HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Étude sur la force longitudinale de la pièce encastrée, les murs étant complètement dociles aux déplacements angulaires
Author(s)	Takabeya, Fukuhei
Citation	Memoirs of the Faculty of Engineering, Hokkaido Imperial University, 1, 73-89
Issue Date	1928
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/37671
Type	departmental bulletin paper
File Information	1_73-89.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

Étude sur la force longitudinale de la pièce encastrée, les murs étant complètement dociles aux déplacements angulaires

Par

Fukuhei Takabeya.

(reçu le 19 Juin 1926)

Nous rappelons que l'expression "pièce complètement encastrée" désigne pour nous toute pièce encastrée aux deux extrémités et qui n'est susceptible d'aucun déplacement horizontal ou angulaire. Cette définition approfondie d'une pièce encastrée est donnée dans notre étude sur la pièce complètement encastrée, parue dans les mémoires de notre faculté, bulletin du mois de mars de cette année et nous en tirons de nouveau les premiers deux cas ; on y trouve le mot "encastrement" pour désigner le cas où la tension et le moment fléchissant négatif agissent aux deux extrémités de la pièce et en plus le cas où la tension agit aux deux extrémités, sans qu'il y ait aucun moment fléchissant.

Comme les cas spéciaux et bien applicables en pratique, nous traiterons ci-dessous *le cas où le déplacement horizontal n'est pas permis, bien qu'il y ait le déplacement angulaire, c'est-à-dire sans qu'il y ait aucun moment fléchissant aux deux extrémités de la pièce.*

Cas où les matériaux des murs sont plus ou moins dociles au moment fléchissant, mais rigoureusement résistants à la réaction horizontale.

Les matériaux dont sont faits les murs ne sont pas, en pratique, rigoureusement résistants à la tension ni au moment fléchissant; ils présentent

généralement une certaine souplesse qui peut avoir, même si elle paraît extrêmement faible, une grande influence sur l'état d'équilibre de la pièce.

Nous allons étudier ce problème seulement pour le cas où les matériaux des murs sont plus ou moins dociles au moment fléchissant, mais rigoureusement résistants à la réaction horizontale.

Soit une pièce AB de longueur l, de section uniforme Ω, encastrée aux deux extrémités et portant une charge P au point C situé à la distance a_1 de l'extrémité A. Soient R_1 et R_2 les réactions verticales respectives des extrémités A et B; soit X la réaction horizontale aux extrémités; soient M_1 et M_2 leurs moments fléchissants.

Pour les lignes élastiques, nous avons les équations :[1]

$$(1)\quad \begin{cases} \text{de } A \text{ à } C: & y=A_1e^{\xi x}+A_2e^{-\xi x}+\dfrac{R_1}{X}x-\dfrac{M_1}{X}, \\ \text{de } C \text{ à } B: & y=B_1e^{\xi x}+B_2e^{-\xi x}+\dfrac{R_2(l-x)}{X}-\dfrac{M_2}{X}, \\ \text{où} & \xi=\left\{\dfrac{X}{EI[1+X/(E\Omega)]}\right\}^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Les quatre constantes A_1, A_2, B_1 et B_2 sont déterminées par les quatre conditions suivantes :

pour $x=0$ $\quad y=0$;
pour $x=0$ $\quad dy/dx=\varphi_1$
pour $x=l$ $\quad y=0$;
pour $x=l$ $\quad dy/dx=-\varphi_2$.

On a donc

$$(2)\quad \begin{cases} A_1=\dfrac{1}{2X\xi}(M_1\xi-R_1+X\varphi_1) \\ A_2=\dfrac{1}{2X\xi}(M_1\xi+R_1-X\varphi_1) \\ B_1=\dfrac{ch\xi l-sh\xi l}{2X\xi}(M_2\xi+R_2-X\varphi_2) \\ B_2=\dfrac{ch\xi l+sh\xi l}{2X\xi}(M_2\xi-R_2+X\varphi_2). \end{cases}$$

1) Voir Mémoires Vol. I, No. 1, 1926, P. 4.

Remplaçant A_1, A_2, B_1 et B_2 par ces valeurs dans l'équation (1) nous avons :

$$(3)\quad \begin{cases} \text{de } A \text{ à } C\text{: } y=\dfrac{M_1}{X}(ch\xi x-1)-\dfrac{R_1}{X\xi}(sh\xi x-\xi x)+\dfrac{\varphi_1}{\xi}sh\xi x \\ \text{de } C \text{ à } B\text{: } y=\dfrac{M_2}{X}\left\{ch\xi(l-x)-1\right\}-\dfrac{R_2}{X\xi}\left\{sh\xi(l-x)-\xi(l-x)\right\} \\ \qquad\qquad +\dfrac{\varphi_2}{\xi}sh\xi(l-x) \\ \qquad \text{d'où l'on tire :} \\ \text{de } A \text{ à } C\text{: } M_x=\dfrac{R_1}{\xi}sh\xi x-M_1ch\xi x-\varphi_1\xi KIsh\xi x, \\ \text{de } C \text{ à } B\text{: } M_x=\dfrac{R_2}{\xi}sh\xi(l-x)-M_2ch\xi(l-x)-\varphi_2\xi KIsh\xi(l-x). \end{cases}$$

En supposant que les deux extrémités demeurent, même après déformation de la pièce, sur la droite AB, les deux réactions horizontales X aux extrémités doivent être égales ; nous avons par suite cinq inconnues : X, R_1, R_2, M_1 et M_2. Nous renvoyons à plus tard le calcul de X et nous allons chercher à déterminer les quatre autres inconnues.

La statique nous donne deux équations :

$$R_1+R_2-P=0,$$
$$R_1l-M_1-P(l-a_1)+M_2=0.$$

Pour $x=a_1$, c'est-à-dire au point C, les flèches des lignes élastiques AC et CB sont égales ; et au même point leur inclinaison sur AB est identique ; ces conditions donnent deux équations qui, avec les deux équations précédentes, nous donnent les quatre inconnues : R_1, R_2, M_1 et M_2 :

$$(4)\quad \begin{cases} R_1=P\delta sh\omega\left\{k_2ch\omega+sh\left(\dfrac{k_1-k_2}{2}\right)-sh\omega\right\}-X\delta(\varphi_1-\varphi_2)sh^2\omega, \\ R_2=P\delta sh\omega\left\{k_1ch\omega+sh\left(\dfrac{k_2-k_1}{2}\right)-sh\omega\right\}+X\delta(\varphi_1-\varphi_2)sh^2\omega, \\ M_1=\dfrac{P\delta a_1}{2k_1}\left\{shk_1+shk_2-sh2\omega+k_2(ch2\omega-1)-2\omega(chk_2-1)\right\} \\ \qquad\qquad +\dfrac{X\delta l}{4\omega}\left\{\varphi_1(sh2\omega-2\omega ch2\omega)+\varphi_2(sh2\omega-2\omega)\right\}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_2=\dfrac{P\delta a_2}{2k_2}\left\{shk_1+shk_2-sh2\omega+k_1(ch2\omega-1)-2\omega(chk_1-1)\right\} \\ \qquad\qquad +\dfrac{X\delta l}{4\omega}\left\{\varphi_2(sh2\omega-2\omega ch2\omega)+\varphi_1(sh2\omega-2\omega)\right\}, \\ \text{où}\quad \delta=\left\{\omega sh2\omega-ch2\omega+1\right\}^{-1},\ \omega=\dfrac{l}{2}\xi,\ k_1=a_1\xi \text{ et } k_2=(l-a_1)\xi. \end{cases}$$

Pour déterminer la réaction horizontale X, nous appliquons le théorème de Castigliano et l'on a:

$$(5)\qquad X=\frac{\Omega}{Il}\int_x \frac{y}{2}M_x dx.$$

Le second membre de la dernière équation étant implicitement transcendante, on n'en peut tirer aucune conclusion pratique.

Dans notre recherche publiée dans les Mémoires No. 1, quelques avis pour l'application de ce théorème-ci sont donnés.

De la dernière équation, on a donc pour X:

$$X=\frac{\Omega}{Il}\left\{\int_0^{a_1}\frac{y}{2}M_x dx+\int_{a_1}^{l}\frac{y}{2}M_x dx\right\}$$

d'où l'on tire:

$$(5a)\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{2}\frac{R_nM_na_n^6}{k_n^6}\left(ch2k_n-2k_nshk_n-1\right)-\sum_{n=1}^{2}\frac{M_n^2a_n^5}{k_n^4}\left(\frac{sh2k_n}{2k_n}-\frac{2shk_n}{k_n}+1\right) \\ -\displaystyle\sum_{n=1}^{2}\frac{R_n^2a_n^7}{k_n^6}\left(\frac{sh2k_n}{2k_n}+\frac{2shk_n}{k_n}-2chk_n-1\right)-\sum_{n=1}^{2}\frac{M_n\varphi_na_n^4}{k_n^4}\left(ch2k_n-2chk_n+1\right) \\ +\displaystyle\sum_{n=1}^{2}\frac{2R_n\varphi_na_n^5KI}{k_n^4}\left(\frac{sh2k_n}{2k_n}+\frac{shk_n}{k_n}-chk_n-1\right) \\ -\displaystyle\sum_{n=1}^{2}\frac{\varphi_n^2a_n^3K^2I^2}{k_n^2}\left(\frac{sh2k_n}{2k_n}-1\right)-\frac{4lK^2I^3}{\Omega}=0. \end{cases}$$

Cette équation nous permet de déterminer la réaction horizontale X.

Note.

Pour calculer la réaction X, en posant $K=E\{1+X/(E\Omega)\}$, on peut encore partir de l'équation.

$$l\left\{1+\frac{X}{K\Omega}\right\}=\int_0^l\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}dx$$

qui donne, par approximation :

$$X=\frac{K\Omega}{2l}\int_0^l\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx.$$

De l'équation (5) on tire d'autre part :

$$X=\frac{\Omega}{2Il}\int_0^l yM_x dx.$$

Avec l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{M_x}{KI},$$

les dernières deux équations nous donnent :

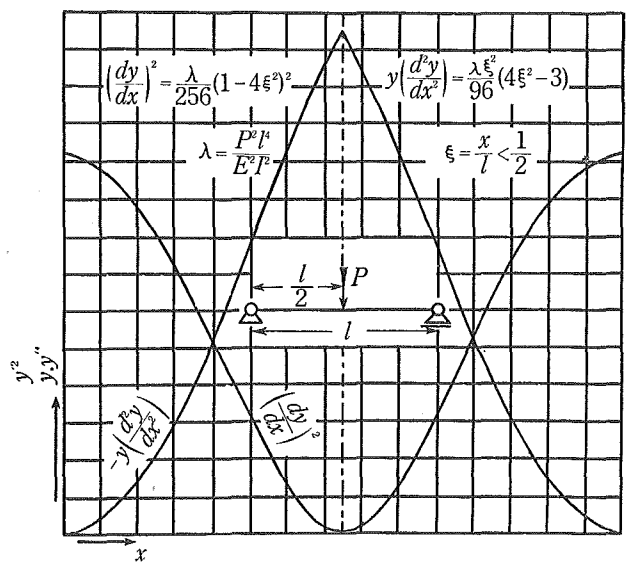

Fig. 1.

$$(6)\qquad \int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx + \int_0^l y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)dx = 0.^{1)}$$

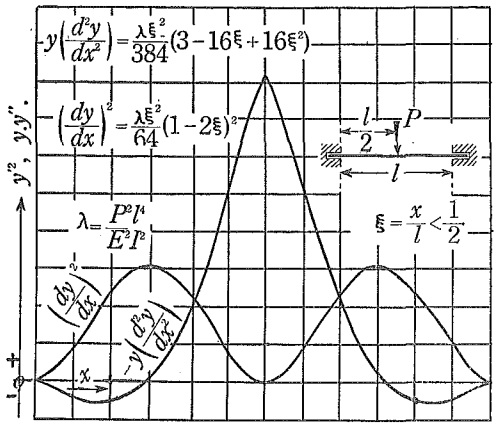

Fig. 2.

Si l'expression y est inconnue, l'équation (6) est une équation intégrale et la ligne élastique d'une pièce primitivement droite satisfait l'équation (6). Dans les figures 1 et 2, on constate que les aires de surface de $(dy/dx)^2$ et $y.d^2y/dx^2$ sont égales, bien que les formes respectives sont excessivement différentes.

Pièce encastrée aux deux extrémités, les murs étant complètement dociles aux déplacements angulaires.

C'est le problème qui se pose pour un encastrement avec rotules horizontalement immobiles.

Dans ce cas $M_1=M_2=0$ et en désignant a_1 et $(l-a_1)$ respectivement par εl et $(1-\varepsilon)l$, on a ;

$$(7)\quad \begin{cases} R_1=P(1-\varepsilon), \\ R_2=P\varepsilon, \\ \varphi_1=\dfrac{Pl^2}{4KI}f_1, \\ \varphi_2=\dfrac{Pl^2}{4KI}f_2, \\ \text{où l'on a posé :} \\ f_1=\omega^{-2}\left\{\dfrac{sh2\varepsilon\omega+ch2\varepsilon\omega-sh2(2-\varepsilon)\omega-ch2(2-\varepsilon)\omega}{sh4\omega+ch4\omega-1}+1-\varepsilon\right\}, \\ f_2=\omega^{-2}\left\{\dfrac{sh2(1-\varepsilon)\omega+ch2(1-\varepsilon)\omega-sh2(1+\varepsilon)\omega-ch2(1+\varepsilon)\omega}{sh4\omega+ch4\omega-1}+\varepsilon\right\} \\ \text{et} \\ \qquad 0<\varepsilon<+1 \end{cases}$$

1) Équation similaire a été donnée par M. A. Ono. Voir Memoirs of thecollege of Engineering Kyushu Imperial University, Japan, Vol. III, No. 2, 1924.

Les figures 3 à 7 donnent la représentation graphique des expressions f_1 et f_2 qui permettent de déterminer les lignes d'influence de φ_1 et φ_2.

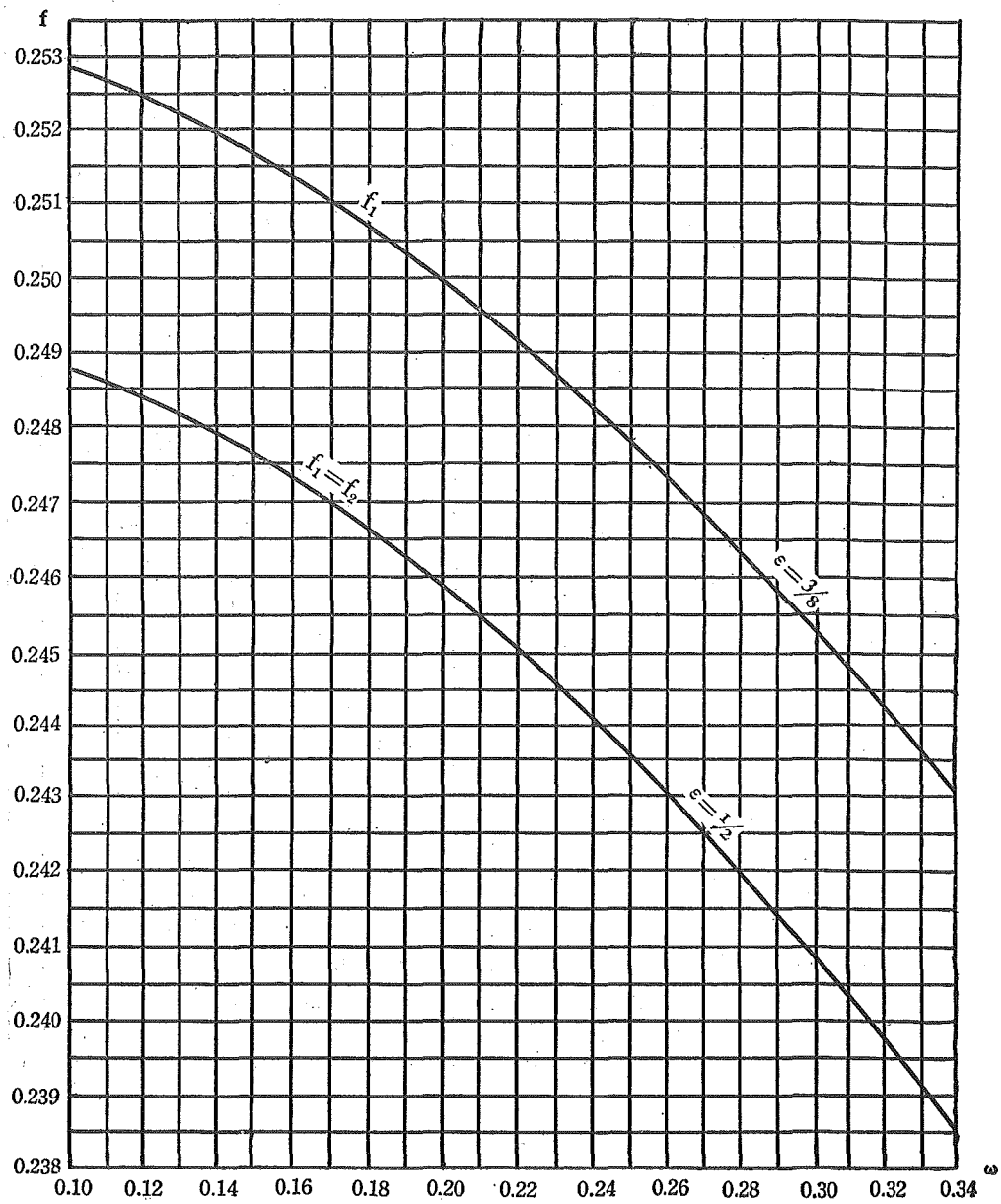

Fig. 3.

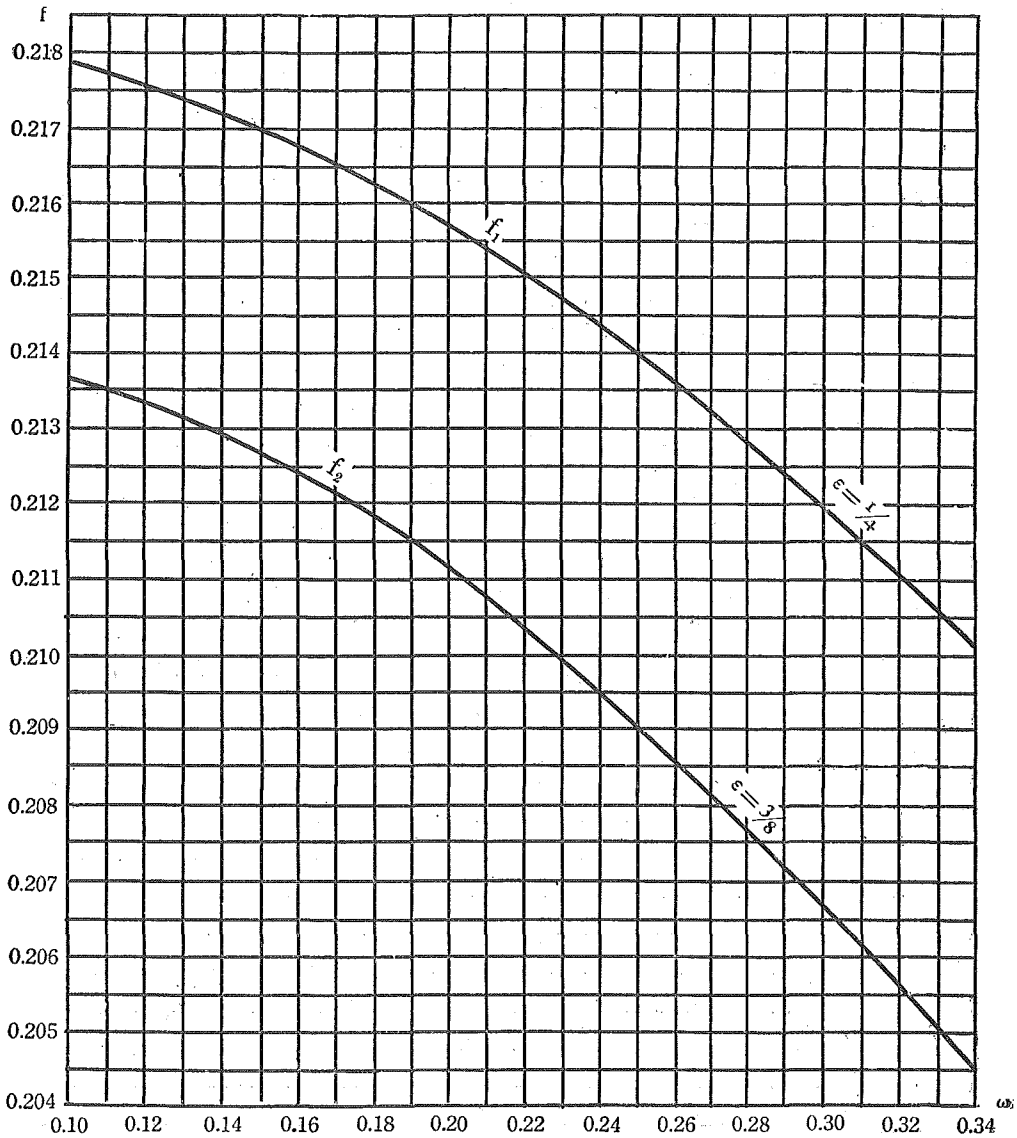
f
0.218
0.217
0.216
0.215
0.214
0.213
0.212
0.211
0.210
0.209
0.208
0.207
0.206
0.205
0.204
0.10
0.12
0.14
0.16
0.18
0.20
0.22
0.24
0.26
0.28
0.30
0.32
0.34
ω
f_1
f_2
$\varepsilon = \frac{1}{8}$
$\varepsilon = \frac{3}{8}$

Fig. 4.

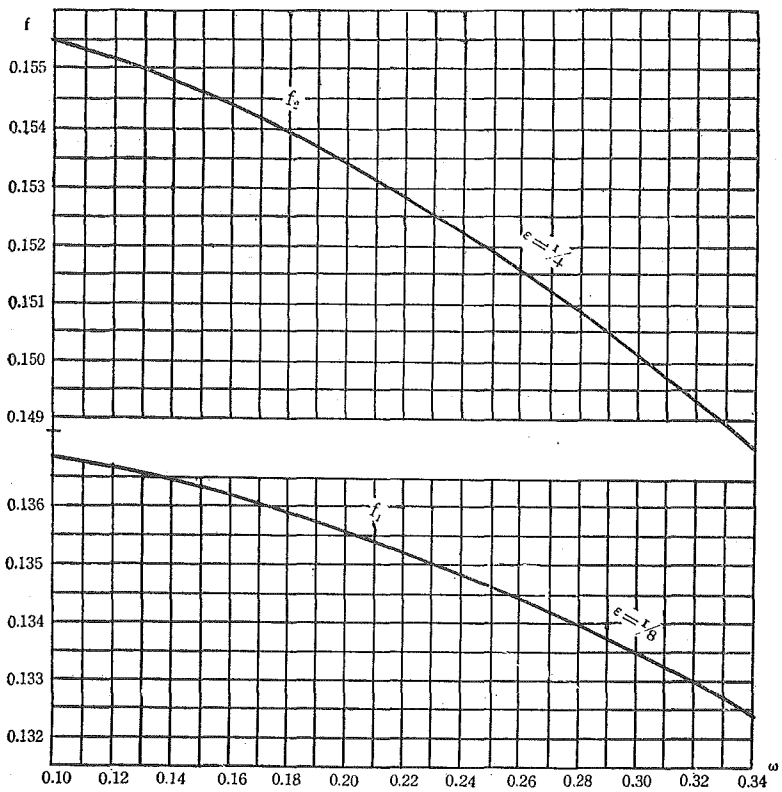
f
0.155
0.154
0.153
0.152
0.151
0.150
0.149
0.136
0.135
0.134
0.133
0.132
f_0
$\varepsilon = 1/4$
f_1
$\varepsilon = 1/8$
0.10 0.12 0.14 0.16 0.18 0.20 0.22 0.24 0.26 0.28 0.30 0.32 0.34
ω

Fig. 5.

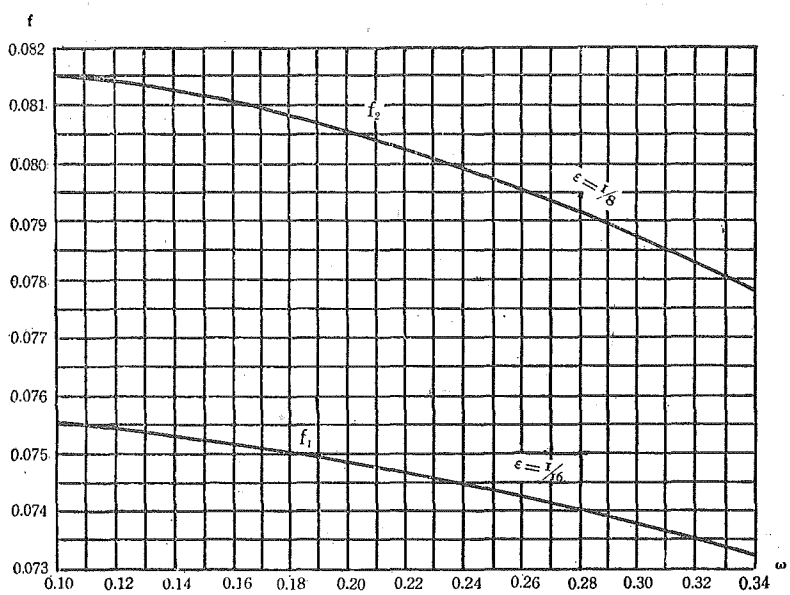
f
0.082
0.081
0.080
0.079
0.078
0.077
0.076
0.075
0.074
0.073
f_2
$\varepsilon = 1/8$
f_1
$\varepsilon = 1/16$
0.10 0.12 0.14 0.16 0.18 0.20 0.22 0.24 0.26 0.28 0.30 0.32 0.34
ω

Fig. 6.

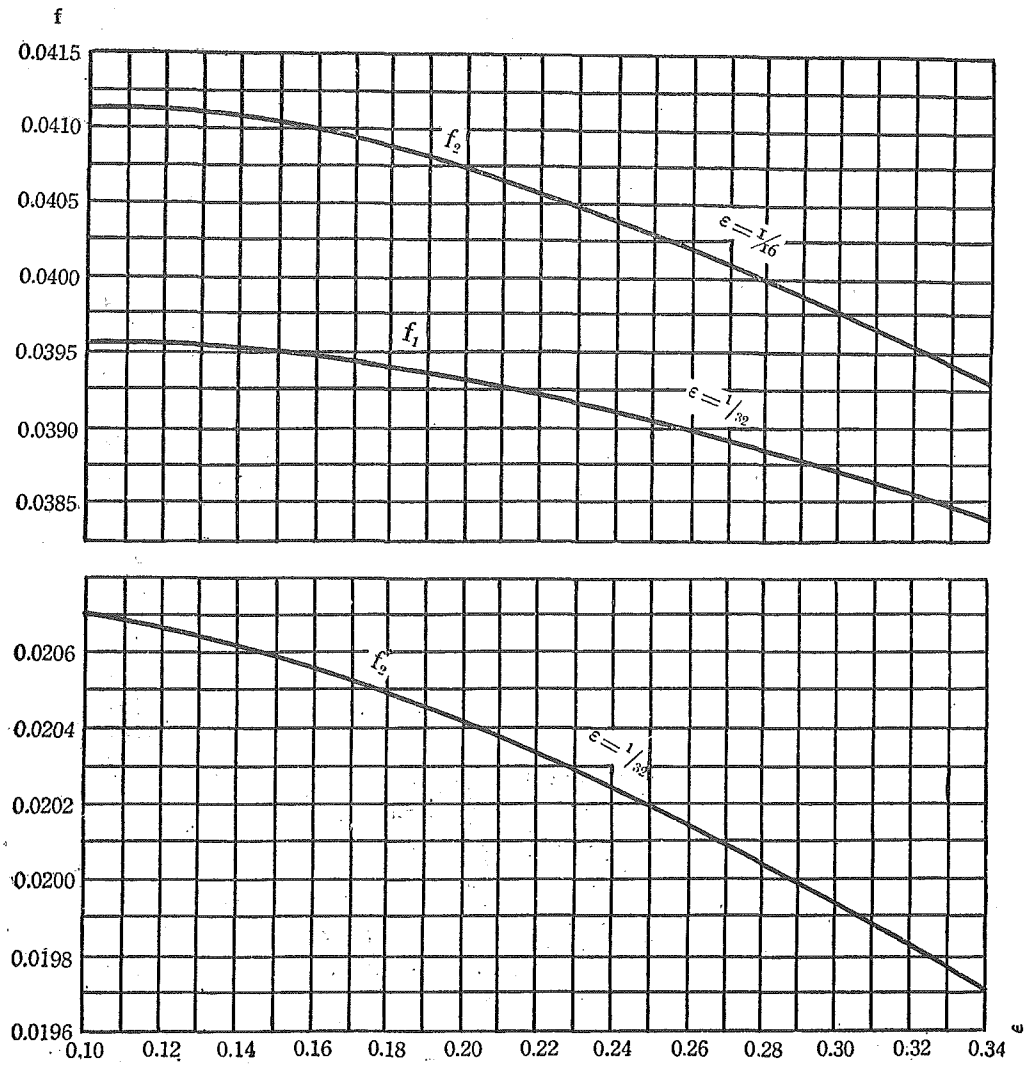

Fig. 7.

L'équation de la ligne élastique est :

$$(8)\quad \begin{cases} \text{de } A \text{ à } C: \; y=\dfrac{1}{\xi}\left\{\dfrac{R_1}{X}(\xi x - sh\xi x)+\varphi_1 sh\xi x\right\}, \\ \text{de } C \text{ à } B: \; y=\dfrac{1}{\xi}\left\{\dfrac{R_2}{X}\left[\xi(l-x)-sh\xi(l-x)\right]+\varphi_2 sh\xi(l-x)\right\}, \end{cases}$$

et pour l'équation du moment fléchissant, on obtient :

$$(9)\quad \begin{cases} \text{de } A \text{ à } C: & M_x=\dfrac{sh\xi x}{\xi}(R_1-X\varphi_1), \\ \text{de } C \text{ à } B: & M_x=\dfrac{sh\xi(l-x)}{\xi}(R_2-X\varphi_2). \end{cases}$$

En remplaçant dans (7) ε par 0,5 nous obtenons R et φ pour une pièce encastrée portant une charge P au milieu de sa portée ; avec ces valeurs R et φ, l'équation (8) nous donne.

$$(10)\quad \begin{cases} \text{de } A \text{ à } C: & y_{\varepsilon=0,5}=\dfrac{P}{2X}\left\{x-\dfrac{lsh\dfrac{2\omega x}{l}}{2\omega ch\omega}\right\}, \\ \text{de } C \text{ à } B: & y_{\varepsilon=0,5}=\dfrac{P}{2X}\left\{(l-x)-\dfrac{lsh\dfrac{2\omega(l-x)}{l}}{2\omega ch\omega}\right\}. \end{cases}$$

En remplaçant dans (5_a) M_n par O, on a :

$$(11)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{2}\frac{2R_n\varphi_n a_n^5 KI}{k_n^4}\left\{\frac{sh2k_n}{2k_n}+\frac{shk_n}{k_n}-chk_n-1\right\} \\ \displaystyle-\sum_{n=1}^{2}\frac{R_n^2 a_n^7}{k_n^6}\left\{\frac{sh2k_n}{2k_n}+\frac{2shk_n}{k_n}-2chk_n-1\right\} \\ \displaystyle-\sum_{n=1}^{2}\frac{\varphi_n^2 a_n^3 K^2 I^2}{k_n^2}\left(\frac{sh2k_n}{2k_n}-1\right)-\frac{4lK^2I^3}{\Omega}=0, \end{cases}$$

qui nous permet de déterminer la réaction horizontale X.

De l'équation (11) nous tirons :

$$(12)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{2}\left\{2KIR_n\varphi_n a_n^5 f_1(k_n)-R_n^2 a_n^7 f_2(k_n)-K^2I^2\varphi_n^2 a_n^3 f_3(k_n)\right\}=\frac{4lK^2I^3}{\Omega}, \\ \text{où l'on a posé ;} \\ f_1(k_n)=\dfrac{1}{k_n^4}\left\{\dfrac{sh2k_n}{2k_n}-1-chk_n+\dfrac{shk_n}{k_n}\right\}, \\ f_2(k_n)=\dfrac{1}{k_n^6}\left\{\dfrac{sh2k_n}{2k_n}+2\dfrac{shk_n}{k_n}-2chk_n-1\right\}, \\ f_3(k_n)=\dfrac{1}{k_n^2}\left\{\dfrac{sh2k_n}{2k_n}-1\right\}, \end{cases}$$

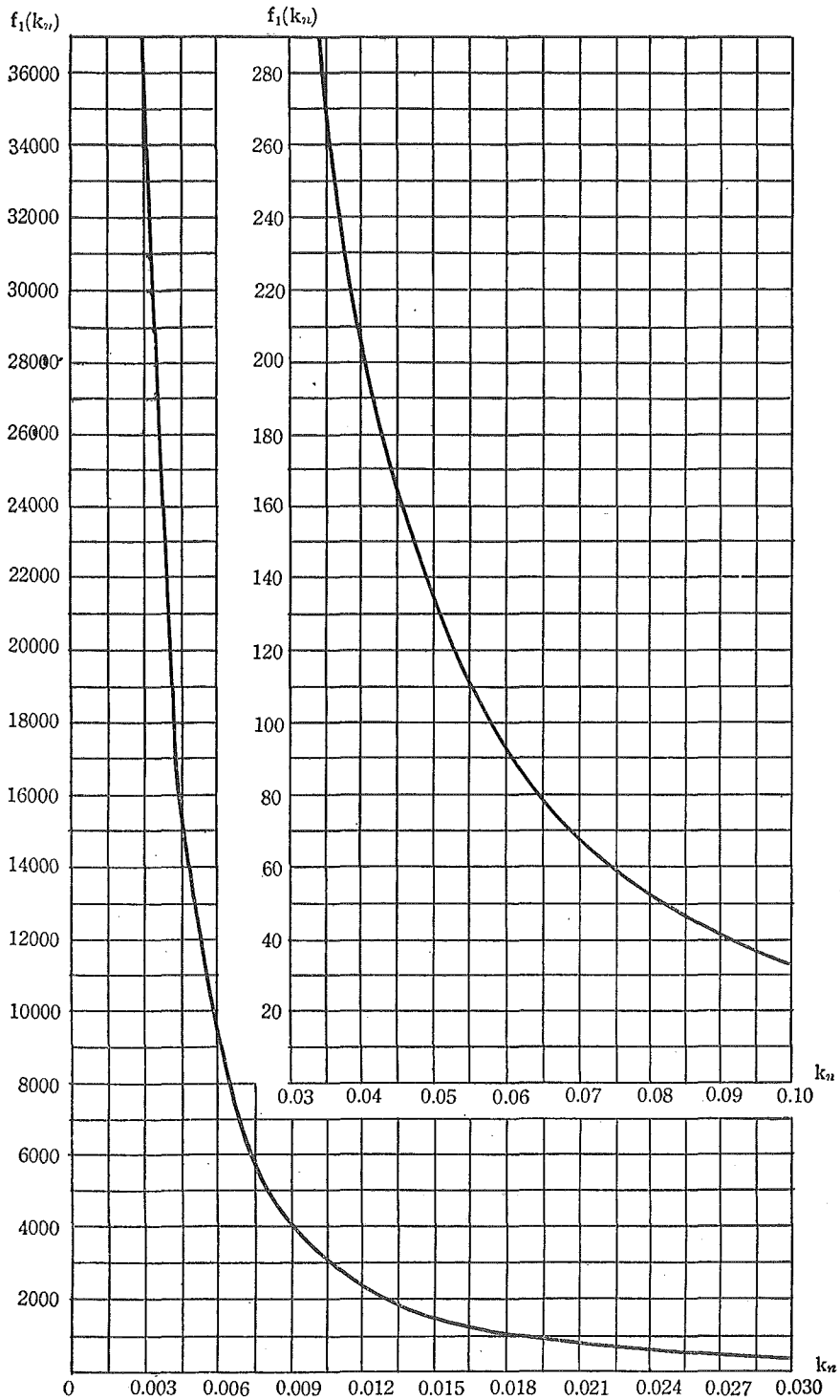
$f_1(k_n)$
36000
34000
32000
30000
28000
26000
24000
22000
20000
18000
16000
14000
12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
0.003
0.006
0.009
0.012
0.015
0.018
0.021
0.024
0.027
0.030
k_n
$f_1(k_n)$
280
260
240
220
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0.03
0.04
0.05
0.06
0.07
0.08
0.09
0.10
k_n

Fig. 8.

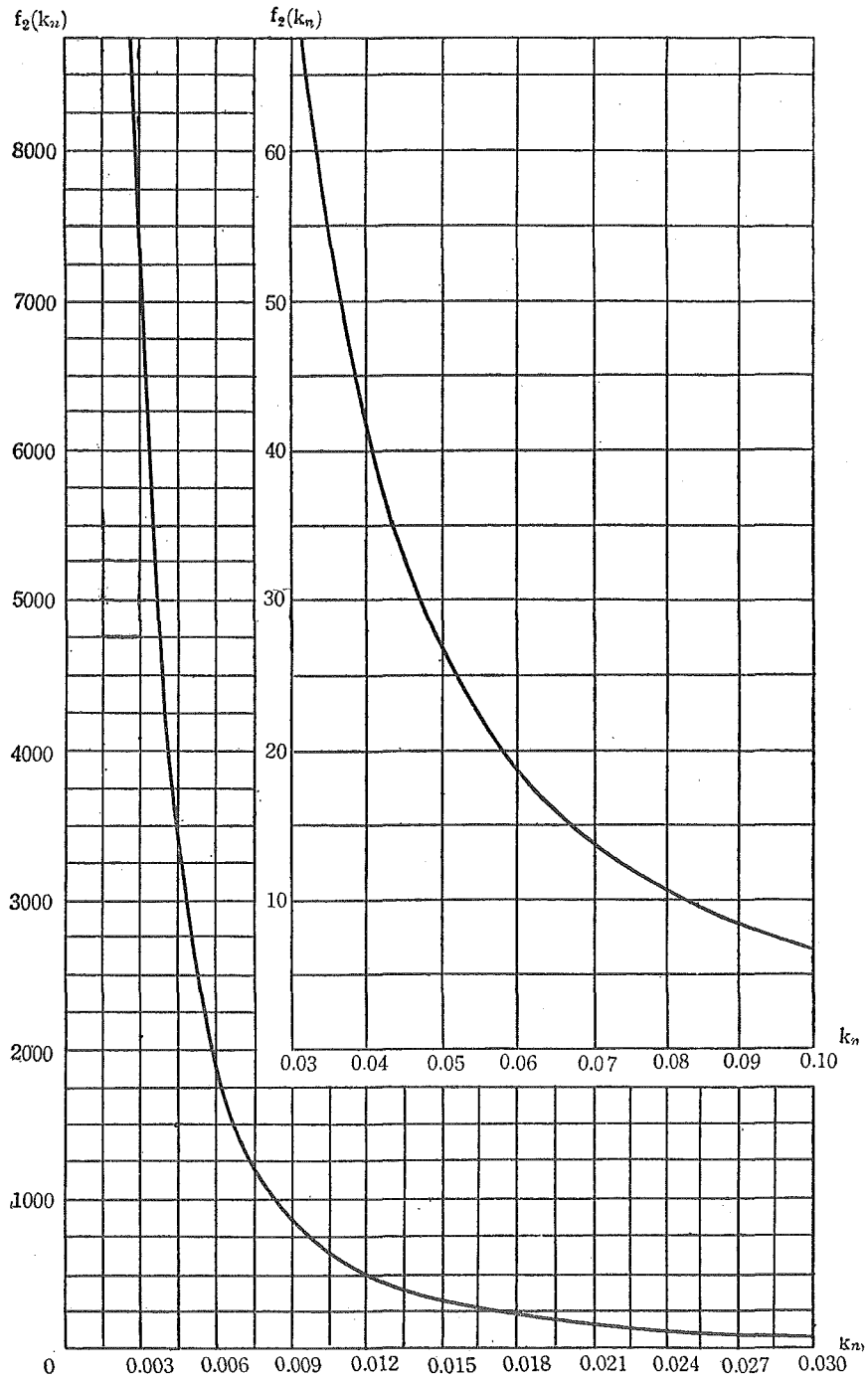
$f_2(k_n)$
$f_2(k_n)$
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
60
50
40
30
20
10
0.003
0.006
0.009
0.012
0.015
0.018
0.021
0.024
0.027
0.030
0.03
0.04
0.05
0.06
0.07
0.08
0.09
0.10
k_n
k_n

Fig. 9.

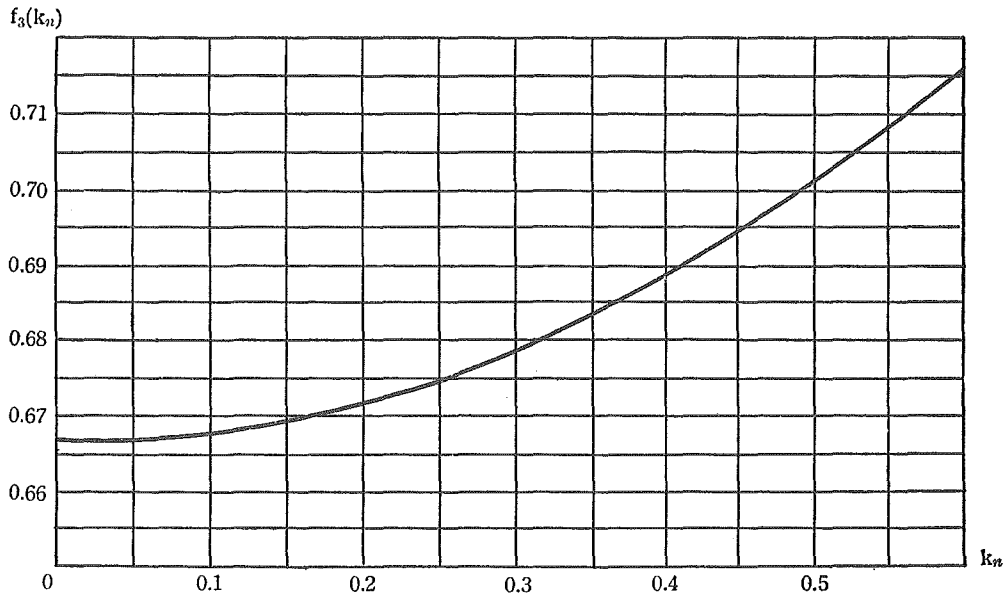

Fig. 10.

ou encore, en développant en série, l'on a :

$$(13)\quad \begin{cases} f_1(k_n)=\dfrac{1}{3k_n^2}\left\{1+\alpha_1\right\}, \\ f_2(k_n)=\dfrac{1}{15k_n^2}\left\{1+\alpha_2\right\}, \\ f_3(k_n)=\dfrac{2}{3}\left\{1+\alpha_3\right\}, \\ \text{où} \\ \alpha_1=0{,}3k_n^2+0{,}03452k_n^4+\cdots\cdots \\ \alpha_2=0{,}15476k_n^2+0{,}00992k_n^4+\cdots\cdots \\ \alpha_3=0{,}2k_n^2+0{,}01905k_n^4+\quad\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

On trouvera dans les figures 8 à 10 une représentation graphique des fonctions précédentes pour k_n.

En effet, si l'on s'est donné par exemple la section de la pièce et la longueur de la portée, le second membre de la première équation de l'équation (12) est un nombre connu H. On peut alors chercher par tâtonnements quelles valeurs de k_1 et k_2 substituées dans le premier membre rendent

ce premier membre égal à H et pour obtenir X on n'aura qu'à porter la valeur trouvée pour k_1 dans la formule $X=\left(\frac{k_1}{a_1}\right)^2 KI$.

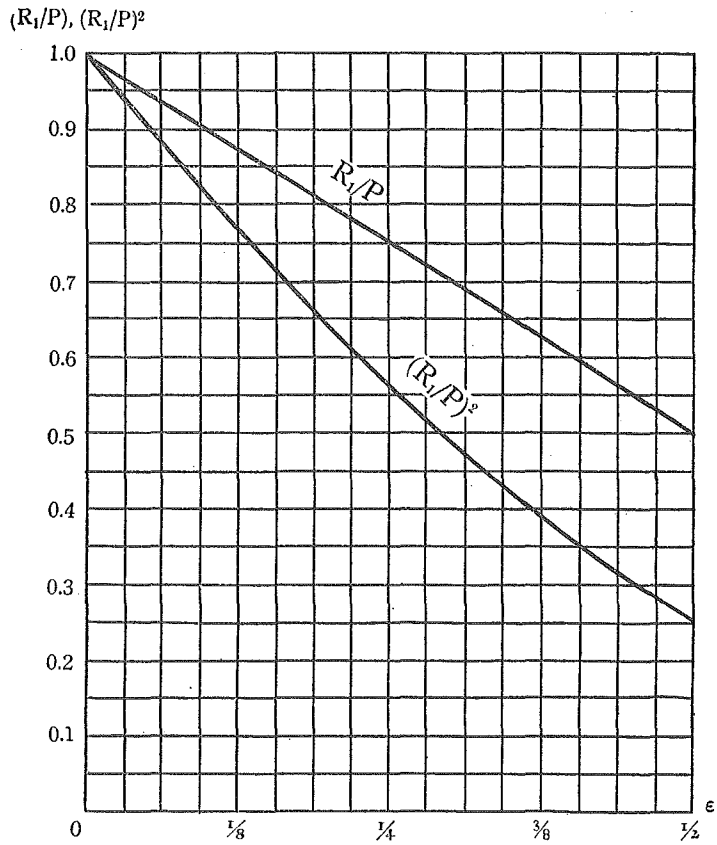

Fig. 11.

Les figures 11 et 12 peuvent servir à déterminer R_1, R_2, R_1^2 et R_2^2; les figures 3 à 7 donnent les valeurs φ_1 et φ_2, et les figures 8 à 10 déterminent les valeurs $f_1(k_1)$, $f_2(k_1)$, $f_3(k_1)$, $f_1(k_2)$, $f_2(k_2)$ et $f_3(k_2)$ pour k_1 et k_2 donnés.

Soit une pièce de section à double T laminée avec $l=400$ cm, $I=170$ cm^4, $\Omega=10,6$ cm^2, $E=2100000$ kg par cm^2 et $P=500$ kg, chargée au point situé à la distance a_1 de l'extrémité A.

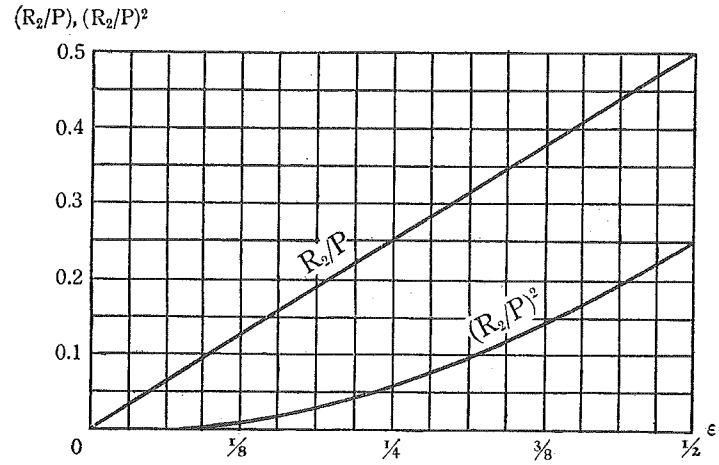

Fig. 12.

Pour $a_1=\frac{l}{2}$, on a : $X=1060$ kg,

Pour $a_1=\frac{3}{8}l$, on a : $X=930$ kg (approximativement).

La figure 13 nous donne la ligne d'influence de la force longitudinale X pour une pièce de section donnée comme ci-dessus avec une charge, locale et fixe, $P=500$, 400, 300, 200 et 100 kg.

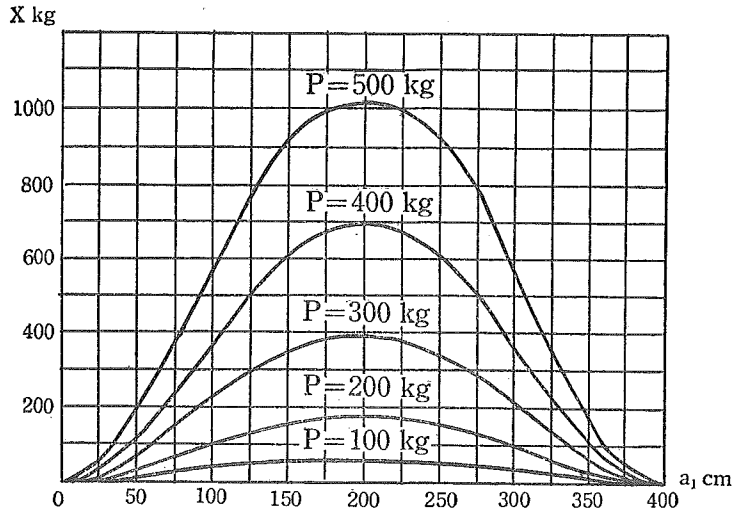

Fig. 13.

Pour l'encastrement complet, on peut souvent négliger la force longitudinale X, car elle n'a pas grand effet. Mais cela n'est plus possible

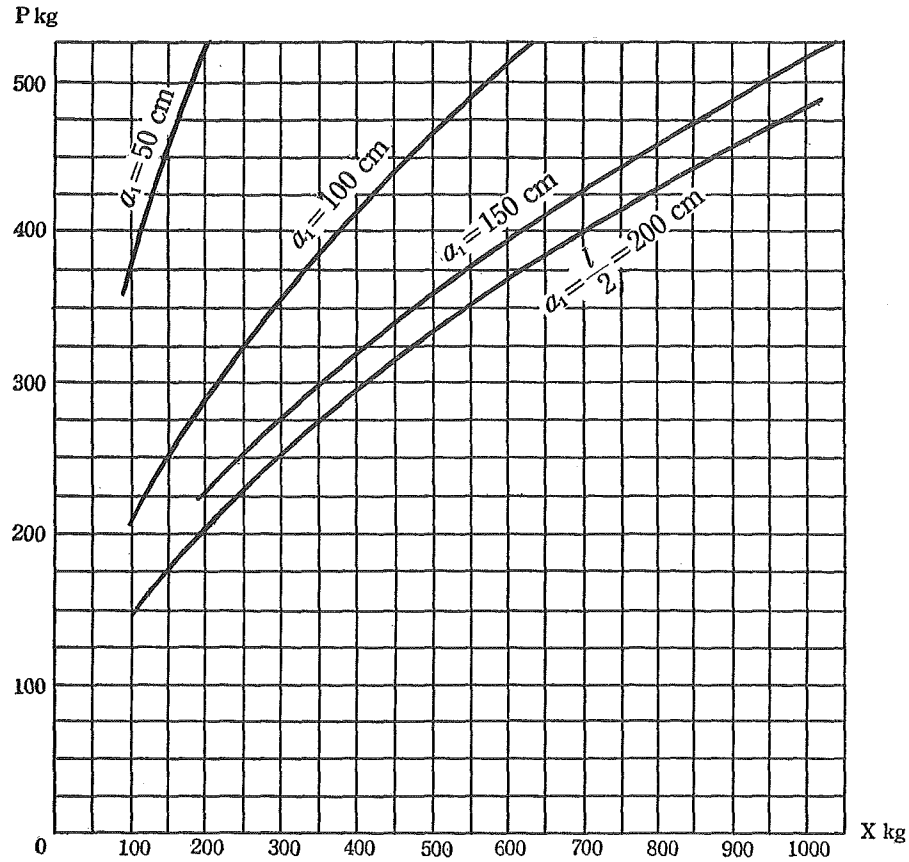

Fig. 14.

quand il s'agit de murs dociles aux déplacements angulaires, un cas dont nous avons eu l'exemple ci-dessus.

La force longitudinale X est représentée dans la figure 14 correspondant aux diverses charges P.

Si d'autre part l'on fait varier la longuer l de la portée, on aura pour X des courbes différentes correspondant aux diverses charges P. Nous traiterons ce cas plus tard dans une nouvelle publication.

Pour terminer, je me fais un plaisir d'exprimer ici toute ma reconnaissance pour l'appui, au calcul compliqué de l'exemple numérique, donné par mon assistant M. Y. Yano et M. S. Ono.