



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Schwingungen des im Grundriss gekrümmten Trägers
Author(s)	Yamada, Yosei
Citation	Memoirs of the Faculty of Engineering, Hokkaido Imperial University, 1, 23-55
Issue Date	1928
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/37664
Type	departmental bulletin paper
File Information	1_23-55.pdf



Schwingungen des im Grundriss gekrümmten Trägers

Von

Yosei Yamada

(eingegangen am 7. September 1925)

Einleitung.

Ein an einem oder beiden Enden in Stützen eingebauter Träger, der im Grundriss eine Kurve bildet, unterliegt an jedem Querschnitte sowohl Biegungs- wie Drehmomenten. An den Stützen treten Einspannungsmomente beider Arten in Erscheinung, und so lange diese nicht ermittelt sind, ist das Moment, das irgend einen Bruch verursachen könnte, nicht zu bestimmen. Wenn Momente und Reactionen an den beiden Enden des Trägers gegeben sind, so wird das Moment an einem beliebigen Punkt des Trägers ohne weiters ermittelt werden können.

Die Verschiebung eines beliebigen Punktes wurde in drei Richtungen, nämlich in der Richtung der Tangente, in der der Normalen und in der der vertikalen Richtung an demselben Punkte betrachtet.

Wenn der Träger eine bewegte Last hat, so muss ausser dem Gewicht auch die Fliehkraft berücksichtigt werden. Diese Fliehkraft ist je nach der Stellung der Last verschieden. Die Verschiebungen eines beliebigen Punktes des Trägers ändern sich mit dem Stellungswechsel der Last.

Man kann sich solche Verschiebungen auch so vorstellen, als ob sie unter veränderlichen Lasten an dem Punkte ausgeführt werden. Der Verfasser hat sich die Sache so gedacht, dass diese veränderlichen Lasten die durch Seile und Rollen in den drei Richtungen wirkenden Gewichte sind.

Es wird im folgenden gezeigt, wie solche veränderlichen Lasten ermittelt werden können und in welcher Formel die Beziehung der durch diese veränderlichen Lasten verursachten Verschiebungen und der Zeit zueinander steht.

1. Schwingungen des Trägers mit schwingenden Lasten.

Die Verschiebungen irgendeiner Stelle (x, y) eines im Grundriss gekrümmten Trägers von konstantem Querschnitt unter der Wirkung einer Last P beim Punkt (ξ, η) in beliebigen Richtung können wir allgemein durch die Formeln

$$(1) \begin{cases} \zeta^v = \chi^{v,v} P^v & \text{in vertikaler Richtung,} \\ \zeta^t = \chi^{t,t} P^t + \chi^{t,n} P^n & \text{in der Richtung der Tangente,} \\ \zeta^n = \chi^{n,t} P^t + \chi^{n,n} P^n & \text{in der Richtung der Normalen,} \end{cases}$$

darstellen, wenn die Stützen ganz fest sind.

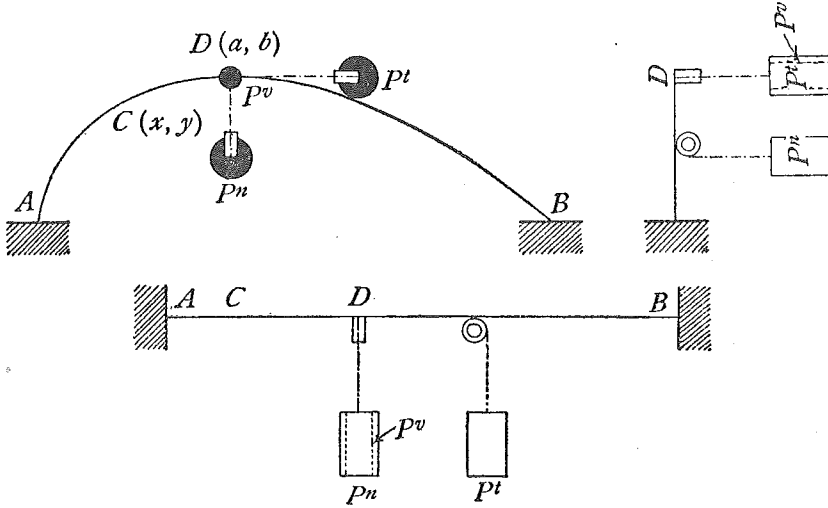
In obigen Formeln bedeuten P^v, P^t, P^n , die vertikalen, tangentialen, normalen Komponenten von P und $\chi^{v,v}, \chi^{t,t}, \chi^{t,n}, \chi^{n,t}, \chi^{n,n}$, die Faktoren, die von der Lage der ins Auge gefassten beliebigen Träger-Stelle und derjenigen des Angriffsortes der Belastung sowie etwaiger Stützenweite und von den Trägheitsmomenten, dem Elastizitäts- und Schermodul abhängen. (Siehe, Y. Yamada, In der Ebene gekrümmte Träger und Ramensystem mit gekrümmten Riegeln. Fukuoka).

Wie in Abb. 1 gezeigt, greifen die drei Lasten P^v, P^t, P^n durch Seile und Rollen den Träger beim Punkt D an.

Die Verschiebungen irgendeinen Stelle $C(x, y)$ können wir alsdann durch die Formeln

$$(2) \begin{cases} \zeta_1^v = \chi_1^{v,v} P^v & \text{in vertikaler Richtung,} \\ \zeta_1^t = \chi_1^{t,t} P^t + \chi_1^{t,n} P^n & \text{in der Richtung der Tangente,} \\ \zeta_1^n = \chi_1^{n,t} P^t + \chi_1^{n,n} P^n & \text{in der Richtung der Normalen,} \end{cases}$$

Abb. I.



darstellen, wobei $\chi_1^{v,v}, \chi_1^{t,t}, \chi_1^{n,t}, \chi_1^{t,n}, \chi_1^{n,n}$, als Spezialfälle aus $\chi^{v,v}, \chi^{t,t}, \chi^{n,t}, \chi^{t,n}, \chi^{n,n}$, abgeleitet werden können.

Betrachten wir den Stab zunächst auch noch als masselos und stellen uns unter den Lasten P^v, P^t, P^n , die Gewichte von Massen m_D^v, m_D^t, m_D^n , vor, die an der Angriffstelle durch Seile und Rollen in vertikaler, tangentialer, normalen Richtungen befestigt sind, so ist offenbar in (2) ohne sonstige Änderung mit der Erdbeschleunigung g nur

$$(3) \quad P^v = m_D^v g; \quad P^t = m_D^t g; \quad P^n = m_D^n g$$

zu setzen. Werden dagegen die Massen in Bewegung versetzt, so dass die Auslenkungen $\zeta_{D,1}^v, \zeta_{D,1}^t, \zeta_{D,1}^n$ ihrer Befestigungsstelle zeitliche Änderung erfahren, so wirken die Stabkräfte im Sinne einer Rückführung in die Ruhelage, mithin ist in diesem Falle

$$(4) \quad \begin{cases} P^v = m_D^v \left(g - \frac{d^2 \zeta_{D,1}^v}{dt^2} \right) \\ P^t = m_D^t \left(g - \frac{d^2 \zeta_{D,1}^t}{dt^2} \right) \\ P^n = m_D^n \left(g - \frac{d^2 \zeta_{D,1}^n}{dt^2} \right) \end{cases}$$

womit (2) übergeht in

$$(5) \begin{cases} \zeta_1^v = \chi_1^{v,v} m_D^v \left(g - \frac{d^2 \zeta_{D,1}^v}{dt^2} \right) \\ \zeta_1^t = \chi_1^{t,t} m_D^t \left(g - \frac{d^2 \zeta_{D,1}^t}{dt^2} \right) + \chi_1^{t,n} m_D^n \left(g - \frac{d^2 \zeta_{D,1}^n}{dt^2} \right) \\ \zeta_1^n = \chi_1^{n,t} m_D^t \left(g - \frac{d^2 \zeta_{D,1}^t}{dt^2} \right) + \chi_1^{n,n} m_D^n \left(g - \frac{d^2 \zeta_{D,1}^n}{dt^2} \right) \end{cases}$$

Daraus erkennen wir, dass sich die augenblicklichen Verschiebungen des Stabes zusammensetzen aus statischen Auslenkungen

$$(5)' \begin{cases} (\zeta_1^v)' = \chi_1^{v,v} m_D^v g \\ (\zeta_1^t)' = \chi_1^{t,t} m_D^t g + \chi_1^{t,n} m_D^n g \\ (\zeta_1^n)' = \chi_1^{n,t} m_D^t g + \chi_1^{n,n} m_D^n g \end{cases}$$

infolge der Gewichtsbelastungen und dynamischen Beträge

$$(5)'' \begin{cases} (\zeta_1^v)'' = -\chi_1^{v,v} m_D^v \frac{d^2 \zeta_{D,1}^v}{dt^2} \\ (\zeta_1^t)'' = -\chi_1^{t,t} m_D^t \frac{d^2 \zeta_{D,1}^t}{dt^2} - \chi_1^{t,n} m_D^n \frac{d^2 \zeta_{D,1}^n}{dt^2} \\ (\zeta_1^n)'' = -\chi_1^{n,t} m_D^t \frac{d^2 \zeta_{D,1}^t}{dt^2} - \chi_1^{n,n} m_D^n \frac{d^2 \zeta_{D,1}^n}{dt^2} \end{cases}$$

Die Verschiebungen $\zeta_{D,1}^v$, $\zeta_{D,1}^t$, $\zeta_{D,1}^n$, an der Befestigungsstelle D der Lasten P^v , P^t , P^n können als Spezialfälle aus (5) abgeleitet werden, nämlich

$$(6) \begin{cases} \zeta_{D,1}^v = \chi_{D,1}^{v,v} m_D^v \left(g - \frac{d^2 \zeta_{D,1}^v}{dt^2} \right) \\ \zeta_{D,1}^t = \chi_{D,1}^{t,t} m_D^t \left(g - \frac{d^2 \zeta_{D,1}^t}{dt^2} \right) \\ \zeta_{D,1}^n = \chi_{D,1}^{n,n} m_D^n \left(g - \frac{d^2 \zeta_{D,1}^n}{dt^2} \right) \end{cases}$$

oder

$$(6)' \begin{cases} m_D^v \frac{d^2 \zeta_{D,1}^v}{dt^2} + \frac{\zeta_{D,1}^v}{\chi_{D,1}^{v,v}} = m_D^v g \\ m_D^t \frac{d^2 \zeta_{D,1}^t}{dt^2} + \frac{\zeta_{D,1}^t}{\chi_{D,1}^{t,t}} = m_D^t g \\ m_D^n \frac{d^2 \zeta_{D,1}^n}{dt^2} + \frac{\zeta_{D,1}^n}{\chi_{D,1}^{n,n}} = m_D^n g \end{cases}$$

wobei $\chi_{D,1}^{v,v}$, $\chi_{D,1}^{t,t}$, $\chi_{D,1}^{n,n}$ als Spezialfälle aus $\chi_i^{v,v}$, $\chi_i^{t,t}$, $\chi_i^{n,n}$ abgeleitet werden können.

Wir können, unter Einführung der Abkürzungen

$$(7) \begin{cases} (\zeta_{D,1}^v)'' = \zeta_{D,1}^v - \chi_{D,1}^{v,v} m_D g \\ (\zeta_{D,1}^t)'' = \zeta_{D,1}^t - \chi_{D,1}^{t,t} m_D^t g \\ (\zeta_{D,1}^n)'' = \zeta_{D,1}^n - \chi_{D,1}^{n,n} m_D^n g \end{cases}$$

für die dynamischen Auslenkungen, mit

$$(8) \begin{cases} \frac{d^2 \zeta_{D,1}^v}{dt^2} = \frac{d^2 (\zeta_{D,1}^v)''}{dt^2} \\ \frac{d^2 \zeta_{D,1}^t}{dt^2} = \frac{d^2 (\zeta_{D,1}^t)''}{dt^2} \\ \frac{d^2 \zeta_{D,1}^n}{dt^2} = \frac{d^2 (\zeta_{D,1}^n)''}{dt^2} \end{cases}$$

an Stelle von (6) schreiben

$$(9) \begin{cases} \frac{d^2 (\zeta_{D,1}^v)''}{dt^2} + \frac{(\zeta_{D,1}^v)''}{\chi_{D,1}^{v,v} m_D^v} = 0 \\ \frac{d^2 (\zeta_{D,1}^t)''}{dt^2} + \frac{(\zeta_{D,1}^t)''}{\chi_{D,1}^{t,t} m_D^t} = 0 \\ \frac{d^2 (\zeta_{D,1}^n)''}{dt^2} + \frac{(\zeta_{D,1}^n)''}{\chi_{D,1}^{n,n} m_D^n} = 0 \end{cases}$$

Die Integrale dieser Formeln ergeben alsdann die zeitlichen Änderungen der $(\zeta_{D,1}^v)''$, $(\zeta_{D,1}^t)''$, $(\zeta_{D,1}^n)''$, und damit auch wegen (7) diejenigen der Auslenkungen $\zeta_{D,1}^v$, $\zeta_{D,1}^t$, $\zeta_{D,1}^n$, durch deren Einführung in (5) schliesslich der Bewegungszustand des ganzen Stabes festgelegt ist.

Die Differentialgleichungen (9) haben die allgemeinen Integrale

$$(10) \begin{cases} (\zeta_{D,1}^v)'' = A_1 \cos \frac{t}{\sqrt{\chi_{D,1}^{v,v} m_D^v}} + C_1 \sin \frac{t}{\sqrt{\chi_{D,1}^{v,v} m_D^v}} \\ (\zeta_{D,1}^t)'' = A_2 \cos \frac{t}{\sqrt{\chi_{D,1}^{t,t} m_D^t}} + C_2 \sin \frac{t}{\sqrt{\chi_{D,1}^{t,t} m_D^t}} \\ (\zeta_{D,1}^n)'' = A_3 \cos \frac{t}{\sqrt{\chi_{D,1}^{n,n} m_D^n}} + C_3 \sin \frac{t}{\sqrt{\chi_{D,1}^{n,n} m_D^n}} \end{cases}$$

oder mit $(\zeta_{D,1}^v)'' = (\zeta_{D,1}^t)'' = (\zeta_{D,1}^n)'' = 0$ für $t=0$ und $t=t_0^v=t_0^t=t_0^n$

$$(11) \begin{cases} o = A_1 = A_2 = A_3 \\ o = C_1 \sin \frac{t_o^v}{\sqrt{\chi_{D,1}^{v,v} m_D^v}} = C_2 \sin \frac{t_o^t}{\sqrt{\chi_{D,1}^{t,t} m_D^t}} = C_3 \sin \frac{t_o^n}{\sqrt{\chi_{D,1}^{n,n} m_D^n}} \end{cases}$$

Die letzte dieser Bedingungen wird nur erfüllt für

$$C_1 = C_2 = C_3 = o \quad \text{oder} \\ \sin \frac{t_o^v}{\sqrt{\chi_{D,1}^{v,v} m_D^v}} = \sin \frac{t_o^t}{\sqrt{\chi_{D,1}^{t,t} m_D^t}} = \sin \frac{t_o^n}{\sqrt{\chi_{D,1}^{n,n} m_D^n}} = o$$

Hiervon hat $C_1 = C_2 = C_3 = o$ keinen Sinn. Es bleibt nur die Bedingung

$$\sin \frac{t_o^v}{\sqrt{\chi_{D,1}^{v,v} m_D^v}} = \sin \frac{t_o^t}{\sqrt{\chi_{D,1}^{t,t} m_D^t}} = \sin \frac{t_o^n}{\sqrt{\chi_{D,1}^{n,n} m_D^n}} = o \quad \text{übrig,}$$

woraus sich die Schwingungsdauer zu

$$(12) \begin{cases} t_o^v = 2\pi \sqrt{\chi_{D,1}^{v,v} m_D^v} & \text{in vertikaler Richtung,} \\ t_o^t = 2\pi \sqrt{\chi_{D,1}^{t,t} m_D^t} & \text{in der Richtung der Tangente,} \\ t_o^n = 2\pi \sqrt{\chi_{D,1}^{n,n} m_D^n} & \text{in der Richtung der der Normalen,} \end{cases}$$

berechnet.

Da die Konstanten C_1, C_2, C_3 die dynamischen Halb- Schwingungsweiten bedeuten, so kann man durch Beobachtung diese Konstanten ermitteln.

Aus (7) errechnet man

$$(13) \begin{cases} \zeta_{D,1}^v = C_1 \sin \frac{t}{\sqrt{\chi_{D,1}^{v,v} m_D^v}} + \chi_{D,1}^{v,v} m_D^v g \\ \zeta_{D,1}^t = C_2 \sin \frac{t}{\sqrt{\chi_{D,1}^{t,t} m_D^t}} + \chi_{D,1}^{t,t} m_D^t g \\ \zeta_{D,1}^n = C_3 \sin \frac{t}{\sqrt{\chi_{D,1}^{n,n} m_D^n}} + \chi_{D,1}^{n,n} m_D^n g \end{cases}$$

$$(14) \begin{cases} \frac{d^2 \zeta_{D,1}^v}{dt^2} = - \frac{C_1}{\chi_{D,1}^{v,v} m_D^v} \sin \frac{t}{\sqrt{\chi_{D,1}^{v,v} m_D^v}} \\ \frac{d^2 \zeta_{D,1}^t}{dt^2} = - \frac{C_2}{\chi_{D,1}^{t,t} m_D^t} \sin \frac{t}{\sqrt{\chi_{D,1}^{t,t} m_D^t}} \\ \frac{d^2 \zeta_{D,1}^n}{dt^2} = - \frac{C_3}{\chi_{D,1}^{n,n} m_D^n} \sin \frac{t}{\sqrt{\chi_{D,1}^{n,n} m_D^n}} \end{cases}$$

Aus (5) folgt

$$(15) \quad \begin{cases} \zeta_1^v = \chi_1^{v,v} m_D^v \left(g + \frac{C_1}{\chi_{D,1}^{v,v} m_D^v} \sin \frac{t}{\sqrt{\chi_{D,1}^{v,v} m_D^v}} \right) \\ \zeta_1^t = \chi_1^{t,t} m_D^t \left(g + \frac{C_2}{\chi_{D,1}^{t,t} m_D^t} \sin \frac{t}{\sqrt{\chi_{D,1}^{t,t} m_D^t}} \right) \\ \quad + \chi_1^{t,n} m_D^n \left(g + \frac{C_3}{\chi_{D,1}^{n,n} m_D^n} \sin \frac{t}{\sqrt{\chi_{D,1}^{n,n} m_D^n}} \right) \\ \zeta_1^n = \chi_1^{n,t} m_D^t \left(g + \frac{C_2}{\chi_{D,1}^{t,t} m_D^t} \sin \frac{t}{\sqrt{\chi_{D,1}^{t,t} m_D^t}} \right) \\ \quad + \chi_1^{n,n} m_D^n \left(g + \frac{C_3}{\chi_{D,1}^{n,n} m_D^n} \sin \frac{t}{\sqrt{\chi_{D,1}^{n,n} m_D^n}} \right) \end{cases}$$

Beispiel

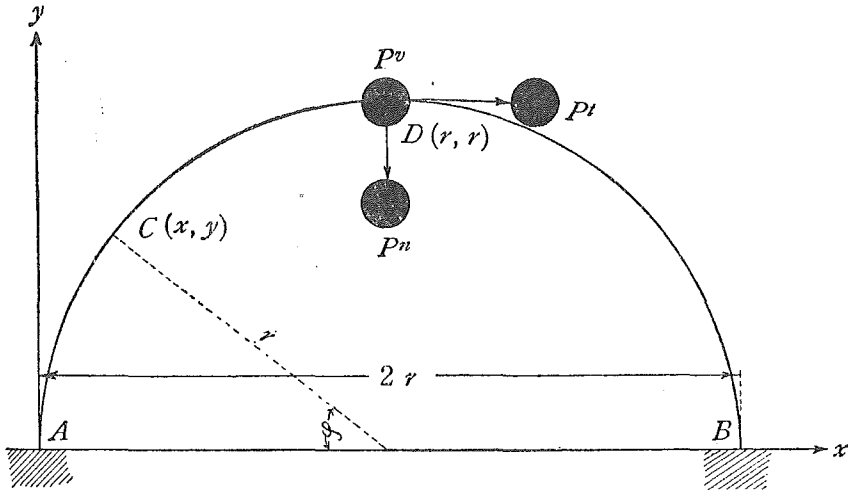


Abb. 2.

Der in Abb. 2 gezeigte Träger $ACDB$ bildet einen Halb-Kreis, dessen Durchmesser gleich $2r$ ist. Durch Seile und Rollen greifen die drei Lasten P^v , P^t , P^n den Träger beim Punkt $D(r, r)$ an, so dass die Lasten in vertikaler, tangentialer und normaler Richtung wirken.

In diesem Falle rechnet man die Verschiebungen irgendeiner Stelle C (x, y) aus

$$\begin{cases} \zeta_1^t = \chi_1^{v,v} P^v & \text{in vertikaler Richtung bei } C, \\ \zeta_1^t = \chi_1^{t,t} P^t + \chi_1^{t,n} P^n & \text{in der Richtung der Tangente bei } C, \\ \zeta_1^n = \chi_1^{n,t} P^t + \chi_1^{n,n} P^n & \text{in der Richtung der Normalen bei } C. \end{cases}$$

Die Faktoren $\chi_1^{v,v}$, $\chi_1^{t,t}$, $\chi_1^{t,n}$, $\chi_1^{n,t}$, $\chi_1^{n,n}$ ergeben sich mit Zentralwinkel φ aus folgenden Formeln;

$$(2) \quad \chi_1^{v,v} = \frac{r^3}{8\pi EI} \left[4\pi\lambda(\varphi + \cos \varphi - 1) - 4(1 + \lambda + \pi\lambda) \sin \varphi \right. \\ \left. + 2(1 + \lambda)(\pi\varphi \sin \varphi + 2\varphi \cos \varphi) \right]$$

$$\text{wobei } \lambda = \frac{EI}{\mu J}$$

$\chi_{D,1}^{v,v}$ wird abgeleitet indem man $\varphi = \frac{\pi}{2}$ setzt:

$$(3) \quad \chi_{D,1}^{v,v} = \frac{r^3}{8\pi EI} \left\{ \pi^2 - 4 + \lambda(3\pi^2 - 8\pi - 4) \right\}$$

$$(4) \quad \chi_1^{t,t} = \frac{r^3}{4\pi(r^2 + \lambda')EI'} \left[2\pi(r^2 + \lambda')(\varphi + \cos \varphi - 1) - 2 \left\{ \pi(r^2 + \lambda') + \right. \right. \\ \left. \left. (r^2 - \lambda') \left(1 - \frac{\lambda'}{r^2} \right) \right\} \sin \varphi + \left(1 + \frac{\lambda'}{r^2} \right) \left\{ \pi(r^2 + \lambda')\varphi \sin \varphi + 2(r^2 - \lambda')\varphi \cos \varphi \right\} \right]$$

$$\text{wobei } \lambda' = \frac{I'}{F}$$

$\chi_{D,1}^{t,t}$ wird abgeleitet indem $\varphi = \frac{\pi}{2}$ gesetzt wird:

$$(5) \quad \chi_{D,1}^{t,t} = \frac{r^3}{8\pi(r^2 + \lambda')EI'} \left[(r^2 - \lambda') \left\{ 4 \left(1 + \frac{\lambda'}{r^2} \right) - 8 \right\} + \pi(r^2 + \lambda') \left\{ \pi \left(3 + \frac{\lambda'}{r^2} \right) - 8 \right\} \right]$$

$$(6) \quad \chi_1^{t,n} = \frac{r^3}{4 \{ \pi^2(r^2 + \lambda') - 8r^2 \} EI'} \left[-4(r^2 + \lambda')(\pi - 2)\varphi + 4 \left\{ 4r^2 - \pi(r^2 + \lambda') \right\} (1 - \cos \varphi) \right. \\ \left. + \left\{ 4(r^2 + \lambda')(\pi - 2) + \left(\pi^2(r^2 + \lambda') - 8r^2 \right) \left(1 - \frac{\lambda'}{r^2} \right) \right\} \sin \varphi - \left(1 + \frac{\lambda'}{r^2} \right) \right. \\ \left. \left\{ 2 \left(4r^2 - \pi(r^2 + \lambda') \right) \varphi \sin \varphi + \left(\pi^2(r^2 + \lambda') - 8r^2 \right) \varphi \cos \varphi \right\} \right]$$

Wenn man $\varphi = \frac{\pi}{2}$ setzt, dann wird richtig

$$(7) \quad \chi_{D,1}^{n,t} = 0$$

$$(8) \quad \chi_1^{n,t} = \frac{r^3}{4\pi(r^2 + \lambda')EI'} \left[2\pi(r^2 + \lambda')(I - \cos \varphi) - \left(I + \frac{\lambda'}{r^2} \right) \left\{ 2(r^2 - \lambda')\varphi \sin \varphi + \pi(r^2 + \lambda') (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) \right\} \right]$$

$\chi_{D,1}^{n,t}$ wird richtig gleich null indem man $\varphi = \frac{\pi}{2}$ setzt.

$$(9) \quad \chi_1^{n,n} = \frac{r^3}{4\{\pi^2(r^2 + \lambda') - 8r^2\}EI'} \left[-(r^2 + \lambda')(\pi - 2)(I - \cos \varphi) + \left(I + \frac{\lambda'}{r^2} \right) \left\{ \left(\pi^2(r^2 + \lambda') - 8r^2 \right) \varphi \sin \varphi + 2(4r^2 - \pi(r^2 + \lambda')) (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) \right\} \right]$$

$\chi_{D,1}^{n,n}$ wird abgeleitet indem $\varphi = \frac{\pi}{2}$ gesetzt wird

$$\chi_{D,1}^{n,n} = \frac{r^3}{8\{\pi^2(r^2 + \lambda') - 8r^2\}EI'} \left[\left(I + \frac{\lambda'}{r^2} \right) \left\{ \pi(\pi^2(r^2 + \lambda') - 8r^2) + 4(4r^2 - \pi(r^2 + \lambda')) \right\} - 8(r^2 + \lambda')(\pi - 2) \right]$$

Dieses Verfahren wird durch das folgende Zahlenbeispiel erläutert. Für den Stab mit runden Querschnitte sei $I = I' = 490.9 \text{ cm}^4$, $J = 981.8 \text{ cm}^4$, $F = 78.54 \text{ cm}^2$, $E = 2,000,000 \text{ kg/cm}^2$, $\mu = 800,000 \text{ kg/cm}^2$, der Halbmesser des Kreises $r = 100 \text{ cm}$, die Lasten $P^v = P^t = P^n = 1,000 \text{ kg}$.

Man erhält $\lambda = \frac{EI}{\mu J} = 1.25$, $\lambda' = \frac{I'}{F} = 6.25 \text{ cm}^2$, und für die Anwendung der Gl. (2), (4), (6), (8), (9) nachstehende Zusammenstellung I.

Zusammenstellung I

φ	in Zahlen	.15	.30	.45	.60	.75	.90	1.05	1.20	1.35	1.50	$\frac{\pi}{2}$
	in Graden	8° 36'	17° 11'	25° 47'	34° 23'	42° 58'	51° 34'	60° 10'	68° 45'	77° 21'	85° 57'	90°
$10^6 \times \chi_1^{v,v}$		5.65	21.96	47.48	80.21	117.16	155.66	192.39	224.12	247.74	260.47	262.14
$10^7 \times \chi_1^{t,t}$		1.32	7.42	20.95	42.38	70.42	102.32	134.64	163.47	185.22	196.97	198.53
$10^7 \times \chi_1^{t,n}$		-1.10	-4.59	-11.23	-20.14	-29.34	-36.34	-38.86	-35.12	-24.68	-8.60	0
$10^7 \times \chi_1^{n,t}$		18.04	61.09	114.04	163.77	199.67	214.48	204.25	168.53	110.66	37.25	0
$10^7 \times \chi_1^{n,n}$		-9.95	-30.37	-49.49	-58.64	-52.49	-29.82	6.89	51.54	94.28	122.47	126.34

Für die Anwendung der $G!$ (1) erhält man die statischen Verschiebungen irgendeiner Stelle C :

Zusammenstellung II

φ in Zahlen	.15	.30	.45	.60	.75	.90	1.05	1.20	1.35	1.50	$\frac{\pi}{2}$
$(\zeta_1^v)'$ in cm.	.0057	.0220	.0475	.0802	.1172	.1557	.1924	.2241	.2477	.2605	.2621
$(\zeta_1^t)'$ in mm.	.0002	.0028	.0097	.0222	.0411	.0660	.0958	.1283	.1605	.1884	.1985
$(\zeta_1^n)'$ in mm.	.0081	.0307	.0646	.1051	.1472	.1847	.2111	.2201	.2049	.1597	.1263

In den nachstehenden Abbildungen 3 und 4 sind die Werte von Faktoren $\chi_1^{v,v}$, $\chi_1^{t,t}$, $\chi_1^{t,n}$, $\chi_1^{n,t}$, $\chi_1^{n,n}$, und die Verschiebungen $(\zeta_1^v)'$, $(\zeta_1^t)'$, $(\zeta_1^n)'$ für die linke Trägerhälfte ersichtlich gemacht.

Abb. 3.

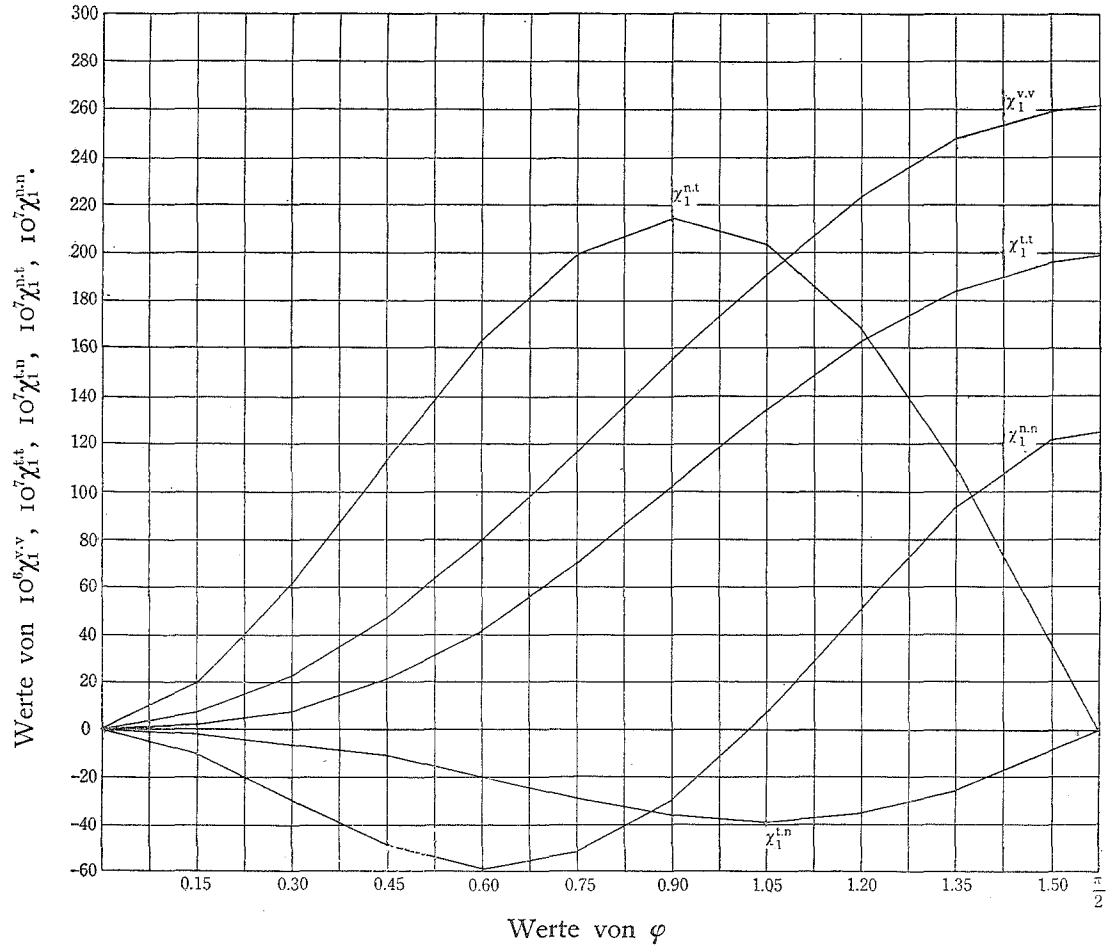
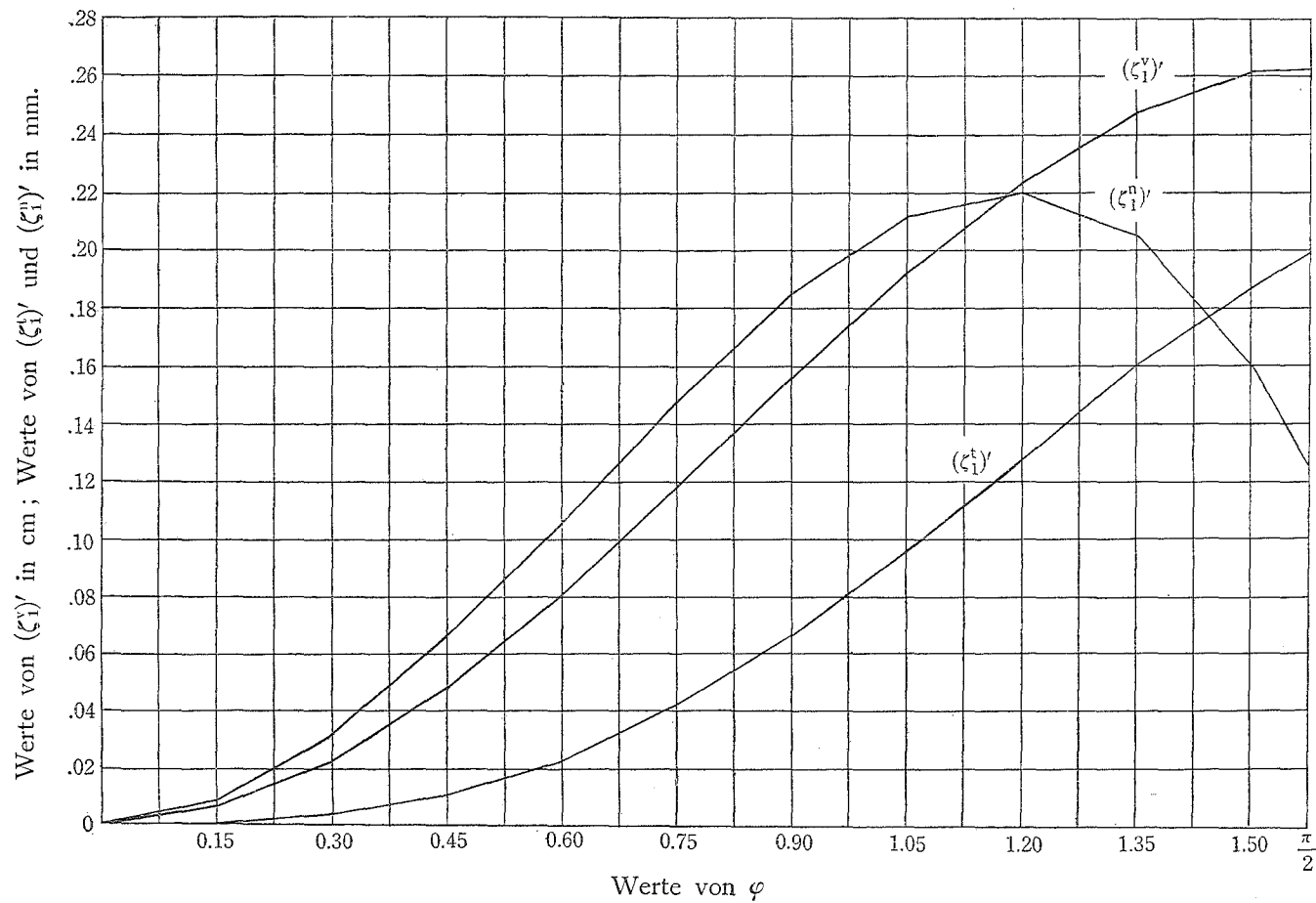


Abb. 4.



Man erhält auch noch

$$m_D^v = m_D^t = m_D^n = 1.019$$

$$\chi_{D,1}^{v,v} = 0.000,262,25$$

$$\chi_{D,1}^{t,t} = 0.000,019,77$$

$$\chi_{D,1}^{n,n} = 0.000,012,63$$

$$\sqrt{m_D^v \chi_{D,1}^{v,v}} = 0.01635$$

$$\sqrt{m_D^t \chi_{D,1}^{t,t}} = 0.00449$$

$$\sqrt{m_D^n \chi_{D,1}^{n,n}} = 0.00359$$

$$t_o^v = 0.103 \text{ Sek.}$$

$$t_o^t = 0.028 \quad ,,$$

$$t_o^n = 0.023 \quad ,,$$

$$m_D^v \chi_{D,1}^{v,v} = 0.000,267,33$$

$$m_D^t \chi_{D,1}^{t,t} = 0.000,020,15$$

$$m_D^n \chi_{D,1}^{n,n} = 0.000,012,88$$

$$\frac{I}{\sqrt{m_D^v \chi_{D,1}^{v,v}}} = 61.162$$

$$\frac{I}{\sqrt{m_D^t \chi_{D,1}^{t,t}}} = 222.717$$

$$\frac{I}{\sqrt{m_D^n \chi_{D,1}^{n,n}}} = 278.552$$

$$(\zeta_{D,1}^v)'' = C_1 \sin 61.162t$$

$$(\zeta_{D,1}^t)'' = C_2 \sin 222.717t$$

$$(\zeta_{D,1}^n)'' = C_3 \sin 278.552t$$

Die gesamten Auslenkungen irgendeiner Stelle sind alsdann

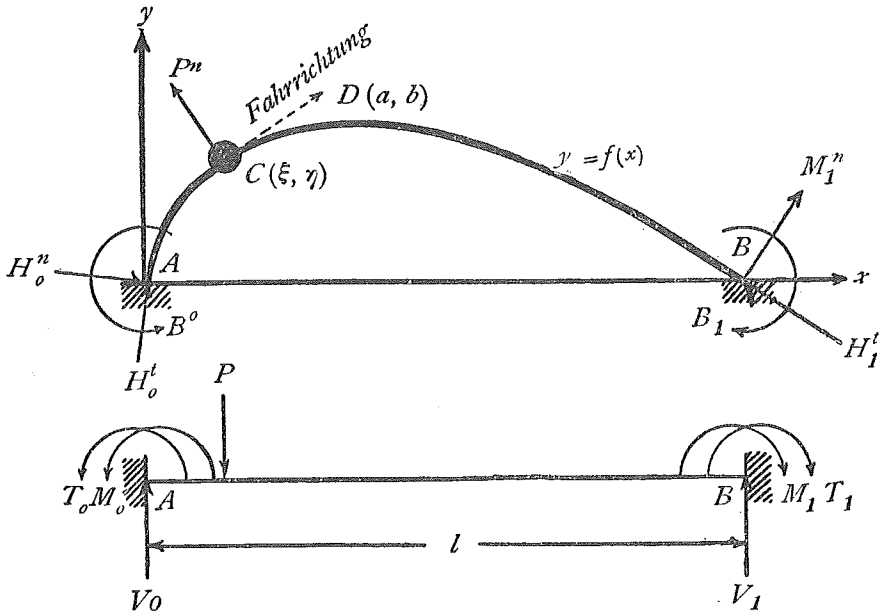
$$\zeta_1^v = (\zeta_1^v)' + 3813 \chi_1^{v,v} C_1 \sin 61.162t$$

$$\zeta_1^t = (\zeta_1^t)' + 50582 \chi_1^{t,t} C_2 \sin 222.717t + 79177 \chi_1^{t,n} C_3 \sin 278.522t$$

$$\zeta_1^n = (\zeta_1^n)' + 50582 \chi_1^{n,t} C_2 \sin 222.717t + 79177 \chi_1^{n,n} C_3 \sin 278.552t$$

2. Erzwungene Schwingungen unter der Wirkung einer bewegten Last.

Abb. 5.



Der in Abb. 5 gezeigte im Grundriss gekrümmte Träger ACB ist an beiden Enden eingebaut und eine Last P fährt von A bis B den Träger entlang. In diesem Abschnitt werden Temperaturänderungen und Verschiebungen der Stützen nicht berücksichtigt. Die Verschiebungen des Punktes $D(a, b)$ unter der Wirkung einer bewegten Last P beim Punkt $C(\xi, \eta)$ sind

$$(1) \begin{cases} \zeta_D^v = \chi_D^{v,v} P & \text{in vertikaler Richtung,} \\ \zeta_D^t = \chi_D^{t,n} P^n & \text{in der Richtung der Tangente,} \\ \zeta_D^n = \chi_D^{n,n} P^n & \text{in der Richtung der Normalen,} \end{cases}$$

in dem P die Zentrifugalkraft der bewegten Last P und $\chi_D^{v,v}$, $\chi_D^{t,n}$, $\chi_D^{n,n}$ Faktoren bedeuten, die von der Lage der Stelle D d. h. (a, b) und derjenigen des Angriffsortes der Last d. h. (ξ, η) sowie etwaigen Stützenweiten l und E, I, P, μ, J abhängen und als Spezialfälle aus $\chi^{v,v}$, $\chi^{t,n}$, $\chi^{n,n}$ abgeleitet werden können. Die im Punkte D befindlichen veränderlichen Lasten P_D^v , P_D^t , P_D^n , die dieselben Verschiebungen hervorrufen, folgen aus

$$(2) \begin{cases} P_D \chi_{D,1}^{v,v} = \chi_D^{v,v} P \\ P_D \chi_{D,1}^{t,t} = \chi_D^{t,t} P^n \\ P_D \chi_{D,1}^{n,n} = \chi_D^{n,n} P^n \end{cases}$$

wobei $\chi_{D,1}^{v,v}$, $\chi_{D,1}^{t,t}$, $\chi_{D,1}^{n,n}$ als Spezialfälle aus $\chi^{v,v}$, $\chi^{t,t}$, $\chi^{n,n}$ abgeleitet werden können. Wenn die Last P sich mit der konstanten Geschwindigkeit v bewegt, dann wird,

$$(3) \quad P^n = \frac{Pv^2}{g\rho} \quad \text{wobei} \quad \frac{I}{\rho} = \frac{\frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2}}{\left[I + \left\{ \frac{df(\xi)}{d\xi} \right\}^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \text{ ist,}$$

und da $\int_0^x \sqrt{I + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx = vt$ ist, so sind P_D^v , P_D^t , P_D^n Funktionen von t .

Hierin bedeutet t den Zeitraum, in dem die Last P von A bis C fährt.

Betrachten wir den Träger zunächst auch noch als masselos und stellen wir uns unter den veränderlichen Lasten P_D^v , P_D^t , P_D^n die Gewichte von Massen m_D^v , m_D^t , m_D^n vor, die durch Seile und Rollen in den 3 Richtungen an der Angriffsstelle befestigt sind, so ergeben sich die erzwungenen Schwingungen, die der Punkt D unter diesen veränderlichen Lasten ausführt, aus den Gleichungen

$$(4) \begin{cases} m_D^v \frac{d^2 \zeta_{D,1}^v}{dt^2} + \frac{\zeta_{D,1}^v}{\chi_{D,1}^{v,v}} = P_D^v \\ m_D^t \frac{d^2 \zeta_{D,1}^t}{dt^2} + \frac{\zeta_{D,1}^t}{\chi_{D,1}^{t,t}} = P_D^t \\ m_D^n \frac{d^2 \zeta_{D,1}^n}{dt^2} + \frac{\zeta_{D,1}^n}{\chi_{D,1}^{n,n}} = P_D^n \end{cases}$$

oder

$$(5) \begin{cases} \frac{d^2 \zeta_{D,1}^v}{dt^2} + k_v \zeta_{D,1}^v = \frac{P_D^v}{m_D^v} \\ \frac{d^2 \zeta_{D,1}^t}{dt^2} + k_t \zeta_{D,1}^t = \frac{P_D^t}{m_D^t} \\ \frac{d^2 \zeta_{D,1}^n}{dt^2} + k_n \zeta_{D,1}^n = \frac{P_D^n}{m_D^n} \end{cases}$$

wenn nämlich $k_v = \frac{I}{m_D^v \chi_{D,1}^{v,v}}$; $k_t = \frac{I}{m_D^t \chi_{D,1}^{t,t}}$; $k_n = \frac{I}{m_D^n \chi_{D,1}^{n,n}}$ gesetzt wird.

Die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen lauten für $\sqrt{-k_v}=a_v$, $\sqrt{-k_t}=a_t$, $\sqrt{-k_n}=a_n$:

$$(6) \begin{cases} \zeta_{D,1}^v = -\frac{e^{-\alpha_v t}}{2a_v} \left[A_0 + \int \frac{P_D^v}{m_D^v} e^{\alpha_v t} dt \right] + \frac{e^{\alpha_v t}}{2a_v} \left[C_0 + \int \frac{P_D^v}{m_D^v} e^{-\alpha_v t} dt \right] \\ \zeta_{D,1}^t = -\frac{e^{-\alpha_t t}}{2a_t} \left[A_1 + \int \frac{P_D^t}{m_D^t} e^{\alpha_t t} dt \right] + \frac{e^{\alpha_t t}}{2a_t} \left[C_1 + \int \frac{P_D^t}{m_D^t} e^{-\alpha_t t} dt \right] \\ \zeta_{D,1}^n = -\frac{e^{-\alpha_n t}}{2a_n} \left[A_2 + \int \frac{P_D^n}{m_D^n} e^{\alpha_n t} dt \right] + \frac{e^{\alpha_n t}}{2a_n} \left[C_2 + \int \frac{P_D^n}{m_D^n} e^{-\alpha_n t} dt \right] \end{cases}$$

Hierin bedeuten A_0 , C_0 , A_1 , C_1 , A_2 , C_2 die Integralkonstanten. Da die Grössen der Massen m_D^v , m_D^t , m_D^n genau genommen

$$(7) \quad m_D^v = \frac{P_D^v}{g}; \quad m_D^t = \frac{P_D^t}{g}; \quad m_D^n = \frac{P_D^n}{g}$$

gesetzt werden müssen, so entsteht die Schwierigkeit, dass man es mit drei veränderlichen m_D^v , m_D^t , m_D^n , zu tun hat.

Hätte man m_D^v , m_D^t , m_D^n in diesen veränderlichen Formen in die Gleichungen eingeführt, so hätten sich die überhaupt nicht oder wenigstens nicht mit einigermassen einfachen Mitteln lösbare Gleichungen ergeben. Man kann die annähernden Lösungen erzielen, indem man sich t in m_D^v , m_D^t , m_D^n , von Null bis zum Endwerte nach einer Stufenzahl t_1 , t_2 , t_3 , t_n , wachsend denkt, die betreffende $\left(m_D^v\right)_n = \left(\frac{P_D^v}{g}\right)_n$, $\left(m_D^t\right)_n = \left(\frac{P_D^t}{g}\right)_n$, $\left(m_D^n\right)_n = \left(\frac{P_D^n}{g}\right)_n$ für jede Stufe berechnet und Gl. (6) nun löst, indem man für die Stufe t_{n-1} bis t_n jeweils die zu t_n gehörigen $(m_D^v)_n$, $(m_D^t)_n$, $(m_D^n)_n$ als Festwerte betrachtet.

Beispiel

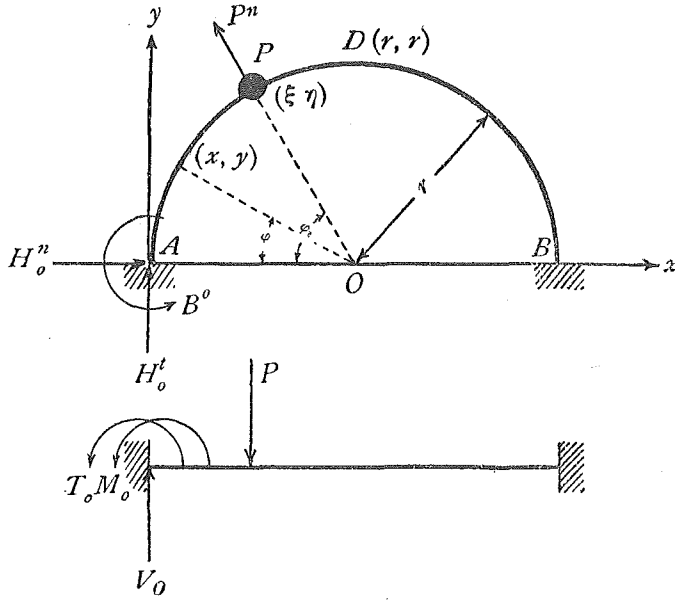


Abb. 6.

Wenn der Trägere, wie in Abb. 6 gezeigt ist, ein Halb-Kreis ist, dann sind die Momente und die axiale Kraft an einem beliebigen Punkt (x, y)

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned} M &= M_o \cos \varphi + (T_o - V_o r) \sin \varphi && \text{Zwischen A und P,} \\ &= M_o \cos \varphi + (T_o - V_o r) \sin \varphi + P r \sin (\varphi - \varphi_\xi) && \text{Zwischen P und B,} \\ B &= B_o - H_o^t r + H_o^n \cos \varphi + H_o^s r \sin \varphi && \text{Zwischen A und P,} \\ &= B_o - H_o^t r + H_o^t r \cos \varphi + H_o^n r \sin \varphi - P^n r \sin (\varphi - \varphi_\xi) && \text{Zwischen P und B,} \\ T &= (T_o - V_o r) \cos \varphi - M_o \sin \varphi + V_o r && \text{Zwischen A und P,} \\ &= (T_o - V_o r) \cos \varphi - M_o \sin \varphi + V_o r - P r \left\{ 1 - \cos (\varphi - \varphi_\xi) \right\} && \text{Zwischen P und B,} \\ N &= H_o^t \cos \varphi + H_o^n \sin \varphi && \text{Zwischen A und P,} \\ &= H_o^t \cos \varphi + H_o^n \sin \varphi - P^n \sin (\varphi - \varphi_\xi) && \text{Zwischen P und B.} \end{aligned} \right. \quad (I)
 \end{aligned}$$

Die Momente und die Reaktionen bei A sind

$$\begin{aligned}
 M_o &= Pr \frac{\{\pi^2(I+\lambda) - 4\lambda\} \sin \varphi_{\frac{\pi}{2}} - \pi(I+\lambda) \varphi_{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi_{\frac{\pi}{2}} + 2\pi\lambda(I - \cos \varphi_{\frac{\pi}{2}}) - 4\lambda \varphi_{\frac{\pi}{2}}}{\pi^2(I+\lambda) - 8\lambda} \\
 T_o &= Pr \frac{\pi(I+\lambda)(\pi - \varphi_{\frac{\pi}{2}}) + \frac{8\lambda}{\pi} - 2(I+\lambda) \varphi_{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi_{\frac{\pi}{2}} - 4\lambda}{\pi^2(I+\lambda)} \\
 &\quad + \frac{\{4\lambda - \pi^2(I+\lambda)\} \cos \varphi_{\frac{\pi}{2}} + \left\{\pi(I+\lambda) - \frac{8\lambda}{\pi}\right\} \varphi_{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi_{\frac{\pi}{2}}}{-8\lambda} \\
 (2) \quad B_o &= P^n r \frac{\pi^2(r^2 + \lambda')(I - \cos \varphi_{\frac{\pi}{2}}) + \{6r^2 - \pi^2(r^2 + \lambda') - 2\lambda'\} \pi \sin \varphi_{\frac{\pi}{2}}}{\pi^3(r^2 + \lambda')} \\
 &\quad + \frac{2\pi(r^2 + \lambda') \varphi_{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi_{\frac{\pi}{2}} + \{\pi^2(r^2 + \lambda') - 8r^2\} \varphi_{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi_{\frac{\pi}{2}}}{-8\pi r^2} \\
 V_o &= P \frac{\{\pi(\pi - \varphi_{\frac{\pi}{2}}) + (\pi - 2\varphi_{\frac{\pi}{2}}) \sin \varphi_{\frac{\pi}{2}}\} (I + \lambda) - 4\lambda(I + \cos \varphi_{\frac{\pi}{2}})}{\pi^2(I + \lambda) - 8\lambda} \\
 H_o^t &= -P^n \frac{(\pi - \varphi_{\frac{\pi}{2}}) \sin \varphi_{\frac{\pi}{2}}}{\pi} \\
 H_o^n &= P^n \frac{\{\pi^2(r^2 + \lambda') - 4r^2\} \cos \varphi_{\frac{\pi}{2}} + \pi(r^2 + \lambda') \sin \varphi_{\frac{\pi}{2}} - \pi(r^2 + \lambda') \varphi_{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi_{\frac{\pi}{2}} - 4r^2}{\pi^2(r^2 + \lambda') - 8r^2}
 \end{aligned}$$

$$\text{wobei} \quad \lambda = \frac{EI}{\mu f}, \quad \lambda' = \frac{I'}{F}.$$

Die vertikale Verschiebung in der Trägermitte D (r, r) ist für $0 < \varphi_{\frac{\pi}{2}} < \frac{\pi}{2}$

$$(3) \quad \zeta_o^v = \chi_D^{n,v} P$$

$$\begin{aligned}
 \text{wobei} \quad \chi_D^{n,v} &= \frac{r^3}{4\pi EI \{\pi^2(I+\lambda) - 8\lambda\}} \left[2\pi^2\lambda(\pi - 2\varphi_{\frac{\pi}{2}} - \pi \cos \varphi_{\frac{\pi}{2}}) + 2\left\{\pi^2(\lambda - I) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 8\lambda\right\} \sin \varphi_{\frac{\pi}{2}} + \pi\left\{\pi^2(I+\lambda) - I6\lambda\right\} \varphi_{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi_{\frac{\pi}{2}} + 2\left\{\pi^2(I+\lambda) - 8\lambda\right\} \varphi_{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi_{\frac{\pi}{2}} \right] + \\
 &\quad \frac{r^3}{4\pi \mu f \{\pi^2(I+\lambda) - 8\lambda\}} \left[I6\pi\lambda - 2\pi^3(2+\lambda) + 2\pi\left\{\pi^2(I+\lambda) - 8\lambda + 2\pi\right\} \varphi_{\frac{\pi}{2}} \right. \\
 &\quad \left. + 2\left\{\pi^2(\lambda + 2) - 8\lambda\right\} \pi \cos \varphi_{\frac{\pi}{2}} - 2\left\{\pi^2(3+\lambda) + \pi^3(I+\lambda) - 8\lambda(I+\pi)\right\} \sin \varphi_{\frac{\pi}{2}} \right. \\
 &\quad \left. + \pi\left\{\pi^2(I+\lambda) - 8\lambda + 8\right\} \varphi_{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi_{\frac{\pi}{2}} + 2\left\{\pi^2(I+\lambda) - 8\lambda\right\} \varphi_{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi_{\frac{\pi}{2}} \right]
 \end{aligned}$$

Aus $\chi_{D.1}^{v,v}$ wird $\chi_{D.1}^{v,v}$ abgeleitet, indem $\varphi_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$ gesetzt wird:

$$(4) \quad \chi_{D.1}^{v,v} = \frac{r^3(\pi^2 - 4)}{8\pi EI} + \frac{r^3(3\pi^2 - 8\pi - 4)}{8\pi \mu J}$$

Aus (3) und (4) folgt

$$(5) \quad P_D^v = \frac{2P}{\pi^2 - 4 - \lambda(3\pi^2 - 8\pi - 4)} \left\{ 2\pi\lambda(\varphi_{\frac{\pi}{2}} + \cos \varphi_{\frac{\pi}{2}} - 1) - 2(I + \lambda + \pi\lambda) \sin \varphi_{\frac{\pi}{2}} \right. \\ \left. + \pi(I + \lambda)\varphi_{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi_{\frac{\pi}{2}} + 2(I + \lambda)\varphi_{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi_{\frac{\pi}{2}} \right\}$$

oder, da $\varphi_{\frac{\pi}{2}} = \frac{v}{r}t$ ist:

$$(6) \quad P_D^v = \frac{2P}{\pi^2 - 4 + \lambda(3\pi^2 - 8\pi - 4)} \left\{ 2\pi\lambda \left(\frac{v}{r}t \cos \frac{v}{r}t - 1 \right) \right. \\ \left. - 2(I + \lambda + \pi\lambda) \sin \frac{v}{r}t + (I + \lambda) \frac{v}{r}t \sin \frac{v}{r}t + 2(I + \lambda) \frac{v}{r}t \cos \frac{v}{r}t \right\}$$

Die horizontale Verschiebung des Punktes D in der Richtung der Tangente

ist für $0 < \varphi_{\frac{\pi}{2}} < \frac{\pi}{2}$

$$(7) \quad \zeta_D^t = \chi_D^{t,n} P^n$$

wobei
$$\chi_D^{t,n} = \frac{r^3}{4\pi EI' \{ \pi^2(r^2 + \lambda') - 8r^2 \}} \left[-2\pi \left\{ \pi^2(r^2 + \lambda') - 8r^2 + 2\pi\lambda' \right\} \right. \\ + \pi \left\{ \pi^2(r^2 + \lambda') - 8(r^2 - \lambda') \right\} \sin \varphi_{\frac{\pi}{2}} + 2\pi \left\{ \pi^2(r^2 + \lambda') - 8r^2 + 2\pi\lambda' \right\} \cos \varphi_{\frac{\pi}{2}} \\ + 2 \left\{ \pi^2(r^2 + \lambda') - 8r^2 \right\} \varphi_{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi_{\frac{\pi}{2}} - \pi \left\{ \pi^2(r^2 + \lambda') - 8(r^2 - \lambda') \right\} \varphi_{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi_{\frac{\pi}{2}} \left. \right] \\ + \frac{r}{4\pi EF \{ \pi^2(r^2 + \lambda') - 8r^2 \}} \left[4\pi^2 r^2 + \pi \left\{ \pi^2(r^2 + \lambda') - 16r^2 \right\} \sin \varphi_{\frac{\pi}{2}} \right. \\ - 4\pi^2 r^2 \cos \varphi_{\frac{\pi}{2}} - 2 \left\{ \pi^2(r^2 + \lambda') - 8r^2 \right\} \varphi_{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi_{\frac{\pi}{2}} - \pi \left\{ \pi^2(r^2 + \lambda') \right. \\ \left. - 16r^2 \right\} \varphi_{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi_{\frac{\pi}{2}} \left. \right] \text{ ist.}$$

Wenn man $\varphi_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$ in $\chi_D^{t,n}$ setzt, dann wird $\chi_D^{t,n} = 0$.

$\chi_{D,1}^{t,t}$ wird folgendermaßen berechnet :

$$(8) \quad \chi_{D,1}^{t,t} = \frac{r^3}{8\pi EF(r^2 + \lambda')} \left\{ \pi(r^2 + \lambda')(3\pi - 8) - 4(r^2 - \lambda') \right\} \\ + \frac{r}{8\pi EF(r^2 + \lambda')} \left\{ \pi^2(r^2 + \lambda') + 4(r^2 - \lambda') \right\}$$

Aus (7) und (8) folgt

$$(9) \quad P_D^t = \frac{2P^n(r^2 + \lambda')}{\pi(r^2 + \lambda')\{r^2(3\pi - 8) + \pi\lambda'\} - 4(r^2 - \lambda')^2} \left[-2\pi r^2 \left(I - \cos \frac{v}{r} t \right) \right. \\ \left. + \pi(r^2 + \lambda') \left(\sin \frac{v}{r} t - \frac{v}{r} t \cos \frac{v}{r} t \right) + 2(r^2 - \lambda') \frac{v}{r} t \sin \frac{v}{r} t \right]$$

Die horizontale Verschiebung des Punktes D in der Richtung der Normalen ist für $0 < \varphi_{\frac{\pi}{2}} < \frac{\pi}{2}$

$$(10) \quad \xi_D^n = \chi_{D,1}^{n,n} P^n$$

$$\text{wobei} \quad \chi_{D,1}^{n,n} = \frac{r^3}{4EF\{\pi^2(r^2 + \lambda') - 8r^2\}} \left[4\left\{ \pi(r^2 + \lambda') - 2r^2 \right\} (I - \cos \varphi_{\frac{\pi}{2}}) \right. \\ - 2(4 - \pi)(r^2 + \lambda') \sin \varphi_{\frac{\pi}{2}} + 2(r^2 + \lambda')(4 - \pi) \varphi_{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi_{\frac{\pi}{2}} - \left\{ \pi^2(r^2 + \lambda') \right. \\ \left. - 8r^2 \right\} \varphi_{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi_{\frac{\pi}{2}} \left. \right] + \frac{r}{4EF\{\pi^2(r^2 + \lambda') - 8r^2\}} \left[-8r^2(I - \cos \varphi_{\frac{\pi}{2}}) \right. \\ + 2\pi(r^2 + \lambda') \sin \varphi_{\frac{\pi}{2}} - \left\{ \pi^2(r^2 + \lambda') - 8r^2 \right\} \varphi_{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi_{\frac{\pi}{2}} \\ \left. - 2\pi(r^2 + \lambda') \varphi_{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi_{\frac{\pi}{2}} \right]$$

$\chi_{D,1}^{n,n}$ ergibt folgenden Wert :

$$(11) \quad \chi_{D,1}^{n,n} = \frac{r^3}{8EF\{\pi^2(r^2 + \lambda') - 8r^2\}} \left\{ \pi^3(r^2 + \lambda') - 20\pi r^2 + 32r^2 - I2\pi\lambda' + I6\lambda' \right\} \\ + \frac{r}{8EF\{\pi^2(r^2 + \lambda') - 8r^2\}} \left\{ \pi^3(r^2 + \lambda') - I2\pi r^2 + I6r^2 - 4\pi\lambda' \right\}$$

Aus (10) und (11) folgt

$$(12) \quad P_D^n = \frac{2P^n}{\pi^3(r^2 + \lambda') - 20\pi r^2 + 32r^2 - 4\pi\lambda'} \left[4r^2(\pi - 2) \left(I - \cos \frac{v}{r} t \right) + 2(\pi\lambda' \right. \\ \left. - 4r^2 + \pi r^2) \left(\sin \frac{v}{r} t - \frac{v}{r} t \cos \frac{v}{r} t \right) - \left\{ \pi^2(r^2 + \lambda') - 8r^2 \right\} \frac{v}{r} t \sin \frac{v}{r} t \right]$$

Die erzwungenen Schwingungen, die der Punkt D unter den veränderlichen Kräften P_D^v , P_D^t , P_D^n ausführt, ergeben sich aus den Gleichungen:

$$(13) \quad \frac{d^2 \zeta_{D,1}^v}{dt^2} + k_v \zeta_{D,1}^v = a_0 \left(-I + \frac{v}{r} t + \cos \frac{v}{r} t \right) + b_0 \sin \frac{v}{r} t + c_0 \frac{v}{r} t \sin \frac{v}{r} t + d_0 \frac{v}{r} t \cos \frac{v}{r} t$$

$$\text{wobei } k_v = \frac{I}{m_D^v \chi_{D,1}^v}; \quad a_0 = 2\pi\lambda G_0; \quad b_0 = -2(I + \lambda + \pi\lambda) G_0; \quad c_0 = \pi(I + \lambda) G_0;$$

$$d_0 = 2(I + \lambda) G_0; \quad G_0 = \frac{2P}{m_D^v \{ \pi^2 - 4 + \lambda(3\pi^2 - 8\pi - 4) \}}$$

$$(14) \quad \frac{d^2 \zeta_{D,1}^t}{dt^2} + k_t \zeta_{D,1}^t = a_1 \left(I - \cos \frac{v}{r} t \right) + b_1 \left(\sin \frac{v}{r} t - \frac{v}{r} t \cos \frac{v}{r} t \right) + c_1 \frac{v}{r} t \sin \frac{v}{r} t$$

$$\text{wobei } k_t = \frac{I}{m_D^t \chi_{D,1}^t}; \quad a_1 = -2\pi r^2 G_1; \quad b_1 = \pi(r^2 + \lambda') G_1; \quad c_1 = 2(r^2 - \lambda') G_1;$$

$$G_1 = \frac{2P^n(r^2 + \lambda')}{m_D^t [\pi(r^2 + \lambda') \{ r^2(3\pi - 8) + \pi\lambda' \} - 4(r^2 - \lambda')^2]}$$

$$(15) \quad \frac{d^2 \zeta_{D,1}^n}{dt^2} + k_n \zeta_{D,1}^n = a_2 \left(I - \cos \frac{v}{r} t \right) + b_2 \left(\sin \frac{v}{r} t - \frac{v}{r} t \cos \frac{v}{r} t \right) + c_2 \frac{v}{r} t \sin \frac{v}{r} t$$

$$\text{wobei } k_n = \frac{I}{m_D^n \chi_{D,1}^n}; \quad a_2 = 4r^2(\pi - 2) G_2; \quad b_2 = 2(\pi\lambda' - 4r^2 + \pi r^2) G_2;$$

$$c_2 = - \left\{ \pi^2(r^2 + \lambda') - 8r^2 \right\} G_2; \quad G_2 = \frac{2P^n}{m_D^n \{ \pi^3(r^2 + \lambda') - 20\pi r^2 + 32r^2 - 4\pi\lambda' \}}$$

Die Lösung der Gl. (13) lautet:

$$(16) \quad \zeta_{D,1}^v = \frac{2P \chi_{D,1}^{v,v}}{\left\{ \pi^2 - 4 + \lambda(3\pi^2 - 8\pi - 4) \right\} \left\{ \left(\frac{v}{r} \right)^2 - k_v \right\}^2} \left[2 \left(\frac{v}{r} \right)^3 \left\{ k_v(\pi\lambda - 2 - 2\lambda) \right. \right. \\ \left. \left. - \pi \lambda \left(\frac{v}{r} \right)^2 \right\} \frac{\sin \sqrt{k_v} t}{\sqrt{k_v}} + 2\pi \left(\frac{v}{r} \right)^2 \left\{ \lambda \left(\frac{v}{r} \right)^2 + k_v \right\} \cos \sqrt{k_v} t - 2\pi \lambda \left\{ \left(\frac{v}{r} \right)^2 \right. \right. \right]$$

$$\begin{aligned}
& -k_v\Big\{ \Big(I - \frac{v}{r}t \Big) + 2\pi k_v \Big\{ \lambda k_v - (2\lambda + I) \Big(\frac{v}{r} \Big)^2 \Big\} \cos \frac{v}{r}t + 2k_v \Big\{ (3 + 3\lambda \\
& + \pi\lambda) \Big(\frac{v}{r} \Big)^2 - (I + \lambda + \pi\lambda) k_v \Big\} \sin \frac{v}{r}t - (I + \lambda) \frac{v}{r} k_v \Big\{ \Big(\frac{v}{r} \Big)^2 - k_v \Big\} t \\
& \times \Big(\pi \sin \frac{v}{r}t + 2 \cos \frac{v}{r}t \Big) \Big]
\end{aligned}$$

$\zeta_{D,1}^v$ und $\frac{d\zeta_{D,1}^v}{dt}$ sind o für $t=0$. $\frac{d\zeta_{D,1}^v}{dt}$ wird auch o für

$$\begin{aligned}
(17) \quad & 2\left(\frac{v}{r}\right)^2 \left\{ k_v(\pi\lambda - 2 - 2\lambda) - \pi\lambda \left(\frac{v}{r}\right)^2 \right\} \cos \sqrt{k_v}t - 2\pi \frac{v}{r} \sqrt{k_v} \left\{ \lambda \left(\frac{v}{r}\right)^2 + k_v \right\} \\
& \times \sin \sqrt{k_v}t + 2\pi\lambda \left\{ \left(\frac{v}{r}\right)^2 - k_v \right\}^2 - \pi k_v \left\{ (\lambda - I) k_v - (3\lambda + I) \left(\frac{v}{r}\right)^2 \right\} \sin \frac{v}{r}t \\
& + 2k_v \left\{ (2 + 2\lambda + \pi\lambda) \left(\frac{v}{r}\right)^2 - \pi\lambda k_v \right\} \cos \frac{v}{r}t - (I + \lambda) k_v \left\{ \left(\frac{v}{r}\right)^2 - k_v \right\} t \\
& \times \left(\pi \frac{v}{r} \cos \frac{v}{r}t - 2 \frac{v}{r} \sin \frac{v}{r}t \right) = 0
\end{aligned}$$

woraus durch Versuch t ermittelt werden kann.

Für die Trägermitte wird bei $t = \frac{\pi r}{2v}$:

$$\begin{aligned}
(18) \quad \zeta_{D,1}^v = & \frac{2P\chi_{D,1}^{v,v}}{\left\{ \pi^2 - 4 + \lambda(3\pi^2 - 8\pi - 4) \right\} \left\{ \left(\frac{v}{r}\right)^2 - k'_v \right\}^2} \left[2\left(\frac{v}{r}\right)^3 \left\{ (k'_v(\pi\lambda - 2 - 2\lambda) \right. \right. \\
& - \pi\lambda \left(\frac{v}{r}\right)^2 \Big\} \frac{\sin\left(\frac{\pi r}{2v} \sqrt{k'_v}\right)}{\sqrt{k'_v}} + 2\pi \left(\frac{v}{r}\right)^3 \left\{ \lambda \left(\frac{v}{r}\right)^2 + k'_v \right\} \cos\left(\frac{\pi r}{2v} \sqrt{k'_v}\right) \\
& - 2\pi\lambda \left\{ \left(\frac{v}{r}\right)^2 - k'_v \right\}^2 \left(I - \frac{\pi}{2} \right) + 2k'_v \left\{ (3 + 3\lambda + \pi\lambda) \left(\frac{v}{r}\right)^2 - (I + \lambda + \pi\lambda) k'_v \right\} \\
& \left. \left. - \frac{\pi^2}{2} k'_v (I + \lambda) \left\{ \left(\frac{v}{r}\right)^2 - k'_v \right\} \right\} \right]
\end{aligned}$$

wobei

$$k'_v = \frac{g}{P\chi_{D,1}^{v,v}}$$

Für $v=0$ wird in Gl. (18) richtig gleich $\zeta_{D,1}^v = P\chi_{D,1}^{v,v}$, für $V=\infty$ wird $\zeta_{D,1}^v$ unbestimmt. Die Lösung der Gl. (14) lautet:

$$(19) \quad \zeta_{D,1}^t = \frac{2P^n(r^2 + \lambda')\chi_{D,1}^{t,t}}{\left[\pi(r^2 + \lambda') \left\{ r^2(3\pi - 8) + \pi\lambda' \right\} - 4(r^2 - \lambda')^2 \right] \left\{ \left(\frac{v}{r} \right)^2 - k_t \right\}^2} \left[2\pi(r^2 + \lambda') \left(\frac{v}{r} \right)^3 \sqrt{k_t} \sin \sqrt{k_t} t + 2 \left(\frac{v}{r} \right)^2 \left\{ \pi r^2 \left(\frac{v^2}{r^2} - k_t \right) + 2(r^2 - \lambda')k_t \right\} \right. \\ \times \cos \sqrt{k_t} t - 2\pi r^2 \left\{ \left(\frac{v}{r} \right)^2 - k_t \right\}^2 - \pi(r^2 + \lambda')k_t \left(3 \frac{v^2}{r^2} - k_t \right) \sin \frac{v}{r} t \\ - 2k_t \left\{ \pi r^2 \left(\frac{v^2}{r^2} - k_t \right) + 2(r^2 - \lambda') \left(\frac{v}{r} \right)^2 \right\} \cos \frac{v}{r} t - 2(r^2 - \lambda')k_t \left(\frac{v^2}{r^2} - k_t \right) \\ \left. \times \frac{v}{r} t \sin \frac{v}{r} t + \pi(r^2 + \lambda')k_t \left(\frac{v^2}{r^2} - k_t \right) \frac{v}{r} \cos \frac{v}{r} t \right]$$

$\zeta_{D,1}^t$ und $\frac{d\chi_{D,1}^t}{dt}$ sind 0 für $t=0$. $\frac{d\zeta_{D,1}^t}{dt}$ wird auch 0 für

$$(20) \quad 2\pi(r^2 + \lambda') \left(\frac{v}{r} \right)^3 k_t \cos \sqrt{k_t} t - 2 \left(\frac{v}{r} \right)^2 \sqrt{k_t} \left\{ \pi r^2 \left(\frac{v^2}{r^2} - k_t \right) + 2(r^2 - \lambda')k_t \right\} \\ \times \sin \sqrt{k_t} t + 2k_t t \frac{v}{r} \left\{ (\pi r^2 - r^2 + \lambda') \left(\frac{v^2}{r^2} - k_t \right) + 2(r^2 - \lambda') \right\} \left(\frac{v}{r} \right)^2 \sin \frac{v}{r} t \\ - 2\pi(r^2 + \lambda')k_t \left(\frac{v}{r} \right)^3 \cos \frac{v}{r} t - \pi(r^2 + \lambda')k_t \left(\frac{v}{r} \right)^2 \left(\frac{v^2}{r^2} - k_t \right) t \sin \frac{v}{r} t \\ - 2(r^2 - \lambda')k_t \left(\frac{v}{r} \right)^2 \left(\frac{v^2}{r^2} - k_t \right) t \cos \frac{v}{r} t = 0$$

woraus durch Versuch t ermittelt werden kann.

Für die Trägermitte wird bei $t = \frac{\pi r}{2v}$: (21) $\zeta_{D,1}^t = 0$

Die Lösung der Gl. (15) lautet:

$$(22) \quad \zeta_{D,1}^v = \frac{2P^n K_{D,1}^{v,v}}{\left\{ \pi^2(r^2 + \lambda') - 20\pi r^2 + 32r^2 - 4\pi\lambda' \right\} \left\{ \left(\frac{v}{r} \right)^2 - k_n \right\}^2} \left[4(\pi\lambda' - 4r^2 \right. \\ \left. + \pi r^2) \left(\frac{v}{r} \right)^3 \sqrt{k_n} \sin \sqrt{k_n} t - 2 \left(\frac{v}{r} \right)^2 \left\{ 2r^2(\pi - 2) \left(\frac{v}{r} \right)^2 + k_n \pi^2(r^2 + \lambda') \right\} \right]$$

$$\begin{aligned}
& -2k_n r^2(2+\pi) \Big\} \cos \sqrt{k_n} t + 4r^2(\pi-2) \Big\{ \left(\frac{v}{r} \right)^2 - k_n \Big\}^2 \\
& + 2k_n \Big\{ 2r^2(\pi-2) \left(\frac{v}{r} \right)^2 + \pi^2(r^2+\lambda') \left(\frac{v}{r} \right)^2 - 2r^2 k_n(\pi-2) \Big\} \cos \frac{v}{r} t \\
& - 2k_n(\pi\lambda' - 4r^2 + \pi r^2) \left(3 \frac{v^2}{r^2} - k_n \right) \sin \frac{v}{r} t \\
& + k_n \left(\frac{v^2}{r^2} - k_n \right) \Big\{ \pi^2(r^2+\lambda') - 8r^2 \Big\} \frac{v}{r} t \sin \frac{v}{r} t \\
& + 2k_n(\pi\lambda' - 4r^2 + \pi r^2) \left(\frac{v^2}{r^2} - k_n \right) \frac{v}{r} t \cos \frac{v}{r} t \Big]
\end{aligned}$$

$\zeta_{D,1}^n$ und $\frac{d\zeta_{D,1}^n}{dt}$ sind o für $t=0$. $\frac{d\zeta_{D,1}^n}{dt}$ wird auch o für

$$\begin{aligned}
(23) \quad & 4(\pi\lambda' - 4r^2 + \pi r^2) \left(\frac{v}{r} \right)^3 k_n \cos \sqrt{k_n} t + 2 \left(\frac{v}{r} \right)^2 \Big\{ 2r^2(\pi-2) \left(\frac{v}{r} \right)^2 \\
& + k_n \pi^2(r^2+\lambda') - 2k_n r^2(2+\pi) \Big\} \sqrt{k_n} \sin \sqrt{k_n} t \\
& + k_n \frac{v}{r} \Big\{ \left(\frac{v}{r} \right)^2 (16r^2 - 4\pi r^2 - \pi^2 r^2 - \pi^2 \lambda') \\
& + k_n \pi(4r^2 - \pi r^2 - \pi\lambda') \Big\} \sin \frac{v}{r} t - 4k_n \left(\frac{v}{r} \right)^3 (\pi\lambda' - 4r^2 + \pi r^2) \\
& \times \cos \frac{v}{r} t + k_n \left(\frac{v}{r} \right)^2 \left(\frac{v^2}{r^2} - k_n \right) \Big\{ \pi^2(r^2+\lambda') - 8r^2 \Big\} t \cos \frac{v}{r} t \\
& - 2k_n \left(\frac{v}{r} \right)^2 (\pi\lambda' - 4r^2 + \pi r^2) \left(\frac{v^2}{r^2} - k_n \right) t \sin \frac{v}{r} t = 0
\end{aligned}$$

woraus durch Versuch t ermittelt werden kann.

Für die Trägermitte wird bei $t = \frac{\pi r}{2v}$:

$$\begin{aligned}
(24) \quad \zeta_{D,1}^n = & \frac{2P^n \chi_{D,1}^{n,n}}{\left\{ \pi^2(r^2+\lambda') - 20\pi r^2 + 32r^2 - 4\pi\lambda' \right\} \left\{ \left(\frac{v}{r} \right)^2 - k'_n \right\}^2} \Bigg[4(\pi\lambda' - 4r^2 \\
& + \pi r^2) \left(\frac{2}{r} \right)^3 \sqrt{k'_n} \sin \left(\frac{\pi r}{2v} \sqrt{k'_n} \right) - 2 \left(\frac{v}{r} \right)^2 \Big\{ 2r^2(\pi-2) \left(\frac{v}{r} \right)^2 \\
& + k'_n \pi^2(r^2+\lambda') - 2k'_n r^2(2+\pi) \Big\} \cos \left(\frac{\pi r}{2v} \sqrt{k'_n} \right) \\
& + 4r^2(\pi-2) \left(\frac{v^2}{r^2} - k'_n \right)^2 - 2k'_n(\pi\lambda' - 4r^2 + \pi r^2) \left(3 \frac{v^2}{r^2} - k'_n \right) \\
& + \frac{\pi}{2} k'_n \left(\frac{v^2}{r^2} - k'_n \right) \Big\{ \pi^2(r^2+\lambda') - 8r^2 \Big\} \Big]
\end{aligned}$$

$$\text{wobei} \quad k_n' = \frac{S}{\chi_{D,1}^{n,n} P^n} = \frac{S^2 r}{\chi_{D,1}^{n,n} P v^2}.$$

Für $v=0$ wird in Gl. (24) richtig $\zeta_{D,1}^n=0$, für $V=\infty$ wird $\zeta_{D,1}^n$ unbestimmt. Wenn die Last die Trägermitte überschreitet, so sind die Verschiebungen in der Trägermitte D :

$$(25) \quad \zeta_D^v = \frac{Pr^3}{4\pi EI \{ \pi^2(I+\lambda) - 8\lambda \}} \left[2\pi^2 \lambda (\pi - 2\varphi_{\frac{\pi}{2}}) + \{ \pi^4(I+\lambda) - 6\pi^2 \lambda - 2\pi^2 + 16\lambda \} \sin \varphi_{\frac{\pi}{2}} - 2\pi \{ \pi^2(2\lambda + I) - 8\lambda \} \cos \varphi_{\frac{\pi}{2}} - \pi^3(I+\lambda) \varphi_{\frac{\pi}{2}} \right. \\ \left. \times \sin \varphi_{\frac{\pi}{2}} + 2 \{ \pi^2(I+\lambda) - 8\lambda \} \varphi_{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi_{\frac{\pi}{2}} \right] \\ + \frac{Pr^3}{4\pi EI \{ \pi^2(I+\lambda) - 8\lambda \}} \left[2\pi^2 \{ \pi^2(I+\lambda) - 8\lambda \} - 2\pi^3(2\lambda + I) + 16\pi \lambda - 2\pi \{ \pi^2(I+\lambda) - 8\lambda - 2\pi \} \varphi_{\frac{\pi}{2}} + \{ \pi^3(I+\lambda)(\pi - 2) - 2\pi^2(3+5\lambda) \right. \\ \left. + 16\lambda(\pi + I) \} \sin \varphi_{\frac{\pi}{2}} + 2\pi \{ 16\lambda - \pi^2(2\lambda + I) \} \cos \varphi_{\frac{\pi}{2}} - \pi(\pi^2 - 8)(I+\lambda) \varphi_{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi_{\frac{\pi}{2}} + 2 \{ \pi^2(I+\lambda) - 8\lambda \} \varphi_{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi_{\frac{\pi}{2}} \right]$$

$$(26) \quad \zeta_D^t = \frac{P^n r^3}{4\pi EI' \{ \pi^2(r^2 + \lambda') - 8r^2 \}} \left[2\pi^3(r^2 + \lambda') - 4\pi^2 \lambda' - 16\pi r^2 - \{ 3\pi^3(r^2 + \lambda') - 8\pi(3r^2 + \lambda') \} \sin \varphi_{\frac{\pi}{2}} + \{ \pi^2(r^2 + \lambda')(\pi + 2\pi - \pi^2) \right. \\ \left. - 4\pi r^2(\pi - \pi) \} \cos \varphi_{\frac{\pi}{2}} + 2 \{ \pi^2(r^2 + \lambda') - 8r^2 \} \varphi_{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi_{\frac{\pi}{2}} + \pi(\pi^2 - 8)(r^2 + \lambda') \varphi_{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi_{\frac{\pi}{2}} \right] + \frac{P^n r}{4\pi EF \{ \pi^2(r^2 + \lambda') - 8r^2 \}} \left[4\pi^2 r^2 \right. \\ \left. + \pi \{ \pi^2(r^2 + \lambda') - 16r^2 \} \sin \varphi_{\frac{\pi}{2}} - \pi^2 \{ \pi^2(r^2 + \lambda') - 4r^2 \} \cos \varphi_{\frac{\pi}{2}} - 2 \{ \pi^2(r^2 + \lambda') - 8r^2 \} \varphi_{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi_{\frac{\pi}{2}} + \pi^3(r^2 + \lambda') \varphi_{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi_{\frac{\pi}{2}} \right]$$

$$(27) \quad \zeta_D^n = \frac{P^n r^3}{4EI' \{ \pi^2(r^2 + \lambda') - 8r^2 \}} \left[4\pi(r^2 + \lambda') - 8r^2 + \{ 10\pi r^2 + 2\pi \lambda' - (\delta + \pi^3)(r^2 + \lambda') \} \sin \varphi_{\frac{\pi}{2}} + \{ \pi(2\pi - \delta)(r^2 + \lambda') - 8r^2 \} \cos \varphi_{\frac{\pi}{2}} \right. \\ \left. + \{ \pi^2(r^2 + \lambda') - 8r^2 \} \varphi_{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi_{\frac{\pi}{2}} + (\delta - 2\pi)(r^2 + \lambda') \varphi_{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi_{\frac{\pi}{2}} + \frac{P^n r}{4EF \{ \pi^2(r^2 + \lambda') - 8r^2 \}} \left[-8r^2 + \{ 10\pi r^2 + 2\pi \lambda' - \pi^3(r^2 + \lambda') \} \right. \right. \\ \left. \times \sin \varphi_{\frac{\pi}{2}} + \{ 2\pi^2(r^2 - \lambda') - 8r^2 \} \cos \varphi_{\frac{\pi}{2}} + \{ \pi^2(r^2 + \lambda') - 8r^2 \} \varphi_{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi_{\frac{\pi}{2}} - 2\pi(r^2 + \lambda') \varphi_{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi_{\frac{\pi}{2}} \right] \left. \right]$$

Die veränderlichen Kräfte P_D^r , P_D^t , P_D^n , die ortsfest in der Trägermitte verharrend die gleichen Verschiebungen erzeugen, lassen sich wie folgt errechnen:

$$\begin{aligned}
 (28) \quad \left\{ \begin{aligned}
 P_D^v &= \frac{2P}{\pi^2 - 4 + \lambda(3\pi^2 - 8\pi - 4)} \left[2\pi\lambda(\pi - 1) - 2\pi\lambda \frac{v}{r} t + \left\{ \pi^2(I + \lambda) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2(I + \lambda + \pi\lambda) \right\} \sin \frac{v}{r} t - 2\pi(I + 2\lambda) \cos \frac{v}{r} t - \pi(2 + \lambda) \frac{v}{r} t \right. \\
 &\quad \left. \times \sin \frac{v}{r} t + 2(I + \lambda) \frac{v}{r} t \cos \frac{v}{r} t \right] \\
 P_D^t &= \frac{2(r^2 + \lambda')P^u}{\pi(r^2 + \lambda')\{r^2(3\pi - 8) + \pi\lambda'\} - 4(r^2 - \lambda')^2} \left[2\pi r^2 + (\pi\lambda' - 3\pi r^2) \right. \\
 &\quad \left. \times \sin \frac{v}{r} t + \left\{ 2\pi r^2 - \pi^2(r^2 + \lambda') \right\} \cos \frac{v}{r} t + 2(r^2 - \lambda') \frac{v}{r} t \sin \frac{v}{r} t \right. \\
 &\quad \left. + (\pi r^2 + \pi\lambda') \frac{v}{r} t \cos \frac{v}{r} t \right] \\
 P_D^u &= \frac{2P^u}{\pi^3(r^2 + \lambda') - 20\pi r^2 + 32r^3 - 4\pi\lambda'} \left[4r^2(\pi - 2) + \left\{ 10\pi r^2 + 2\pi\lambda' \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 8r^2 - \pi^3(r^2 + \lambda') \right\} \sin \frac{v}{r} t + \left\{ 2\pi^2(r^2 + \lambda') - 4r^2(\pi + 2) \right\} \cos \frac{v}{r} t \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ \pi^2(r^2 + \lambda') - 8r^2 \right\} \frac{v}{r} t \sin \frac{v}{r} t + \left\{ 8r^2 - 2\pi(r^2 + \lambda') \right\} \frac{v}{r} t \cos \frac{v}{r} t \right]
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Um die Differentialgleichungen für die erzwungenen Schwingungen des Trägers unter diesen veränderlichen Kräften zu lösen, müssen die Grenzbedingungen zur Ermittlung der sich ergebenden Festwerte jetzt so gewählt werden, dass die Schaulinienhälften für die Verschiebungen der Trägermitte bei Bewegung der Last von bzw. nach der Trägermitte richtig aneinander schliessen.

Die vertikale erzwungene Schwingung ist alsdann:

$$\begin{aligned}
 (29) \quad \xi_{D,1}^v &= \frac{2P\chi_{D,1}^{v,v}}{\left\{ \pi^2 - 4 + \lambda(3\pi^2 - 8\pi - 4) \right\} \left(\frac{v^2}{r^2} - k_v' \right)^2} \left[2 \left(\frac{v}{r} \right)^3 \left\{ k_v'(\pi\lambda - 2 - 2\lambda) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \pi\lambda \frac{v^2}{r^2} \right\} \frac{\sin \left(\frac{\pi r}{2v} \sqrt{k_v'} t \right)}{\sqrt{k_v'}} + 2\pi \left(\frac{v}{r} \right)^2 \left(\lambda \frac{v^2}{r^2} + k_v' \right) \cos \left(\frac{\pi r}{2v} \sqrt{k_v'} t \right) \right] \\
 &+ \frac{2P\chi_{D,1}^{u,v}}{\left\{ \pi^2 - 4 + \lambda(3\pi^2 - 8\pi - 4) \right\} \left(\frac{v^2}{r^2} - k_v \right)^2} \left[2\pi\lambda \left(\frac{v^2}{r^2} - k_v \right)^2 (\pi - 1 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{v}{r} t) - k_v \left\{ \left(\pi^2(I + \lambda) - 2(I + \lambda + \pi\lambda) \right) \left(\frac{v^2}{r^2} - k_v \right) - 4(I + \lambda) \frac{v^2}{r^2} \right\} \right. \\
 &\quad \left. \times \sin \frac{v}{r} t + 2\pi k_v \left\{ (I + 2\lambda) \left(\frac{v^2}{r^2} - k_v \right) + (I + \lambda) \frac{v^2}{r^2} \right\} \cos \frac{v}{r} t \right. \\
 &\quad \left. + (I + \lambda) k_v \left(\frac{v^2}{r^2} - k_v \right) \left\{ \pi \frac{v}{r} t \sin \frac{v}{r} t - 2 \frac{v}{r} t \cos \frac{v}{r} t \right\} \right]
 \end{aligned}$$

Für Endpunkt B wird bei $t = \frac{\pi r}{v}$:

$$(30) \quad \zeta_{D,1} = \frac{2P\chi_{D,1}^{v,v}}{\left\{ \pi^2 - 4 + \lambda(3\pi^2 - 8\pi - 4) \right\} \left(\frac{v^2}{r^2} - k'_v \right)^2} \left[2 \left(\frac{v}{r} \right)^3 \left\{ k'_v (\pi\lambda - 2 - 2\lambda) \right. \right. \\ \left. \left. - \pi\lambda \frac{v^2}{r^2} \right\} \frac{\sin \left(\frac{\pi r}{2v} \sqrt{k'_v} \right)}{\sqrt{k'_v}} + 2\pi \left(\frac{v}{r} \right)^2 \left(\lambda \frac{v^2}{r^2} + k'_v \right) \cos \left(\frac{\pi r}{2v} \sqrt{k'_v} \right) \right]$$

Für $v=0$ wird in Gl. (30) richtig $\zeta_{D,1}^v = 0$.

Die tangentielle erzwungene Schwingung lautet:

$$(31) \quad \zeta_{D,1}^t = \frac{2P^n(r^2 + \lambda') K_{D,1}^{t,t}}{\left[\pi(r^2 + \lambda') \left\{ r^2(3\pi - 8) + \pi\lambda' \right\} - 4(r^2 - \lambda')^2 \right] \left(\frac{v^2}{r^2} - k_t \right)^2} \\ \times \left[2\pi r^2 \left(\frac{v^2}{r^2} - k_t \right)^2 + \pi k_t \left\{ \frac{v^2}{r^2} (5r^2 + \lambda') + k_t(\lambda' - 3r^2) \right\} \sin \frac{v}{r} t \right. \\ \left. - k_t \left\{ \left(2\pi r^2 - \pi^2(r^2 + \lambda') \right) \left(\frac{v^2}{r^2} - k_t \right) + 4 \frac{v^2}{r^2} (r^2 - \lambda') \right\} \cos \frac{v}{r} t \right. \\ \left. - k_t \left(\frac{v^2}{r^2} - k_t \right) \left\{ 2(r^2 - \lambda') \frac{v}{r} t \sin \frac{v}{r} t + \pi(r^2 + \lambda') \frac{v}{r} t \cos \frac{v}{r} t \right\} \right]$$

Für Endpunkt B wird bei $t = \frac{\pi r}{v}$:

$$(32) \quad \zeta_{D,1}^t = 0$$

Die normale erzwungene Schwingung lautet:

$$(33) \quad \zeta_{D,1}^n = \frac{2P^n K_{D,1}^{n,n}}{\left\{ \pi^3(r^2 + \lambda') - 20\pi r^2 + 32r^2 - 4\pi\lambda' \right\} \left(\frac{v^2}{r^2} - k'_n \right)^2} \left[4(\pi\lambda' - 4r^2 \right. \\ \left. + \pi r^2 \left(\frac{v}{r} \right)^3 \sqrt{k'_n} \sin \left(\frac{\pi r}{2v} \sqrt{k'_n} \right) - 2 \left(\frac{v}{r} \right)^2 \left\{ 2r^2(\pi - 2) \left(\frac{v}{r} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + k'_n \pi^2(r^2 + \lambda') - 2k'_n r^2(2 + \pi) \right\} \cos \left(\frac{\pi r}{2v} \sqrt{k'_n} \right) \right] \\ + \frac{2P^n \chi_{D,1}^{n,n}}{\left\{ \pi^3(r^2 + \lambda') - 20\pi r^2 + 32r^2 - 4\pi\lambda' \right\} \left(\frac{v^2}{r^2} - k_n \right)^2} \left[4r^2(\pi - 2) \left(\frac{v^2}{r^2} \right. \right. \\ \left. \left. - k_n \right)^2 - k_n \left\{ \left(\frac{v^2}{r^2} - k_n \right) (10\pi r^2 + 2\pi\lambda' - 8r^2 - \pi^3 r^2 - \pi^3 \lambda') \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \left(\frac{v}{r} \right)^2 (8r^2 - 2\pi r^2 - 2\pi\lambda') \right\} \sin \frac{v}{r} t - k_n \left\{ \left(\frac{v^2}{r^2} - k_n \right) (2\pi^2 r^2 + 2\pi^2 \lambda') \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \left(\frac{v}{r} \right)^2 (8r^2 - 2\pi r^2 - 2\pi\lambda') \right\} \cos \frac{v}{r} t \right]$$

$$\begin{aligned}
& -4\pi r^2 - 8r^2) + 2\left(\frac{v}{r}\right)^2 (\pi^2 r^2 + \pi^2 \lambda' - 8r^2) \left\{ \cos \frac{v}{r} t - k_n \left(\frac{v^2}{r^2} - k_n \right) \right\} \left\{ (\pi^2 r^2 \right. \\
& \left. + \pi^2 \lambda' - 8r^2) \frac{v}{r} t \sin \frac{v}{r} t + (8r^2 - 2\pi r^2 - 2\pi \lambda') \frac{x}{r} t \cos \frac{v}{r} t \right\} \Big]
\end{aligned}$$

Für Endpunkt B wird bei $t = \frac{\pi r}{v}$:

$$\begin{aligned}
(34) \quad \zeta_{B,1}^n = & \frac{2P^n \chi_{B,1}^{n,n}}{\left\{ \pi^2 (r^2 + \lambda') - 20\pi r^2 + 32r^2 - 4\pi \lambda' \right\} \left(\frac{v^2}{r^2} - k_n' \right)^2} \left[4(\pi \lambda' - 4r^2 \right. \\
& + \pi r^2) \left(\frac{v}{r} \right)^3 \sqrt{k_n'} \sin \left(\frac{\pi r}{2v} \sqrt{k_n'} \right) - 2 \left(\frac{v}{r} \right)^2 \left\{ 2r^2 (\pi - 2) \left(\frac{v}{r} \right)^2 \right. \\
& \left. \left. + k_n' \pi^2 (r^2 + \lambda') - 2k_n' r^2 (2 + \pi) \right\} \cos \left(\frac{\pi r}{2v} \sqrt{k_n'} \right) \right]
\end{aligned}$$

Für $v=0$ wird in Gl. (34) richtig $\zeta_{B,1}^n = 0$.

Dieses Verfahren wird durch das folgende numerische Beispiel erläutert :

Für den Träger mit rundem Querschnitt sei $I = I' = 480.9 \text{ cm}^4$, $J = 981.8 \text{ cm}^4$, $F = 78.54 \text{ cm}^2$, $E = 2,000,000 \text{ kg/cm}^2$, $\mu = 800,000 \text{ kg/cm}^2$, $P = 1,000 \text{ kg}$, $r = 1.00 \text{ m}$; die Geschwindigkeit $v = 3.00 \text{ m/sek.}$, womit der Träger in 1.047 Sek. durchfahren wird.

$$\lambda = \frac{EI}{\mu J} = 1.25, \quad \lambda' = \frac{I'}{F} = 6.25 \text{ cm}^2, \quad P^n = \frac{Pv^2}{gr} = 917 \text{ kg.}$$

Man erhält für die Anwendung der Gl. (2) nachstehende Zusammenstellung III

Zusammenstellung III (A)

φ_z	in Zahlen	0.15	0.30	0.45	0.60	0.75	0.90	1.05	1.20	1.35	1.50	1.57
	in Graden	8°36'	17°11'	25°47'	34°23'	42°58'	51°34'	60°10'	68°45'	77°21'	85°57'	90°00'
t in Sek.		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.524
M_o in kg m		143	271	380	466	531	571	588	585	562	523	500
B_o in kg m		-114	-185	-218	-218	-193	-150	-95	-35	25	78	100
T_o in kg m		7	24	49	79	107	134	156	172	181	182	181
V_o in kg		993	981	958	925	880	825	762	692	615	536	500
H_o^t in kg		-131	-245	-342	-417	-476	-511	-522	-528	-511	-479	-458
H_o^n in kg		900	802	677	522	350	174	4	-151	-281	-382	-419

Zusammenstellung III (B)

$\varphi_{\pm}$	in Zahlen	1.65	1.80	1.95	2.10	2.25	2.40	2.55	2.70	2.85	3.00	3.14
	in Graden	94°32'	103°08'	111°44'	120°19'	128°55'	137°31'	146°06'	154°42'	163°18'	171°53'	180°00'
t in Sek.		0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00	1.047
M_o in kg m		474	411	344	276	209	148	97	56	22	7	0
B_o in kg m		120	150	169	168	159	131	96	65	32	8	0
T_o in kg m		178	165	146	124	99	73	48	29	11	3	0
V_o in kg		456	377	300	230	166	114	70	36	14	3	0
H_o^t in kg		-435	-379	-324	-263	-201	-146	-96	-55	-23	-6	0
H_o^n in kg		-446	-487	-483	-455	-394	-309	-221	-142	-66	-20	0

Es ergibt sich für die Anwendung der Gl. (6), (9), (12), (16), (19) und (22) für die linke Trägerhälfte nachstehende Zusammenstellung IV.

Zusammenstellung IV.

t in Sek.	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.524
P_D^v in kg	21	83	180	304	445	592	732	853	943	991	1000
P_D^h in kg	-86	-292	-541	-782	-952	-1022	-973	-803	-526	-199	0
P_D^n in kg	68	219	347	420	374	212	-52	-370	-676	-846	-917
$\zeta_{D,1}^v$ in cm	.0055	.0216	.0468	.0791	.1162	.1553	.1930	.2243	.2467	.2619	.2638
$\zeta_{D,1}^h$ in cm	-.0016	-.0053	-.0099	-.0144	-.0174	-.0188	-.0179	-.0147	-.0097	-.0032	-.0000
$\zeta_{D,1}^n$ in cm	.0009	.0029	.0046	.0055	.0051	.0028	-.0007	-.0048	-.0088	-.0115	-.0121

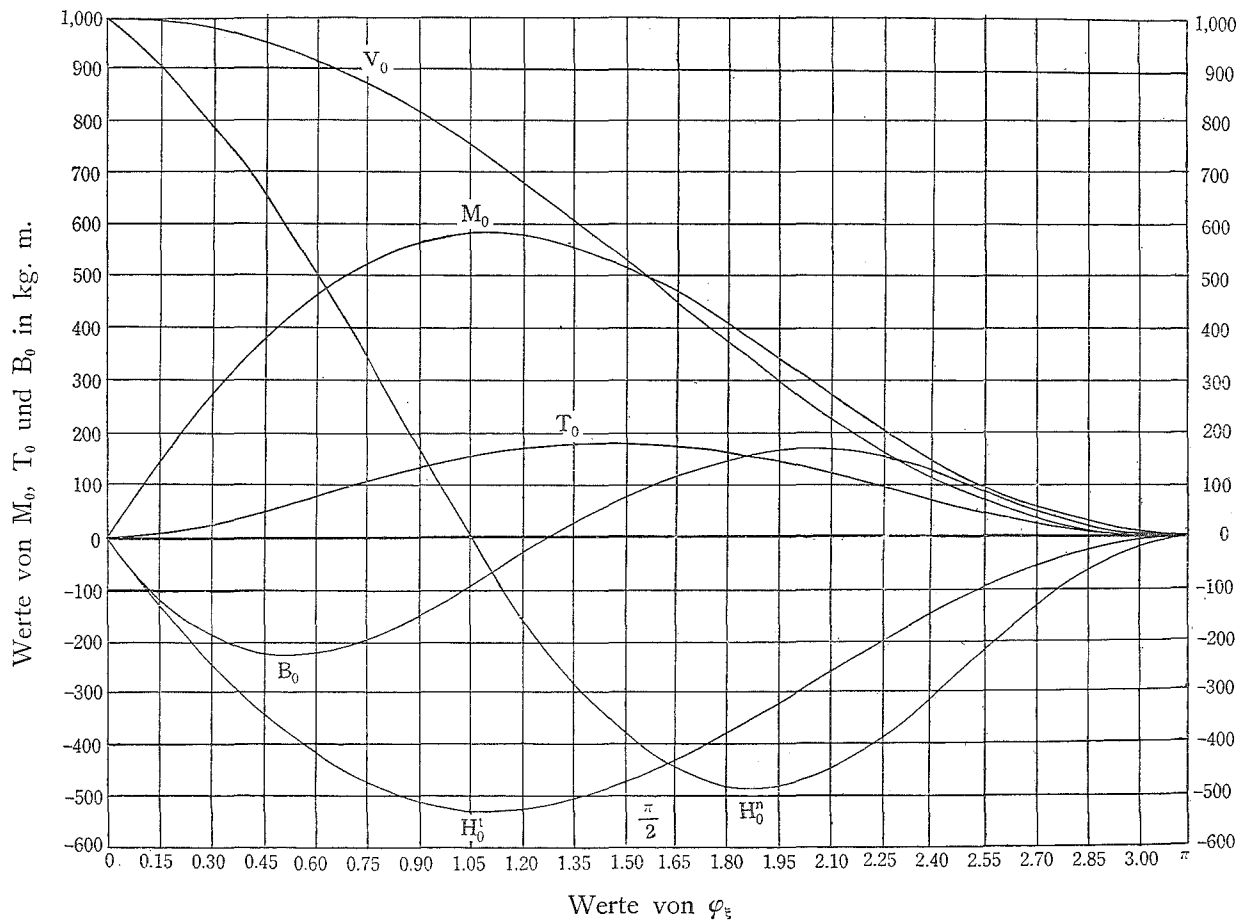
Für die rechte Trägerhälfte erhält man unter Benutzung von Gl. (28), (29), (31), (33) nachstehende Zusammenstellung V.

Zusammenstellung V.

t in Sek.	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00	1.047
P_D^v in kg	989	937	838	714	584	442	294	164	71	9	0
P_D^h in kg	198	544	815	979	1020	944	767	529	277	77	0
P_D^n in kg	-869	-663	-353	-34	225	377	413	346	208	63	0
$\zeta_{D,1}^v$ in cm	.2611	.2479	.2211	.1888	.1541	.1168	.0778	.0451	.0196	.0057	.0010
$\zeta_{D,1}^h$ in cm	.0036	.0100	.0150	.0180	.0187	.0173	.0141	.0097	.0051	.0014	.0000
$\zeta_{D,1}^n$ in cm	-.0114	-.0087	-.0046	-.0004	.0029	.0050	.0054	.0045	.0027	.0008	.0000

Durch Auflagen erhält man die in Abb. 7 dargestellte Kurve für die Momente und Reaktionen im Stützpunkte A.

Werte von V_0 , H_0' und H_0'' in kg.



In den nachstehenden Abbildungen 8 und 9 sind die mit der Zeit veränderlichen Kräfte und die Einflusslinien für die Verschiebungen in der Trägermitte ersichtlich gemacht.

Abb. 8.

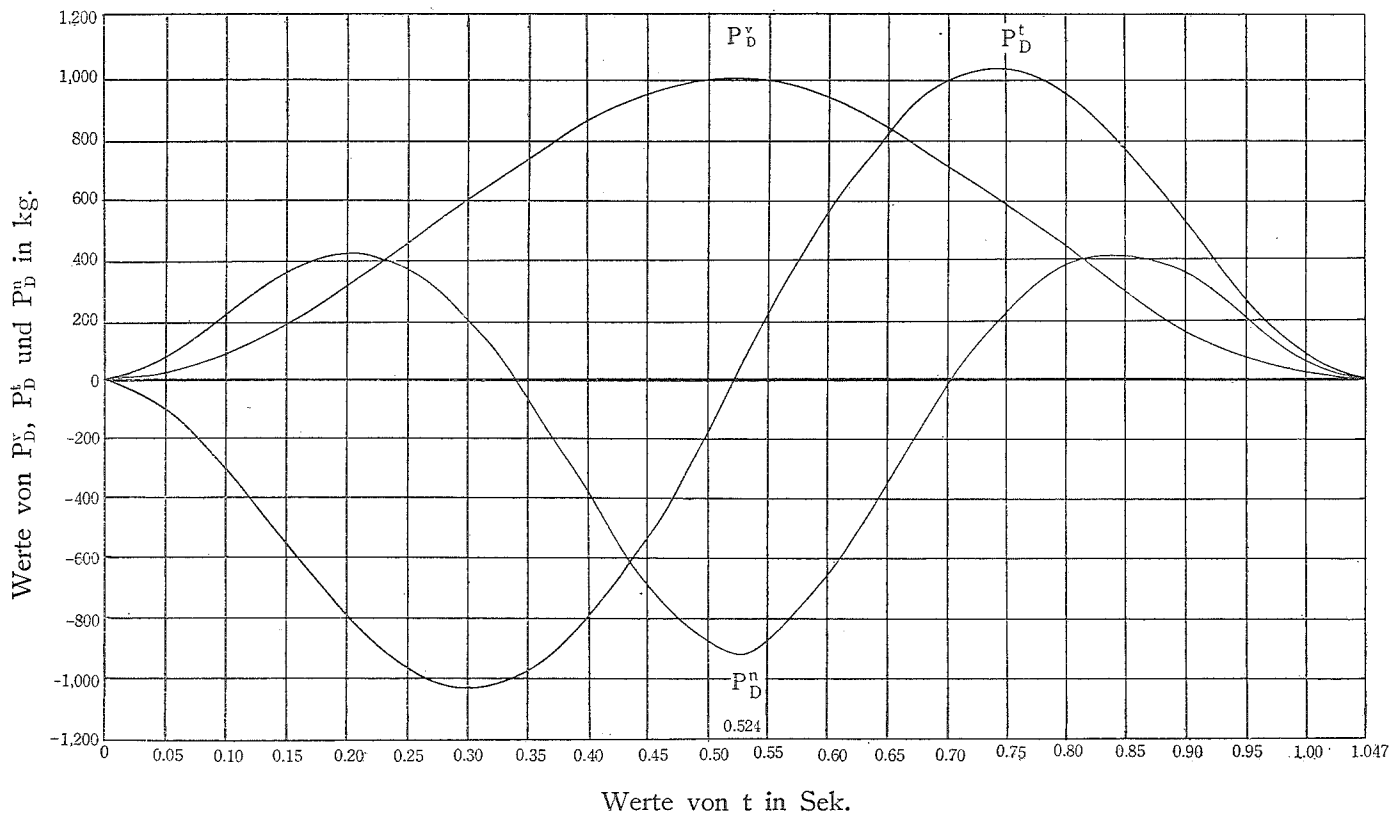
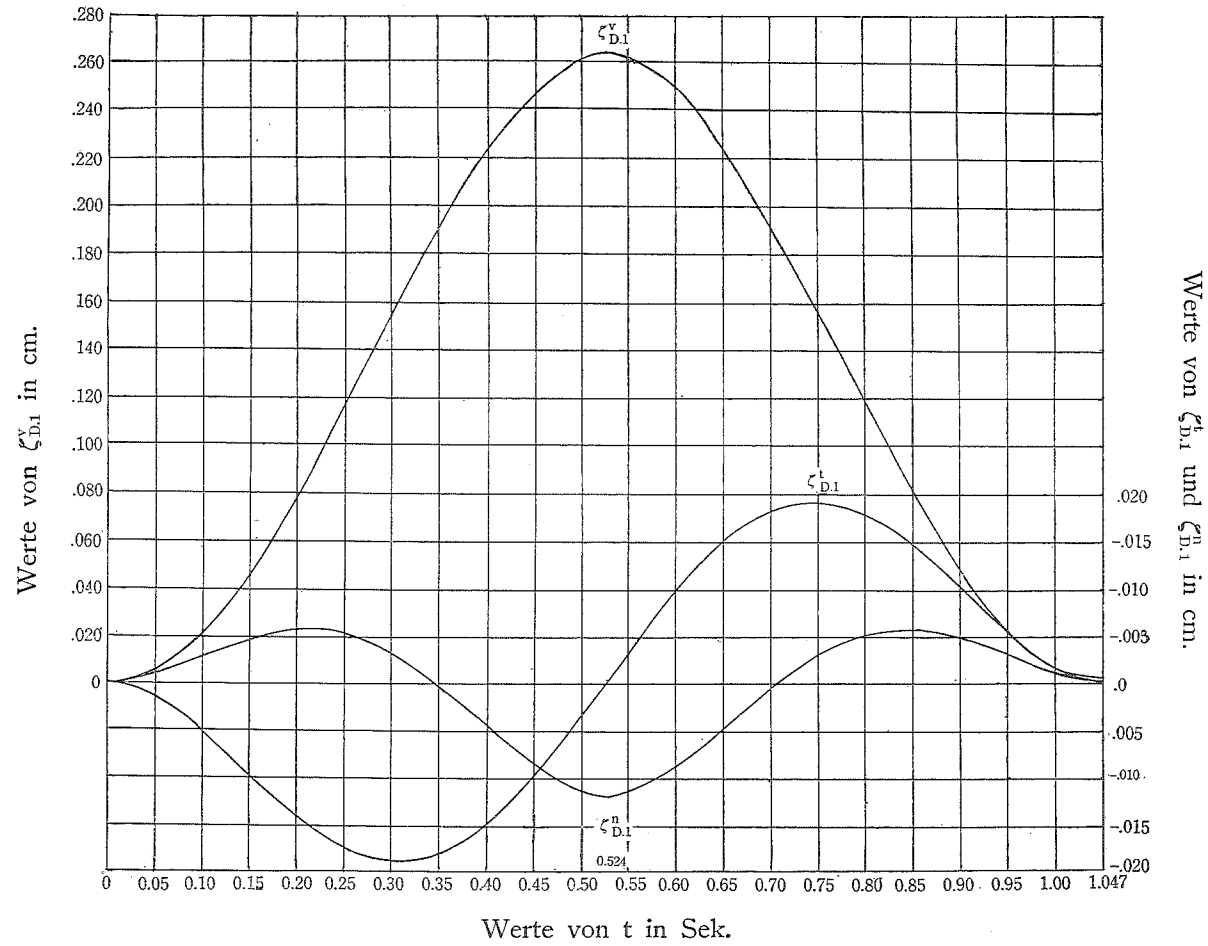


Abb. 9.



Man ist gewohnt, die Formänderungen, welche unter bewegten Lasten am Träger auftreten, statisch zu berechnen. Diese Formänderungen vollziehen sich aber in der Form der Schwingung und sind geneigt von den statischen abzuweichen. Sie stehen unter dem Einflusse der Zeit. Man erkennt sicher, dass die Verschiebungen $\zeta_D^v, \zeta_D^t, \zeta_D^n$ in Gl. (3), (7), (10), (25), (26), (27) und $\zeta_{D,1}^v, \zeta_{D,1}^t, \zeta_{D,1}^n$ in Gl. (16), (19), (22), (29), (31), (33) miteinander gar nicht gleich sind.

$\zeta_{D,1}^v, \zeta_{D,1}^n$ sind nicht *richtig* gleich null für Endpunkt B bei $\varphi_{\frac{1}{2}} = \pi$, obgleich ζ_D^v, ζ_D^n gleich Null sind.

$\zeta_{D,1}^t$ ist richtig gleich null für $\varphi_{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi_{\frac{1}{2}} = \pi$.
