



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Étude sur la force longitudinale de la pièce encastrée, les murs étant complètement dociles aux déplacements angulaires
Author(s)	Takabeya, Fukuhei
Citation	Memoirs of the Faculty of Engineering, Hokkaido Imperial University, 1, 73-89
Issue Date	1928
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/37671
Type	departmental bulletin paper
File Information	1_73-89.pdf



Étude sur la force longitudinale de la pièce encastrée, les murs étant complètement dociles aux déplacements angulaires

Par

Fukuhei Takabeya.

(reçu le 19 Juin 1926)

Nous rappelons que l'expression "pièce complètement encastrée" désigne pour nous toute pièce encastrée aux deux extrémités et qui n'est susceptible d'aucun déplacement horizontal ou angulaire. Cette définition approfondie d'une pièce encastrée est donnée dans notre étude sur la pièce complètement encastrée, parue dans les mémoires de notre faculté, bulletin du mois de mars de cette année et nous en tirons de nouveau les premiers deux cas ; on y trouve le mot "encastrement" pour désigner le cas où la tension et le moment fléchissant négatif agissent aux deux extrémités de la pièce et en plus le cas où la tension agit aux deux extrémités, sans qu'il y ait aucun moment fléchissant.

Comme les cas spéciaux et bien applicables en pratique, nous traiterons ci-dessous *le cas où le déplacement horizontal n'est pas permis, bien qu'il y ait le déplacement angulaire, c'est-à-dire sans qu'il y ait aucun moment fléchissant aux deux extrémités de la pièce.*

Cas où les matériaux des murs sont plus ou moins dociles au moment fléchissant, mais rigoureusement résistants à la réaction horizontale.

Les matériaux dont sont faits les murs ne sont pas, en pratique, rigoureusement résistants à la tension ni au moment fléchissant ; ils présentent

généralement une certaine souplesse qui peut avoir, même si elle paraît extrêmement faible, une grande influence sur l'état d'équilibre de la pièce.

Nous allons étudier ce problème seulement pour le cas où les matériaux des murs sont plus ou moins dociles au moment fléchissant, mais rigoureusement résistants à la réaction horizontale.

Soit une pièce AB de longueur l , de section uniforme $\mathcal{Q}$, encastrée aux deux extrémités et portant une charge P au point C situé à la distance a_1 de l'extrémité A . Soient R_1 et R_2 les réactions verticales respectives des extrémités A et B ; soit X la réaction horizontale aux extrémités; soient M_1 et M_2 leurs moments fléchissants.

Pour les lignes élastiques, nous avons les équations :¹⁾

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} \text{de } A \text{ à } C: y = A_1 e^{\xi x} + A_2 e^{-\xi x} + \frac{R_1}{X} x - \frac{M_1}{X}, \\ \text{de } C \text{ à } B: y = B_1 e^{\xi x} + B_2 e^{-\xi x} + \frac{R_2(l-x)}{X} - \frac{M_2}{X}, \\ \text{où } \xi = \left\{ \frac{X}{EI[1 + X/(E\mathcal{Q})]} \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{array} \right.$$

Les quatre constantes A_1 , A_2 , B_1 et B_2 sont déterminées par les quatre conditions suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{pour } x=0 & y=0; \\ \text{pour } x=0 & dy/dx = \varphi_1 \\ \text{pour } x=l & y=0; \\ \text{pour } x=l & dy/dx = -\varphi_2. \end{array}$$

On a donc

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} A_1 = \frac{I}{2X\xi} (M_1\xi - R_1 + X\varphi_1) \\ A_2 = \frac{I}{2X\xi} (M_1\xi + R_1 - X\varphi_1) \\ B_1 = \frac{ch\xi l - sh\xi l}{2X\xi} (M_2\xi + R_2 - X\varphi_2) \\ B_2 = \frac{ch\xi l + sh\xi l}{2X\xi} (M_2\xi - R_2 + X\varphi_2). \end{array} \right.$$

1) Voir Mémoires Vol. I, No. 1, 1926, P. 4.

Remplaçant A_1 , A_2 , B_1 et B_2 par ces valeurs dans l'équation (1) nous avons :

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \text{de } A \text{ à } C: y = \frac{M_1}{X} (ch\xi x - 1) - \frac{R_1}{X\xi} (sh\xi x - \xi x) + \frac{\varphi_1}{\xi} sh\xi x \\ \text{de } C \text{ à } B: y = \frac{M_2}{X} \left\{ ch\xi(l-x) - 1 \right\} - \frac{R_2}{X\xi} \left\{ sh\xi(l-x) - \xi(l-x) \right\} \\ \quad + \frac{\varphi_2}{\xi} sh\xi(l-x) \\ \text{d'où l'on tire :} \\ \text{de } A \text{ à } C: M_x = \frac{R_1}{\xi} sh\xi x - M_1 ch\xi x - \varphi_1 \xi K I sh\xi x, \\ \text{de } C \text{ à } B: M_x = \frac{R_2}{\xi} sh\xi(l-x) - M_2 ch\xi(l-x) - \varphi_2 \xi K I sh\xi(l-x). \end{array} \right.$$

En supposant que les deux extrémités demeurent, même après déformation de la pièce, sur la droite AB , les deux réactions horizontales X aux extrémités doivent être égales ; nous avons par suite cinq inconnues : X , R_1 , R_2 , M_1 et M_2 . Nous renvoyons à plus tard le calcul de X et nous allons chercher à déterminer les quatre autres inconnues.

La statique nous donne deux équations :

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 - P &= 0, \\ R_1 l - M_1 - P(l - a_1) + M_2 &= 0. \end{aligned}$$

Pour $x = a_1$, c'est-à-dire au point C , les flèches des lignes élastiques AC et CB sont égales ; et au même point leur inclinaison sur AB est identique ; ces conditions donnent deux équations qui, avec les deux équations précédentes, nous donnent les quatre inconnues : R_1 , R_2 , M_1 et M_2 :

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} R_1 = P \delta sh \omega \left\{ k_2 ch \omega + sh \left(\frac{k_1 - k_2}{2} \right) - sh \omega \right\} - X \delta (\varphi_1 - \varphi_2) sh^2 \omega, \\ R_2 = P \delta sh \omega \left\{ k_1 ch \omega + sh \left(\frac{k_2 - k_1}{2} \right) - sh \omega \right\} + X \delta (\varphi_1 - \varphi_2) sh^2 \omega, \\ M_1 = \frac{P \delta a_1}{2 k_1} \left\{ sh k_1 + sh k_2 - sh 2 \omega + k_2 (ch 2 \omega - 1) - 2 \omega (ch k_2 - 1) \right\} \\ \quad + \frac{X \delta l}{4 \omega} \left\{ \varphi_1 (sh 2 \omega - 2 \omega ch 2 \omega) + \varphi_2 (sh 2 \omega - 2 \omega) \right\}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} M_2 &= \frac{P\delta a_2}{2k_2} \left\{ shk_1 + shk_2 - sh2\omega + k_1(ch2\omega - I) - 2\omega(chk_1 - I) \right\} \\ &\quad + \frac{X\delta l}{4\omega} \left\{ \varphi_2(sh2\omega - 2\omega ch2\omega) + \varphi_1(sh2\omega - 2\omega) \right\}, \\ \text{où } \delta &= \left\{ \omega sh2\omega - ch2\omega + I \right\}^{-1}, \quad \omega = \frac{l}{2}\xi, \quad k_1 = a_1\xi \quad \text{et} \quad k_2 = (l - a_1)\xi. \end{aligned} \right.$$

Pour déterminer la réaction horizontale X , nous appliquons le théorème de Castigliano et l'on a :

$$(5) \quad X = \frac{\Omega}{H} \int_x \frac{y}{2} M_x dx.$$

Le second membre de la dernière équation étant implicitement transcendante, on n'en peut tirer aucune conclusion pratique.

Dans notre recherche publiée dans les Mémoires No. 1, quelques avis pour l'application de ce théorème-ci sont donnés.

De la dernière équation, on a donc pour X :

$$X = \frac{\Omega}{H} \left\{ \int_0^{a_1} \frac{y}{2} M_x dx + \int_{a_1}^l \frac{y}{2} M_x dx \right\}$$

d'où l'on tire :

$$(5a) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{n=1}^2 \frac{R_n M_n a_n^6}{k_n^6} \left(ch2k_n - 2k_n shk_n - I \right) - \sum_{n=1}^2 \frac{M_n^2 a_n^5}{k_n^4} \left(\frac{sh2k_n}{2k_n} - \frac{2shk_n}{k_n} + I \right) \\ &- \sum_{n=1}^2 \frac{R_n^2 a_n^7}{k_n^6} \left(\frac{sh2k_n}{2k_n} + \frac{2shk_n}{k_n} - 2ch2k_n - I \right) - \sum_{n=1}^2 \frac{M_n \varphi_n a_n^4}{k_n^4} \left(ch2k_n - 2ch2k_n + I \right) \\ &+ \sum_{n=1}^2 \frac{2R_n \varphi_n a_n^5 K I}{k_n^4} \left(\frac{sh2k_n}{2k_n} + \frac{shk_n}{k_n} - ch2k_n - I \right) \\ &- \sum_{n=1}^2 \frac{\varphi_n^2 a_n^3 K^2 I^2}{k_n^2} \left(\frac{sh2k_n}{2k_n} - I \right) - \frac{4IK^2 I^3}{\Omega} = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette équation nous permet de déterminer la réaction horizontale X .

Note.

Pour calculer la réaction X , en posant $K=E \{1+X/(E\Omega)\}$, on peut encore partir de l'équation.

$$l \left\{ 1 + \frac{X}{K\Omega} \right\} = \int_0^l \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} dx$$

qui donne, par approximation :

$$X = \frac{K\Omega}{2l} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx.$$

De l'équation (5) on tire d'autre part :

$$X = -\frac{\Omega}{2H} \int_0^l y M_x dx.$$

Avec l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_x}{KI},$$

les dernières deux équations nous donnent :

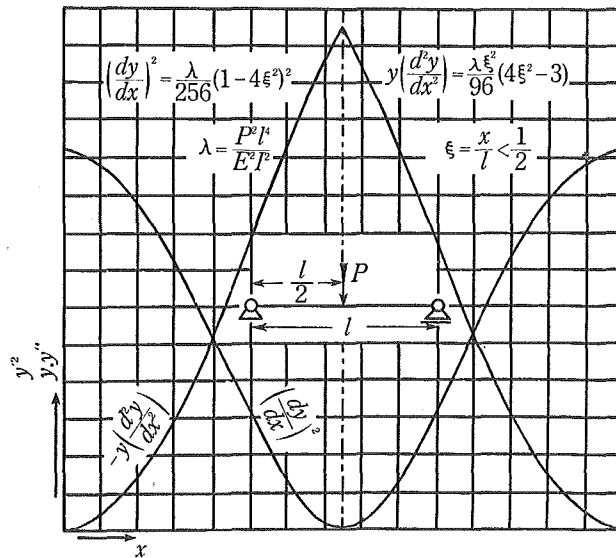


Fig. 1.

$$(6) \quad \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx + \int_0^l y \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) dx = 0. \text{D}$$

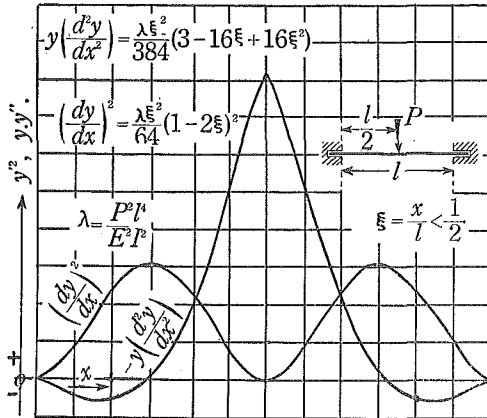


Fig. 2.

Si l'expression y est inconnue, l'équation (6) est une équation intégrale et la ligne élastique d'une pièce primitivement droite satisfait l'équation (6). Dans les figures 1 et 2, on constate que les aires de surface de $(dy/dx)^2$ et $y \cdot d^2y/dx^2$ sont égales, bien que les formes respectives sont excessivement différentes.

Pièce encastree aux deux extrémités, les murs étant complètement dociles aux déplacements angulaires.

C'est le problème qui se pose pour un encastrement avec rotules horizontalement immobiles.

Dans ce cas $M_1 = M_2 = 0$ et en désignant a_1 et $(l - a_1)$ respectivement par ϵl et $(1 - \epsilon)l$, on a ;

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_1 = P(1 - \epsilon), \\ R_2 = P\epsilon, \\ \varphi_1 = \frac{Pl^2}{4KI} f_1, \\ \varphi_2 = \frac{Pl^2}{4KI} f_2, \end{array} \right. \text{ où l'on a posé : } \left\{ \begin{array}{l} f_1 = \omega^{-2} \left\{ \frac{sh2\epsilon\omega + ch2\epsilon\omega - sh2(2 - \epsilon)\omega - ch2(2 - \epsilon)\omega}{sh4\omega + ch4\omega - 1} + 1 - \epsilon \right\}, \\ f_2 = \omega^{-2} \left\{ \frac{sh2(1 - \epsilon)\omega + ch2(1 - \epsilon)\omega - sh2(1 + \epsilon)\omega - ch2(1 + \epsilon)\omega}{sh4\omega + ch4\omega - 1} + \epsilon \right\} \end{array} \right.$$

et

$$0 < \epsilon < 1$$

1) Équation similaire a été donnée par M. A. Ono. Voir Memoirs of the college of Engineering Kyushu Imperial University, Japan, Vol. III, No. 2, 1924.

Les figures 3 à 7 donnent la représentation graphique des expressions f_1 et f_2 qui permettent de déterminer les lignes d'influence de φ_1 et φ_2 .

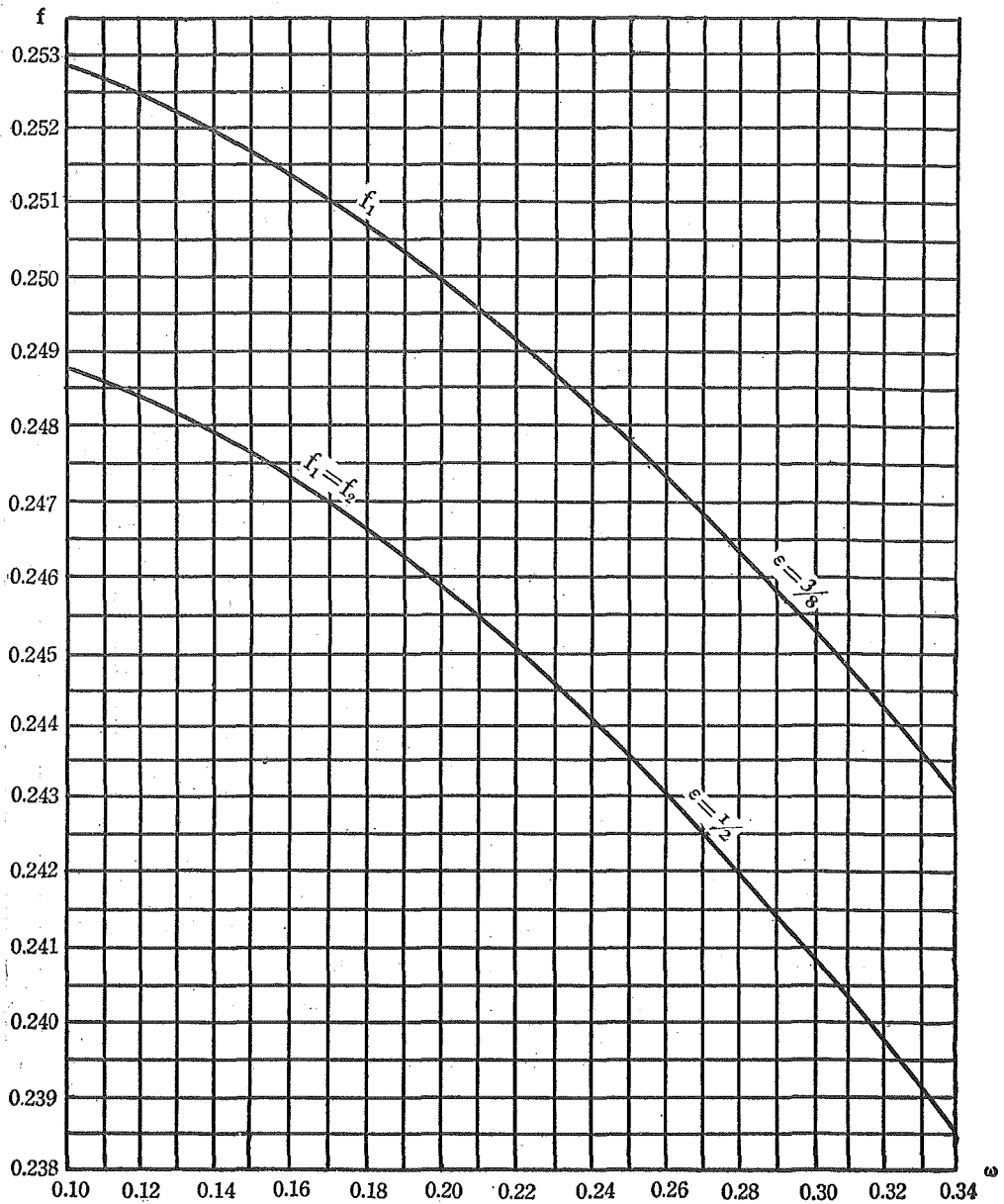


Fig. 3.

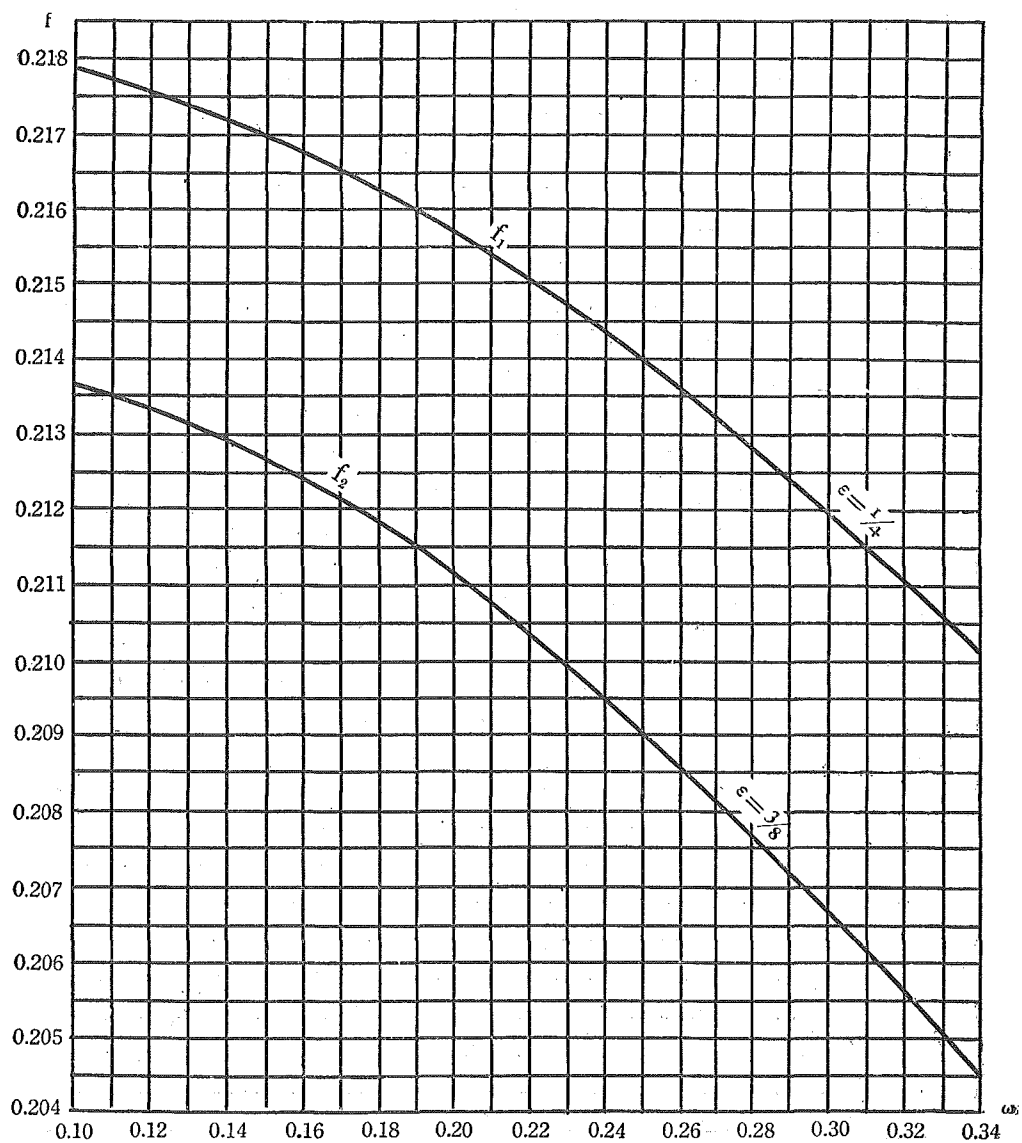


Fig. 4.

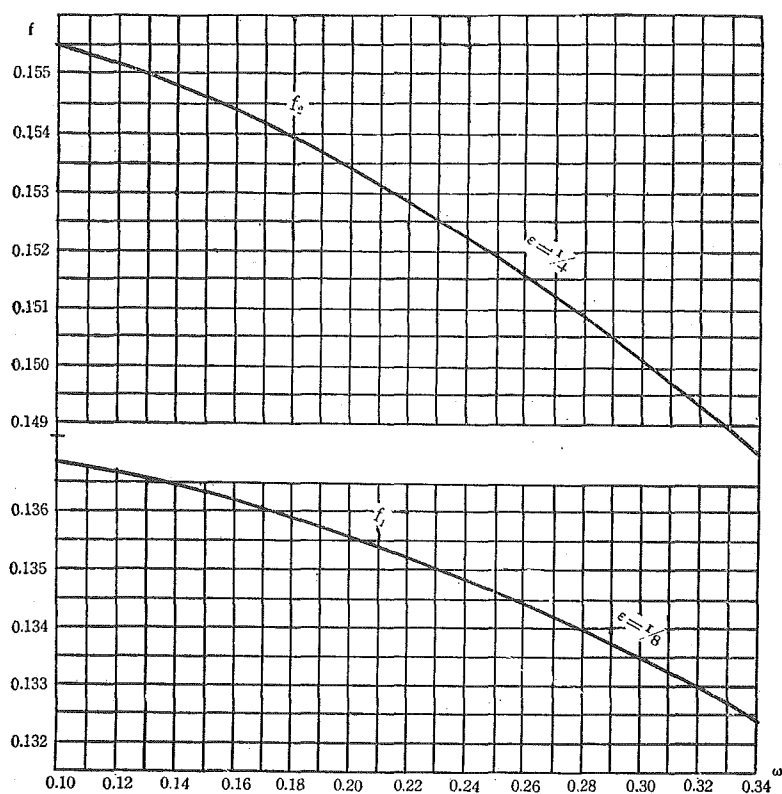


Fig. 5.

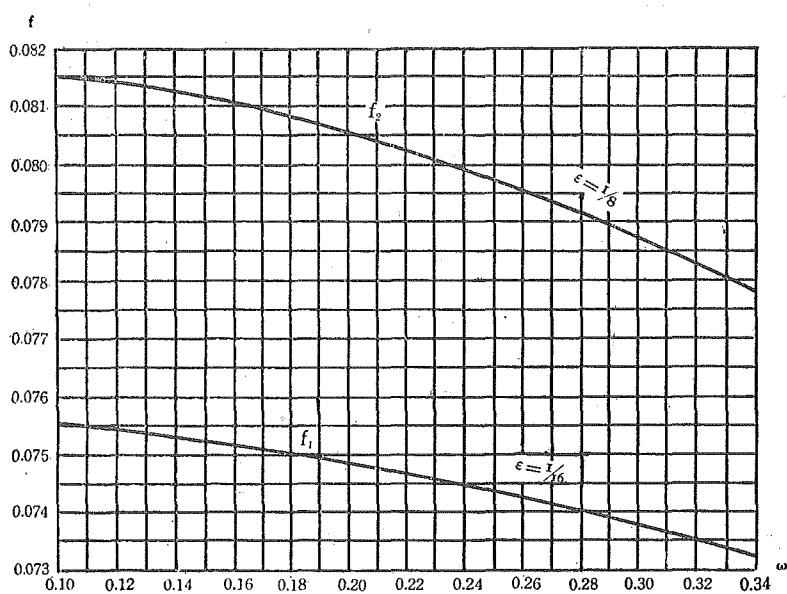


Fig. 6.

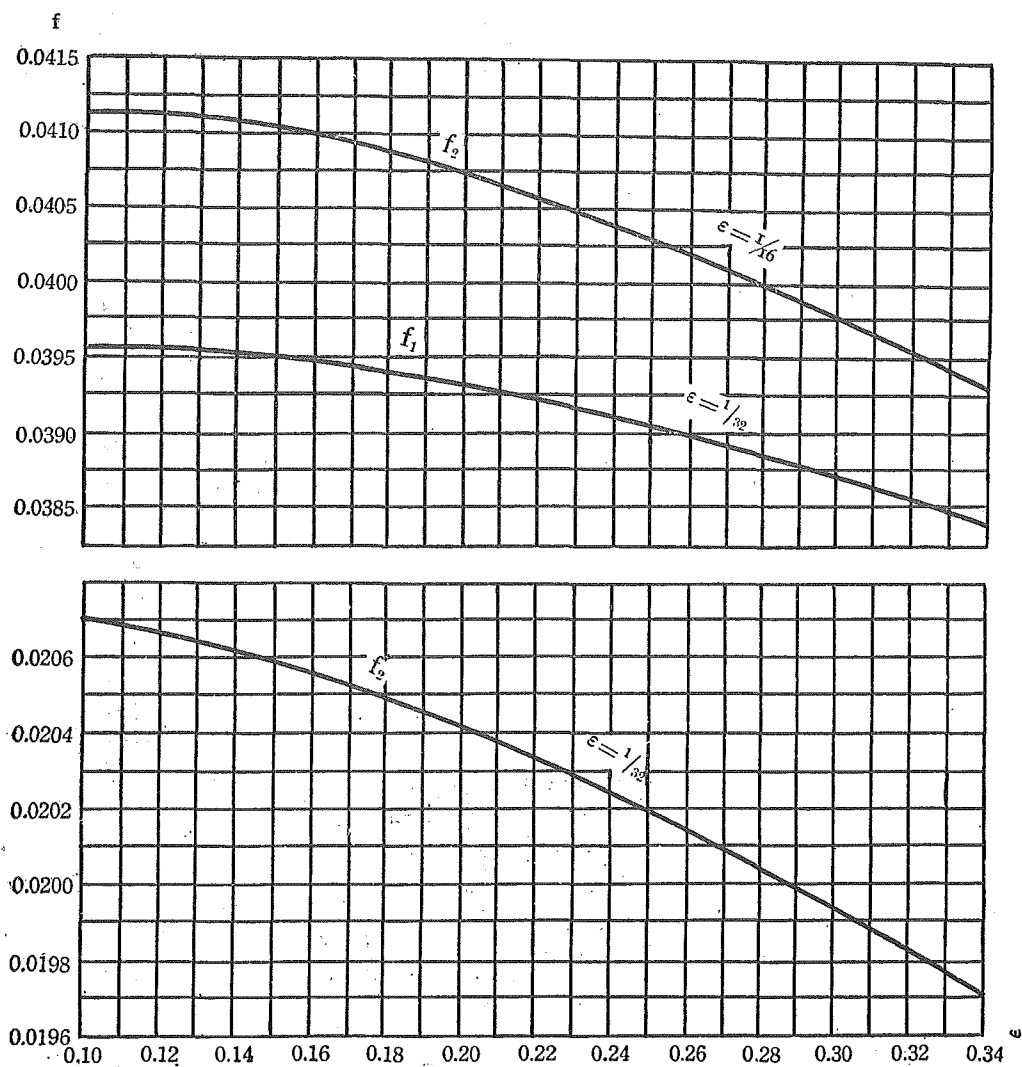


Fig. 7.

L'équation de la ligne élastique est :

$$(8) \begin{cases} \text{de } A \text{ à } C: y = \frac{I}{\xi} \left\{ \frac{R_1}{X} (\xi x - s h \xi x) + \varphi_1 s h \xi x \right\}, \\ \text{de } C \text{ à } B: y = \frac{I}{\xi} \left\{ \frac{R_2}{X} [\xi(l-x) - s h \xi(l-x)] + \varphi_2 s h \xi(l-x) \right\}, \end{cases}$$

et pour l'équation du moment fléchissant, on obtient :

$$(9) \begin{cases} \text{de } A \text{ à } C: & M_x = \frac{sh\xi x}{\xi}(R_1 - X\varphi_1), \\ \text{de } C \text{ à } B: & M_x = \frac{sh\xi(l-x)}{\xi}(R_2 - X\varphi_2). \end{cases}$$

En remplaçant dans (7) ε par 0,5 nous obtenons R et φ pour une pièce encastrée portant une charge P au milieu de sa portée; avec ces valeurs R et φ , l'équation (8) nous donne.

$$(10) \begin{cases} \text{de } A \text{ à } C: & y_{\varepsilon=0,5} = \frac{P}{2X} \left\{ x - \frac{ls}{2\omega c/h\omega} \right\}, \\ \text{de } C \text{ à } B: & y_{\varepsilon=0,5} = \frac{P}{2X} \left\{ (l-x) - \frac{ls}{2\omega c/h\omega} \right\}. \end{cases}$$

En remplaçant dans (5a) M_n par O , on a :

$$(11) \begin{cases} \sum_{n=1}^2 \frac{2R_n \varphi_n \alpha_n^5 KI}{k_n^4} \left\{ \frac{sh2k_n}{2k_n} + \frac{shk_n}{k_n} - chk_n - I \right\} \\ - \sum_{n=1}^2 \frac{R_n^2 \alpha_n^7}{k_n^6} \left\{ \frac{sh2k_n}{2k_n} + \frac{2shk_n}{k_n} - 2chk_n - I \right\} \\ - \sum_{n=1}^2 \frac{\varphi_n^3 \alpha_n^3 K^2 I^2}{k_n^2} \left(\frac{sh2k_n}{2k_n} - I \right) - \frac{4lK^2 I^3}{\Omega} = 0, \end{cases}$$

qui nous permet de déterminer la réaction horizontale X .

De l'équation (11) nous tirons :

$$(12) \begin{cases} \sum_{n=1}^2 \left\{ 2KIR_n \varphi_n \alpha_n^5 f_1(k_n) - R_n^2 \alpha_n^7 f_2(k_n) - K^2 I^2 \varphi_n^3 \alpha_n^3 f_3(k_n) \right\} = \frac{4lK^2 I^3}{\Omega}, \\ \text{où l'on a posé;} \\ f_1(k_n) = \frac{I}{k_n^4} \left\{ \frac{sh2k_n}{2k_n} - I - chk_n + \frac{shk_n}{k_n} \right\}, \\ f_2(k_n) = \frac{I}{k_n^6} \left\{ \frac{sh2k_n}{2k_n} + 2\frac{shk_n}{k_n} - 2chk_n - I \right\}, \\ f_3(k_n) = \frac{I}{k_n^2} \left\{ \frac{sh2k_n}{2k_n} - I \right\}, \end{cases}$$

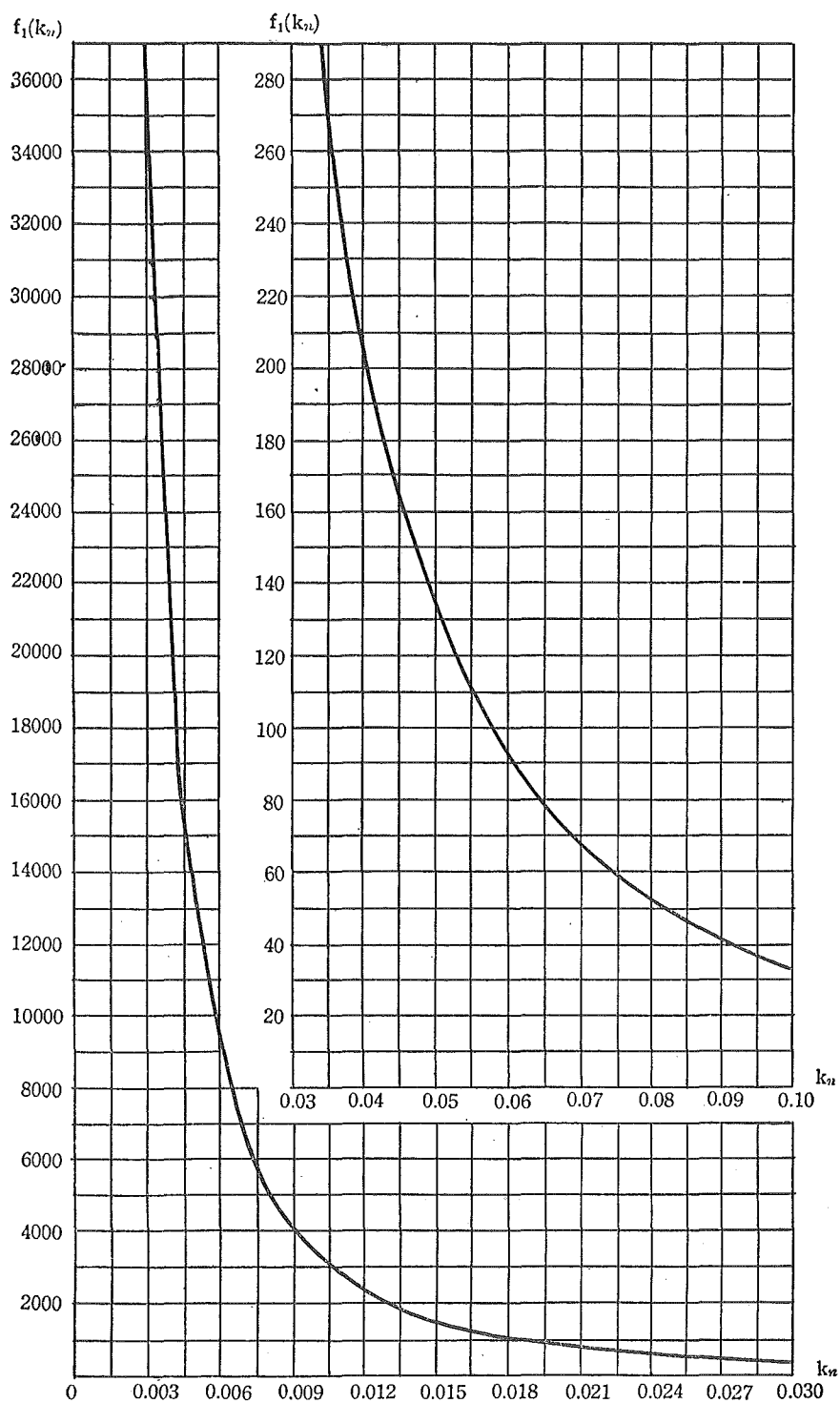


Fig. 8.

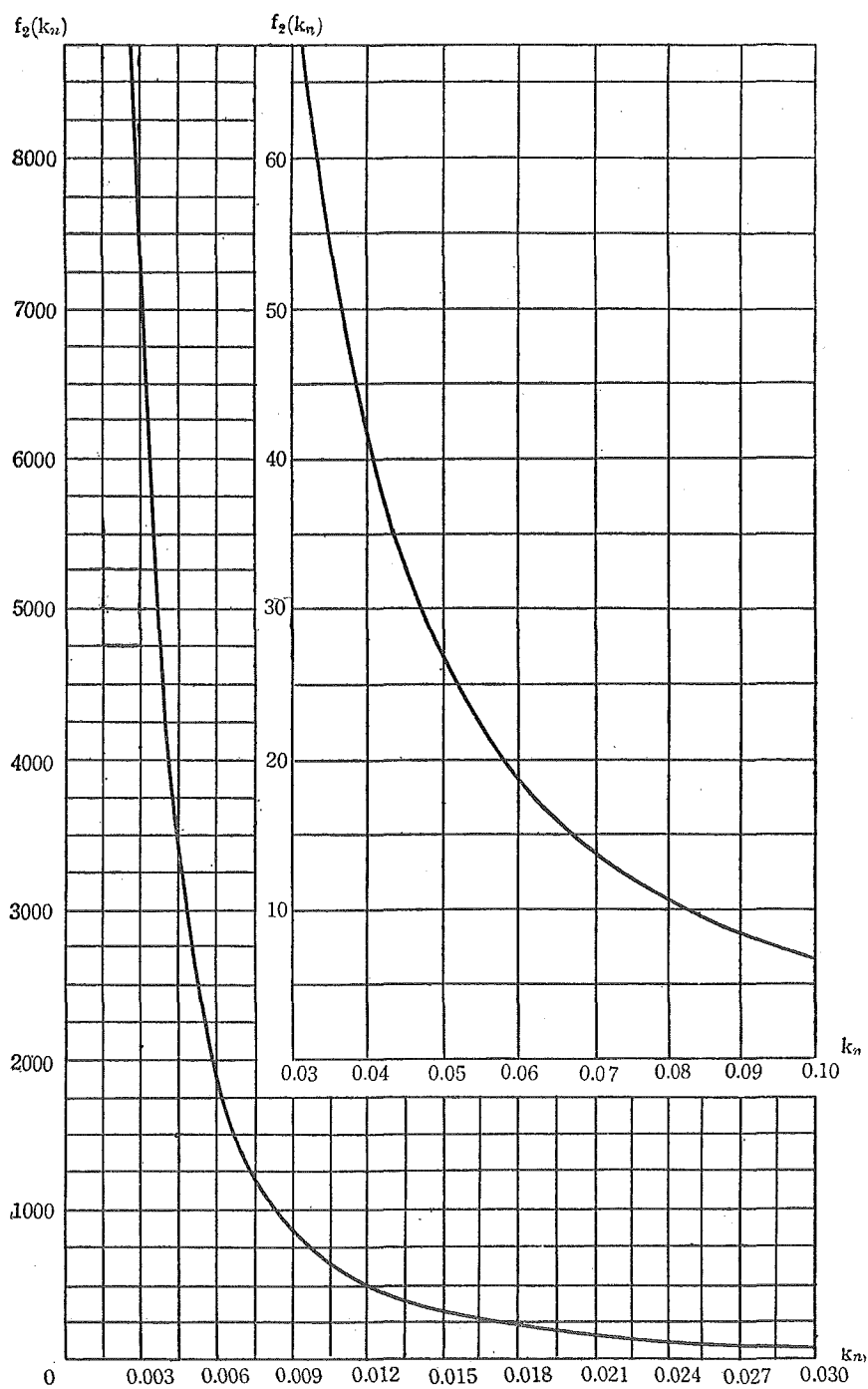


Fig. 9.

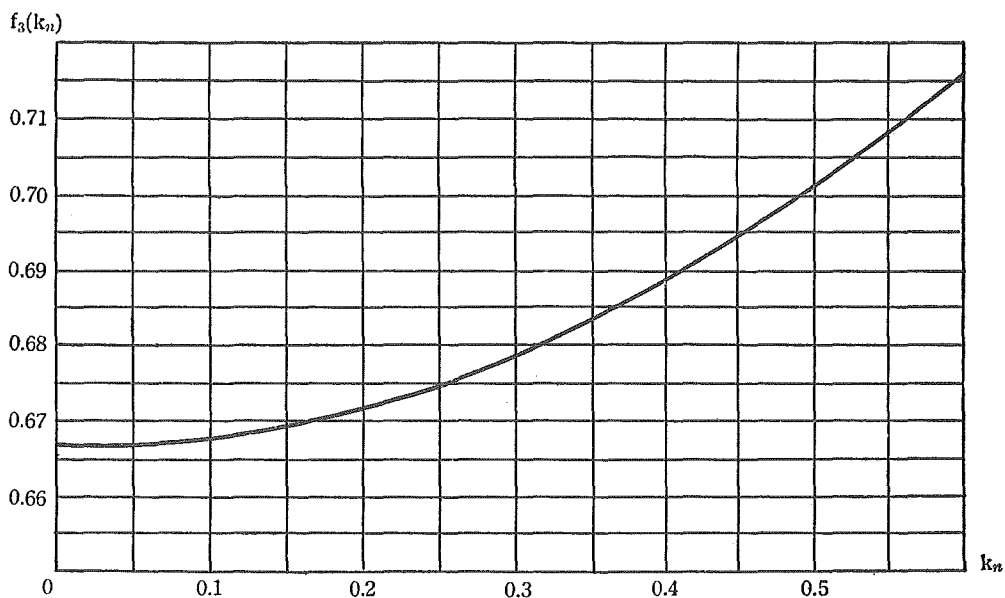


Fig. 10.

ou encore, en développant en série, l'on a :

$$(13) \begin{cases} f_1(k_n) = \frac{I}{3k_n^2} \{I + a_1\}, \\ f_2(k_n) = \frac{I}{15k_n^2} \{I + a_2\}, \\ f_3(k_n) = \frac{2}{3} \{I + a_3\}, \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,3k_n^2 + 0,03452k_n^4 + \dots \\ a_2 &= 0,15476k_n^2 + 0,00992k_n^4 + \dots \\ a_3 &= 0,2k_n^2 + 0,01905k_n^4 + \dots \end{aligned}$$

On trouvera dans les figures 8 à 10 une représentation graphique des fonctions précédentes pour k_n .

En effet, si l'on s'est donné par exemple la section de la pièce et la longueur de la portée, le second membre de la première équation de l'équation (12) est un nombre connu H . On peut alors chercher par tâtonnements quelles valeurs de k_1 et k_2 substituées dans le premier membre rendent

ce premier membre égal à H et pour obtenir X on n'aura qu'à porter la valeur trouvée pour k_1 dans la formule $X = \left(\frac{k_1}{a_1}\right)^2 KI$.

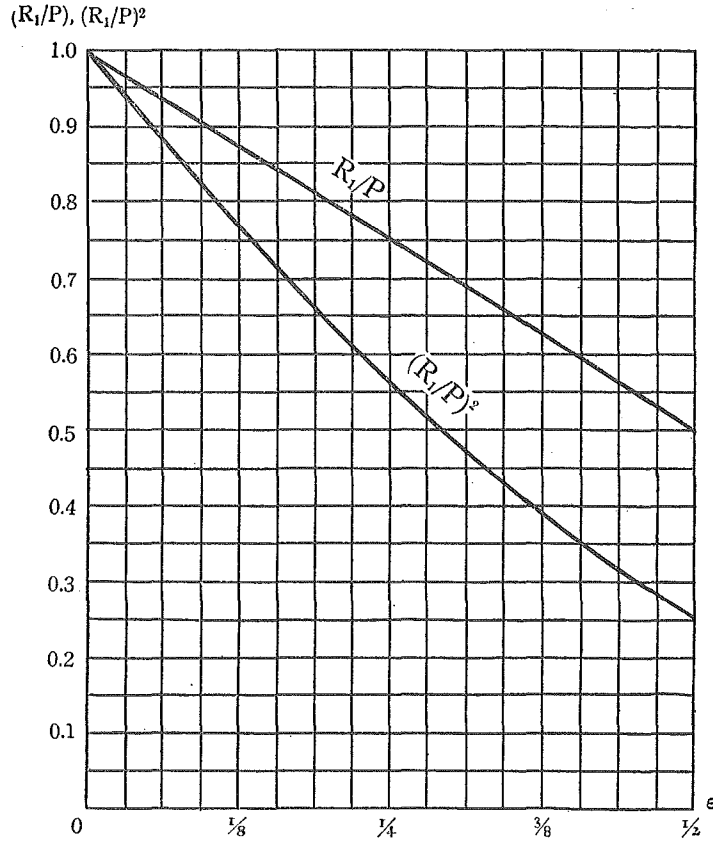


Fig. 11.

Les figures 11 et 12 peuvent servir à déterminer R_1 , R_2 , R_1^2 et R_2^2 ; les figures 3 à 7 donnent les valeurs φ_1 et φ_2 , et les figures 8 à 10 déterminent les valeurs $f_1(k_1)$, $f_2(k_1)$, $f_3(k_1)$, $f_1(k_2)$, $f_2(k_2)$ et $f_3(k_2)$ pour k_1 et k_2 donnés.

Soit une pièce de section à double T laminée avec $l=400$ cm, $I=170$ cm⁴, $\Omega=10,6$ cm², $E=2100000$ kg par cm² et $P=500$ kg, chargée au point situé à la distance a_1 de l'extrémité A .

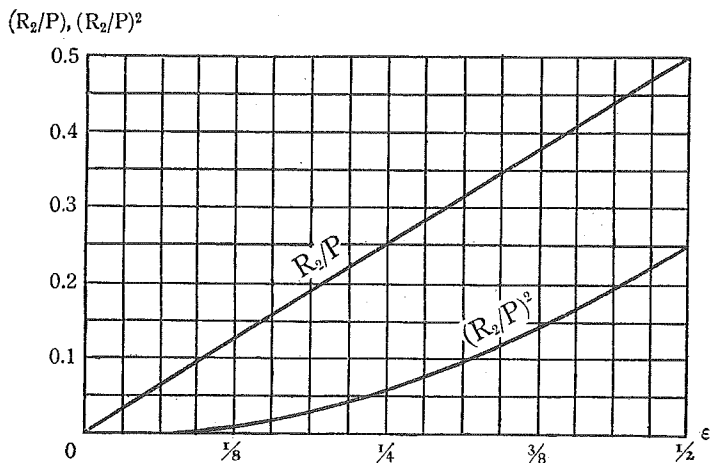


Fig. 12.

Pour $a_1 = \frac{l}{2}$, on a : $X = 1060$ kg,

Pour $a_1 = \frac{3}{8}l$, on a : $X = 930$ kg (approximativement).

La figure 13 nous donne la ligne d'influence de la force longitudinale X pour une pièce de section donnée comme ci-dessus avec une charge, locale et fixe, $P = 500, 400, 300, 200$ et 100 kg.

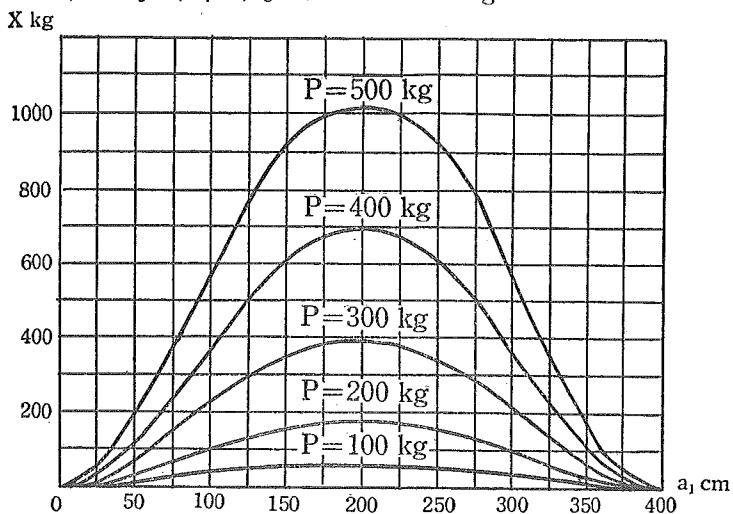


Fig. 13.

Pour l'encastrement complet, on peut souvent négliger la force longitudinale X , car elle n'a pas grand effet. Mais cela n'est plus possible

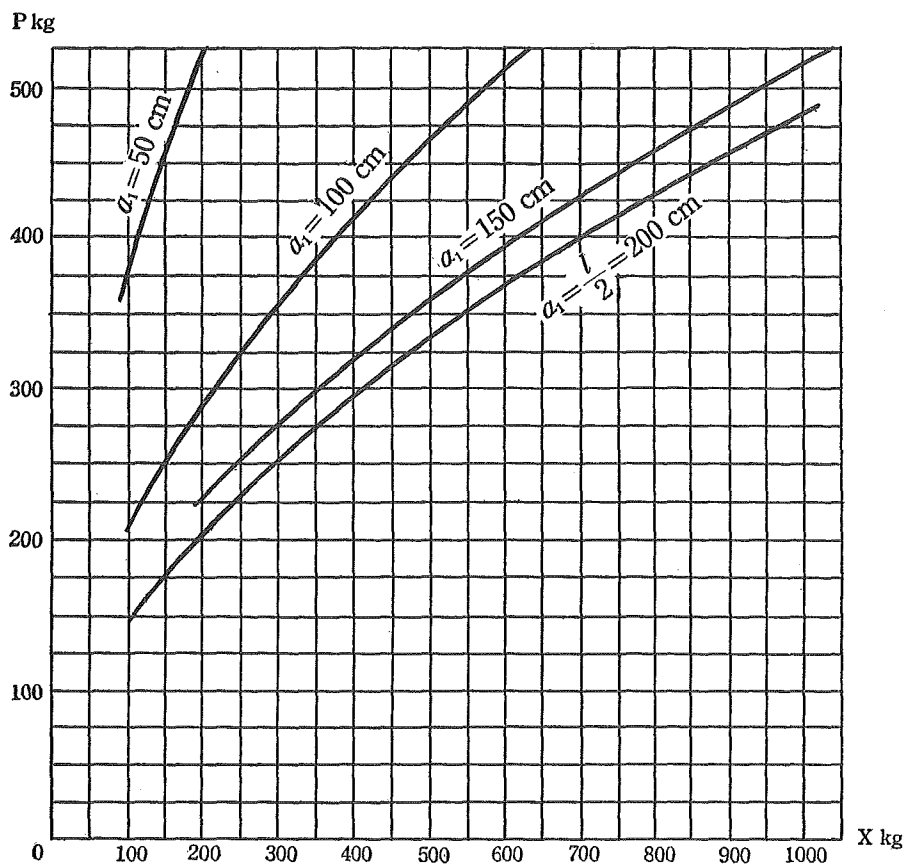


Fig. 14.

quand il s'agit de murs dociles aux déplacements angulaires, un cas dont nous avons eu l'exemple ci-dessus.

La force longitudinale X est représentée dans la figure 14 correspondant aux diverses charges P .

Si d'autre part l'on fait varier la longueur l de la portée, on aura pour X des courbes différentes correspondant aux diverses charges P . Nous traiterons ce cas plus tard dans une nouvelle publication.

Pour terminer, je me fais un plaisir d'exprimer ici toute ma reconnaissance pour l'appui, au calcul compliqué de l'exemple numérique, donné par mon assistant M. Y. Yano et M. S. Ono.