. Phys. D : Appl. Phys. 25 1330-4
 Huxley L G H and Crompton R W 1974 The Diffusion and Drift of Electrons in Gases (New York : Wiley)
 Itoh H, Miura Y, Ikuta N, Nakao Y and Tagashira H 1988 J. Phys. D : Appl. Phys. 21 922-30
 Parker J H Jr and Lowke J J 1969 Phys. Rev. 181 No. 1 290-301
 Yachi S, Date H, Kitamori K and Tagashira H 1991 J. Phys. D : Appl. Phys. 24 573-80