HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Études statiques des charpentes rectangulaires à construction
Author(s)	Takabeya, Fukuhei
Citation	Memoirs of the Faculty of Engineering, Hokkaido Imperial University, 1, 57-71
Issue Date	1928
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/37672
Type	departmental bulletin paper
File Information	1_57-71.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

Études statiques des charpentes rectangulaires à construction

Par

Fukuhei Takabeya, *Kogakuhakushi.*

(reçu le 19 Juin 1926)

Dans l'étude statique des poutres à béquilles, on applique en général le théorème de Castigliano ou du Travail minimum au calcul de l'effort hyperstatique ; cette étude a fait l'objet de très nombreux mémoires dont la nomenclature comprend spécialement des études de Strassner, Hartmann, Kleinlogel, etc. Cependant à cause de la complication du calcul, ce problème n'a été traité qu'approximativement pour les charpentes rectangulaires à construction.

Nous nous efforçons ici de traiter rigoureusement la question des charpentes rectangulaires à construction compliquée à résoudre par l'application du théorème de Mohr, c'est-à-dire des relations entre les moments fléchissants et les déformations angulaires aux deux extrémités de la pièce déformée.

Pour la condition symétrique aux charges verticales et la construction on peut faire facilement le calcul des charpentes rectangulaires à construction en profitant de nos règles qui font la base de telles recherches.

Ce procédé est nouveau, du moins à la connaissance de l'auteur. Bien que le problème envisagé, seulement en l'apparence de type des construc-

tions données, parût être très difficile à résoudre, les régles définies, correspondant au type des charpentes rectangulaires données, nous conduient mécaniquement à la solution du problème.

Nous nous rappelons le théorème de Mohr comme suivant :

Lorsqu'une pièce est soumise au moment fléchissant M, la différence des angles formés par deux tangentes à deux points quelconques, sur la courbe élastique, avec l'axe de x, est égale en grandeur à l'aire de surface de M/EI comprise entre la portion de ces deux points considérés de la pièce.

Lorsqu'une pièce est soumise au moment fléchissant, la distance du point quelconque B à la courbe élastique, mesurée normalement à la position initiale de la pièce considérée, à partir d'une tangente à la courbe élastique à l'autre point quelconque A est égale en grandeur au moment statique de l'aire de surface M/EI comprise entre la portion de ces deux points considérés, par rapport au point B.

Le théorème a été énoncé d'abord par Mohr ; il permet d'établir facilement les relations entre les moments fléchissant aux points quelconques à la courbe élastique et les angles d'inclinaison que la fibre moyenne prend, sur l'horizontale, aux mêmes points considérés.

Soint M_{ab} et M_{ba} les moments fléchissants respectifs des extrémités A et B ; soient φ_a et φ_b les déformations angulaires de la courbe élastique aux extrémités A et B ; soit E le coefficient d'élasticité de la matière à l'extension ou à la compression ; soit I le moment d'inertie ; soit l la portée ou hauteur de la pièce ; soit ν le déplacement vertical de l'extrémité B à partir de sa position initiale ; soit A l'aire de surface de M, due à la pièce appuyée librement sur ces extrémités, par rapport aux charges intermédiaires de la pièce ; soit λ la distance au centre de gravité de l'aire A de la verticale de la section B.

Des propositions de Mohr on tire donc les deux formules bien connues :

$$M_{ab}=\frac{2EI}{l}\left\{2\varphi_a+\varphi_b-\frac{3d}{l}\right\}-\frac{2A}{l^2}(3\lambda-l),$$

$$M_{ba}=\frac{2EI}{l}\left\{2\varphi_b+\varphi_a-\frac{2d}{l}\right\}+\frac{2A}{l^2}(2l-3\lambda),$$

ou bien encore :

$$(1)\quad \begin{cases} M_{ab}=2E\xi\{2\varphi_a+\varphi_b-3\mu\}-C_{ab}, \\ M_{ba}=2E\xi\{2\varphi_b+\varphi_a-3\mu\}+C_{ba}, \end{cases}$$

où l'on a posé :

$$(2)\quad \begin{cases} \xi=\dfrac{I}{l}, \\ \mu=\dfrac{\nu}{l}, \\ C_{ab}=\dfrac{2A}{l^2}(3\lambda-l), \\ C_{ba}=\dfrac{2A}{l^2}(2l-3\lambda). \end{cases}$$

Les dernières deux quantités constantes C_{ab} et C_{ba} sont les terms indépendants des déformations angulaires et aussi des déplacements verticaux de la pièce, seulement dépendants des charges intermédiaires. Tableau A donne les valeurs de C_{ab} et C_{ba} correspondant aux diverses charges données.

Dans cet ouvrage nous prendrons les conventions suivantes pour les signes des quantités employées dans les équations :

Lorsque la tangente à la courbe élastique de la pièce tend à produire un mouvement au sens de la marche des aiguilles d'une montre, mesuré à partir de sa position initiale, la déformation angulaire sera dite positive. Lorsque la ligne joignant les deux extrémités de la pièce prend un mouvement angulaire, le mouvement d'une extrémité de la pièce rélatif à l'autre de celle-ci, mesuré perpendiculairement à la position initiale de la piece sera dite un déplacement vertical et soit positif en cas d'un déplacement vertical au sens de la marche des aiguilles d'une montre, mesuré à partir de sa position initiale. Le moment fléchissant par une force extérieure est positif au sens positif de la déformation angulaire.

Les équations (1) sont très utiles ; elles sont les équations fondamentales et générales qui nous permettent de déterminer l'effort hyperstatique[1].

S'il n'y a pass de charges intermédiaires dans la travée ou l'hauteur

1) Les équations similaires sont traitées par MM. Wilson, Richart et Camillo Weiss. Voir University of Illinois Bulletin, 1918, No. 108.

AB, les termes de C_{ab} et C_{ba} dans les équations (1) disparaissent, on obtient:

$$(3)\quad \begin{cases} M_{ab}=2E\xi\{2\varphi_a+\varphi_b-3\mu\},^{1)} \\ M_{ba}=2E\xi\{2\varphi_b+\varphi_a-3\mu\}. \end{cases}$$

Hypothèses sur lesquelles notre travail est basé.

Dans cette recherche les analyses sont basées sur les hypothèses suivantes:

1. Les accolements des colonnes avec les poutres horizontales sont complètement rigides.
2. Tous les joints, qui sont horizontaux à la position initiale, sont supposés se trouver au même niveau après la déformation.
3. Les longueurs des membres sont supposés, même après la déformation, se conserver en longueur initiale.
4. Les déformations par cisaillement sont nulles.
5. Les charges et constructions sont supposées se trouver à la condition symétrique.

Les premières quatre sont les hypothèses qui ne sont pas réalisées en sens rigoureux dans les constructions actuelles; pour les constructions en ciment armé ou en acier, elles sont cependant permises sans erreur pratique et souvent utilisées dans les recherches analogues.

La dernière hypothèse est, en pratique, approximativement réalisée, car c'est une condition extérieurement donnée.

Pour l'effect de l'action du vent, le problème est différent et nous aurons une autre fois l'occasion de traiter de nouveau cette recherche spéciale.

---

1) M. Manderla a introduit d'abord les équations similaires. Voir Annales de l'École polytechnique Munich, 1879 et Allgemeine Bauzeitung, 1880.

Otto Mohr: Abhandlungen aus dem Gebiete der Technischen Mechanik, 1906.

C. R. Grimm: Secondary Stresses in Bridge Trusses, 1908.

F. C. Kunz: Secondary Stresses, Engineering News, 1911.

Wilson et Maney: Wind Stresses in the Steel Frames of Office Building, University of Illinois Bulletin, 1915.

Wilson, Richart et Camillo Weiss: Analysis of Statically Indeterminate Structures by The Slope Deflection Method, University of Illinois Bulletin, 1918.

Calculs des efforts hyperstatiques.

Pour faciliter, la compréhension, nous commencerons à traiter le cas simple (Fig. 1).

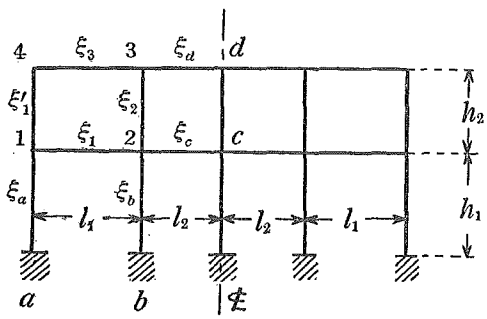


Fig. 1.

Les équations (1) et (2) nous donnent pour le joint 1 :

$$M_{1-2}=2E\xi_1(2\varphi_1+\varphi_2)-C_{1-2},$$
$$M_{1-a}=2E\xi_a(2\varphi_1),$$
$$M_{1-4}=2E\xi'_1(2\varphi_1+\varphi_4).$$

L'équation d'équilibre

$$M_{1-2}+M_{1-a}+M_{1-4}=o$$

nous donne :

$$(4)\quad \rho_1\varphi_1+\xi_1\varphi_2+\xi'_1\varphi_4=\omega_1,$$

où l'on a posé :

$$\rho_1=2(\xi_1+\xi_a+\xi'_1),$$
$$\omega_1=\frac{C_{1-2}}{2E}.$$

Pour le joint 2 :

$$M_{2-1}=2E\xi_1(2\varphi_2+\varphi_1)+C_{2-1},$$
$$M_{2-b}=2E\xi_b(2\varphi_2),$$
$$M_{2-c}=2E\xi_c(2\varphi_2)-C_{2-c},$$
$$M_{2-3}=2E\xi_2(2\varphi_2+\varphi_3).$$

L'équation d'équilibre et la condition aux charges symétriques :

$$M_{2-1}+M_{2-b}+M_{2-c}+M_{2-3}=o,$$
$$C_{1-2}=C_{2-1},$$

nous donnent :

$$(5)\quad \xi_1\varphi_1+\rho_2\varphi_2+\xi_3\varphi_3=\omega_2-\omega_1$$

où l'on a posé :

$$\rho_2=2(\xi_1+\xi_2+\xi_b+\xi_c),$$

$$\omega_1=\frac{C_{2-1}}{2E}=\frac{C_{1-2}}{2E},$$

$$\omega_2=\frac{C_{2-c}}{2E}.$$

Pour le joint 3 :

$$M_{3-4}=2E\xi_3(2\varphi_3+\varphi_4)+C_{3-4},$$

$$M_{3-2}=2E\xi_2(2\varphi_3+\varphi_2),$$

$$M_{3-d}=2E\xi_d(2\varphi_3)-C_{3-d}.$$

L'équation d'équilibre :

$$M_{3-4}+M_{3-2}+M_{3-d}=0$$

nous donne :

$$(6)\quad \xi_2\varphi_2+\rho_3\varphi_3+\xi_3\varphi_4=\omega_3-\omega_4,$$

où l'on a posé :

$$\rho_3=2(\xi_2+\xi_3+\xi_d)$$

$$\omega_3=\frac{C_{3-d}}{2E},$$

$$\omega_4=\frac{C_{3-4}}{2E}.$$

Pour le joint 4 :

$$M_{4-3}=2E\xi_3(2\varphi_4+\varphi_3)-C_{4-3},$$

$$M_{4-1}=2E\xi_1'(2\varphi_4+\varphi_1).$$

L'équation d'équilibre et la condition aux charges symétriques :

$$M_{4-3}+M_{4-1}=0,$$

$$C_{4-3}=C_{3-4}$$

nous donnent :

$$(7)\quad \xi_1'\varphi_1+\xi_3\varphi_3+\rho_4\varphi_4=\omega_4$$

où l'on a posé :

$$\rho_4=2(\xi_1'+\xi_3)$$

$$\omega_4=\frac{C_{3-4}}{2E}=\frac{C_{4-3}}{2E}.$$

Les équations (4) à (7) permettent de déterminer les valeurs φ aux quatre joints.

Pour donner une vue d'ensemble et en outre pour faciliter la formation des déterminants, les quatre équations obtenues sont réunies dans le tableau ci-dessous :

Tableau 1.

φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	second membre
ρ_1	ξ_1		ξ'_1	ω_1
ξ_1	ρ_2	ξ_2		$\omega_2-\omega_1$
	ξ_2	ρ_3	ξ_3	$\omega_3-\omega_4$
ξ'_1		ξ_3	ρ_4	ω_4

La valeur de φ_1 déduite des équations (4) à (7) est représentée par une fraction dont le dénominateur est égal au déterminant $\triangle$:

$$\triangle = \begin{vmatrix} \rho_1 & \xi_1 & o & \xi'_1 \\ \xi_1 & \rho_2 & \xi_2 & o \\ o & \xi_2 & \rho_3 & \xi_3 \\ \xi'_1 & o & \xi_3 & \rho_4 \end{vmatrix}$$

qui se forme, comme on le constate par le tableau ci-avant, sans tenir compte des seconds membres des équations.

Le dernier déterminant est l'expression du dénominateur commun aux valeurs φ_1 à φ_4.

Le numérateur de l'expression de φ_1 est égal au déterminant $\triangle_1$:

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} \omega_1 & \xi_1 & o & \xi'_1 \\ \omega_2-\omega_1 & \rho_2 & \xi_2 & o \\ \omega_3-\omega_4 & \xi_2 & \rho_3 & \xi_3 \\ \omega_4 & o & \xi_3 & \rho_4 \end{vmatrix}$$

qui se forme en remplaçant toutes les valeurs respectives dans la colonne de φ_1 par toutes les seconds membres des quatre équations.

On a donc pour φ_1 l'expression suivante :

$$\varphi_1 = \frac{\triangle_1}{\triangle}.$$

Par analogie, on obtient :

$$\varphi_2 = \frac{\triangle_2}{\triangle},$$

$$\varphi_3 = \frac{\triangle_3}{\triangle},$$

$$\varphi_4 = \frac{\triangle_4}{\triangle}.$$

Les déterminants Δ_2, Δ_3 et Δ_4 sont les déterminants que nous pouvons obtenir en remplaçant respectivement les valeurs données dans la colonne de φ, correspondant aux φ_2, φ_3 et φ_4, par les seconds membres des équations comme dans le cas de φ_1.

En portant dans les équations de M_{1-2}, M_{2-1}, etc. les valeurs φ et C, on aura l'expression des moments fléchissants à tous les joints. Tableau B donnera les valeurs de C correspondant aux diverses charges symétriques. D'après les expressions exposées on constate que l'expression ρ_1 est le double de la somme des ξ qui se réunissent au joint 1 et l'expression ρ_2 est le double de la somme des ξ qui se réunissent au joint 2. Par analogie on désignera ci-après par ρ_r le double de la somme des ξ qui se réunissent au joint r. On aura donc, dans la figure 2, pour le cas spécial où tous les ξ sont égaux :

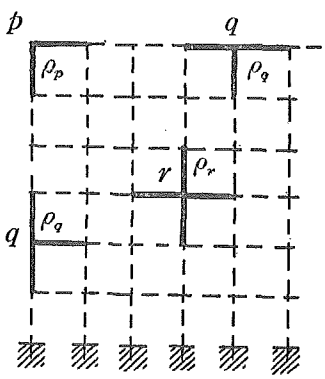


Fig. 2.

$$\rho_p = 2(2\xi) = 4\xi,$$
$$\rho_q = 2(3\xi) = 6\xi,$$
$$\rho_r = 2(4\xi) = 8\xi.$$

Pour la condition aux charges symétriques, on a :

$$C_{1-2} = C_{2-1},$$
$$C_{3-4} = C_{4-3}.$$

et plus généralement

$$C_{(r)-(r+1)} = C_{(r+1)-(r)}$$

On remplacera ci-après $C_{(r)-(r+1)}$ et $C_{(r+1)-(r)}$ par $C_{(r)}$.

On a donc :

$$\frac{C_{(r)-(r+1)}}{2E} = \frac{C_{(r+1)-(r)}}{2E} = \frac{C_{(r)}}{2E} = \omega_r.$$

La méthode de l'arrangement adoptée, comme on remarque dans l'exemple précedent, pour ranger les nombreux joints accolés dans l'ordre convenable à former notre tableau fondamental est montrée de nouveau dans la figure 3. Comme on voit, la nomenclature prise dans la figure est selon la direction marquée par la ligne grosse, brisée et horizontale ; les valeurs ξ, ξ' et ω sont montrées sus la poutre à laquelle ces valeurs appartiennent.

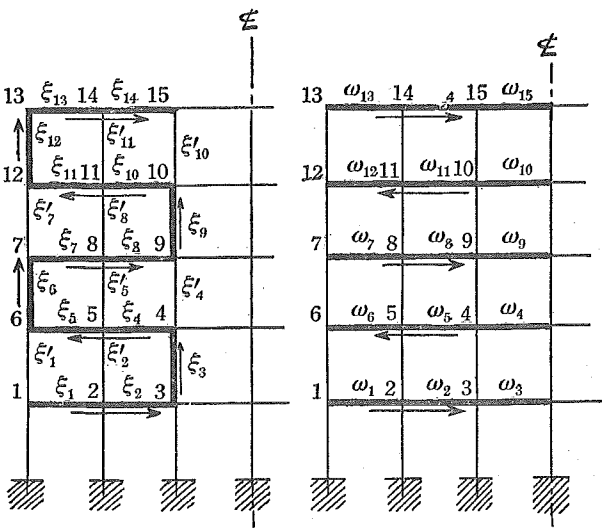


Fig. 3.

Donc si l'on compose le tableau 2, d'après notre nomenclature de la figure 3, comme nous l'avons fait pour le tableau 1, on y remarquera qu'il y a aussi une règle très convenable pour obtenir les équations qui permettent de déterminer les inconnues φ.

Nous l'expliquerons ci-dessous :

Dans le tableau 2, la diagonale principale

Tableau 2.

φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}	second membre	ω
ρ_1	ξ_1				ξ'_1										ω_1	1
ξ_1	ρ_2	ξ_2		ξ'_2											$\omega_2-\omega_1$	2 1
	ξ_2	ρ_3	ξ_3												$\omega_3-\omega_2$	3 2
		ξ_3	ρ_4	ξ_4				ξ'_4							$\omega_4-\omega_5$	4 5
	ξ'_2		ξ_4	ρ_5	ξ_5		ξ'_5								$\omega_5-\omega_6$	5 6
ξ'_1				ξ_5	ρ_6	ξ_6									ω_6	6
					ξ_6	ρ_7	ξ_7				ξ'_7				ω_7	7
				ξ'_5		ξ_7	ρ_8	ξ_8		ξ'_8					$\omega_8-\omega_7$	8 7
			ξ'_4				ξ_8	ρ_9	ξ_9						$\omega_9-\omega_8$	9 8
								ξ_9	ρ_{10}	ξ_{10}				ξ'_{10}	$\omega_{10}-\omega_{11}$	10 11
							ξ'_8		ξ_{10}	ρ_{11}	ξ_{11}		ξ'_{11}		$\omega_{11}-\omega_{12}$	11 12
						ξ'_7				ξ_{11}	ρ_{12}	ξ_{12}			ω_{12}	12
											ξ_{12}	ρ_{13}	ξ_{13}		ω_{13}	13
										ξ'_{11}		ξ_{13}	ρ_{14}	ξ_{14}	$\omega_{14}-\omega_{13}$	14 13
									ξ'_{10}				ξ_{14}	ρ_{15}	$\omega_{15}-\omega_{14}$	15 14

Ligne de ω

aura un rang de ρ dont le suffixe est mis en ordre de nombre ordinal, c'est-à-dire en ordre des joints arrangés ; les deux diagonales voisines auront les rangs de ξ dont le suffixe est mis dans le même ordre que ρ, et de plus on constate qu'il y a des places règlées pour ξ' à la colonne et rangées, correspondant au ξ dont le suffixe est le même que celui de ξ'.

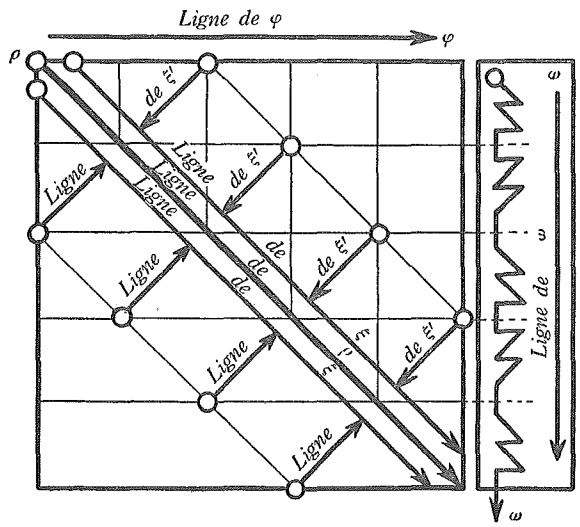


Fig. 4.

Dans la colonne du second membre, ω se range selon la ligne zigzaguée, ω dont le suffixe est mis en ordre de nombre ordinal. Alors on peut construire très facilement et mécaniquement le tableau 2, d'après la figure 3.

On a donc en général, comme précédemment, un tableau ; selon la diagonale du tableau, une figure semblable à la construction donnée à plusieurs étages et travées est obtenue.

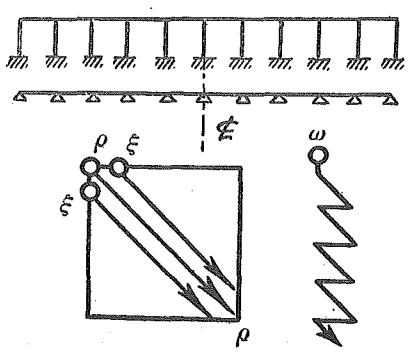


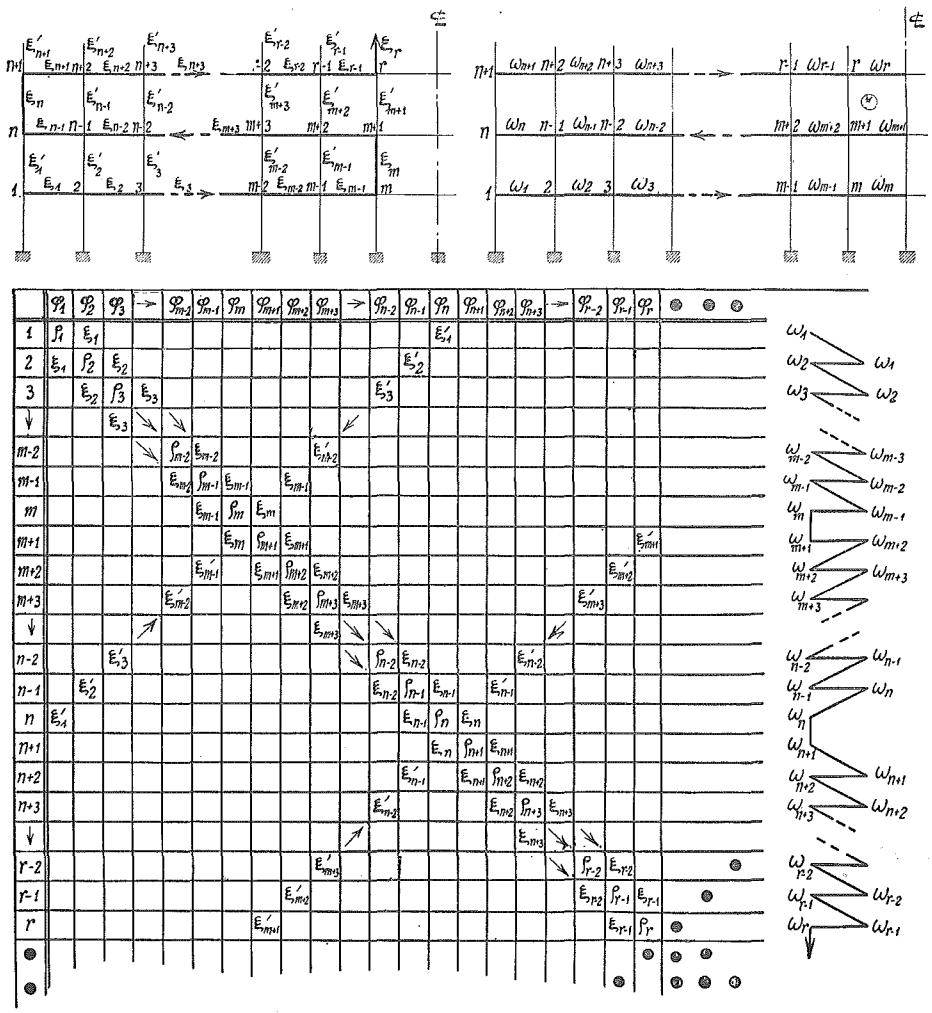
Fig. 5.

Pour faciliter la compréhension, les règles trouvées sont réunies dans la figure 4. Les règles énoncées ci-dessus sont nouvelles, du moins à la connaissance de l'auteur.

On tire donc, par exemple, du tableau

2 quinze équations qui permettent de déterminer quinze inconnues, soit par la méthode d'élimination consécutive, soit par déterminants.

Tableau 3.



Conclusion.

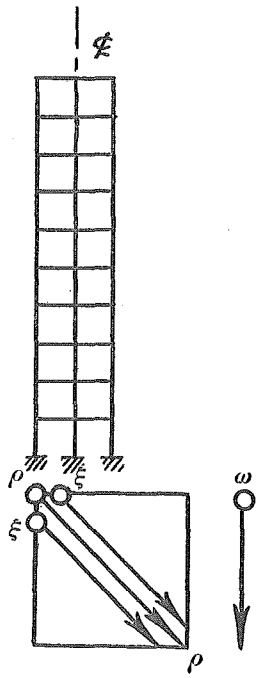


Fig. 6.

Dans le cas où les charges et construction sont symétriques, les équations qui permettent de déterminer φ, et par suite M, sont mécaniquement obtenues par le tableau fondamental (Tableau 3).

Comme on le constate, d'après notre tableau on n'a pas besoin de considérer, une à une, les équations d'équilibre à chaque joint. Pour la relation systématique de ce tableau les occasions où l'on peut faire des fautes sont, malgré le calcul assez compliqué, très rares. Or, bien que l'on ait malheureusement fait des fautes inconscientes, par nos règles exposées il est très facile de les trouver.

La figure 5 nous montre un cas spécial où toutes les colonnes disparaissent et la construction donnée, dans ce cas, se rend à la poutre continue et la forme des lignes ρ et ξ se rend à celle montrée dans la figure 5. Pour les poutres continues la ligne de ω est donc en zigzag.

Pour la figure 6, les lignes de ρ et ξ sont de même forme que celles de la figure 5 ; mais dans ce cas, la ligne de ω est tout à fait différente ; elle est une ligne droite.

La figure 7 est aussi un cas spécial où l'on trouve les lignes de ρ, ξ, ξ' et ω étant une part de ceux montrés dans le tableau 3.

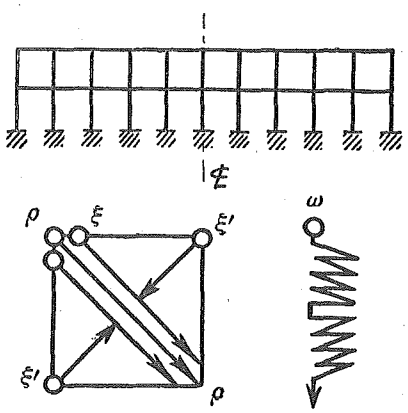


Fig. 7.

Tableau A.

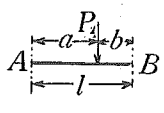
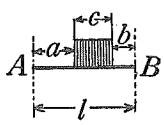
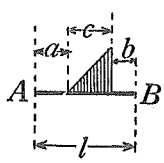
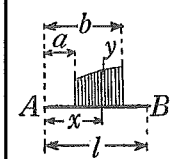
Condition des charges	C_{ab}	C_{ba}
	$\frac{Pab^2}{l^2}$	$\frac{Pa^2b}{l^2}$
	$\frac{pc}{12l^2}\left\{12ab(b+c)+6b^2c+4c^2(a+b)+c^3\right\}$	$\frac{pc}{12l^2}\left\{12ab(a+c)+6a^2c+4c^2(a+b)+c^3\right\}$
	——— Cas spéciaux ———	
	$a=o.\quad \frac{pc^2}{12l^2}\left\{6b^2+4bc+c^2\right\}$	$\frac{pc^3}{12l^2}\left\{4b+c\right\}$
	$b=o.\quad \frac{pc^3}{12l^2}\left\{4a+c\right\}$	$\frac{pc^2}{12l^2}\left\{6a^2+4ac+c^2\right\}$
	$a=b=o,\ c=l.\quad \frac{Pl^2}{12}$	$\frac{pl^2}{12}$
	$\frac{\omega c}{60l^2}\left\{20bc(a+b)+5c^2(a+2b)+30ab^2+2c^3\right\}$	$\frac{\omega c}{60l^2}\left\{10ac(a+c)+15b(2a^2+c^2)+40abc+3c^3\right\}$
	——— Cas spéciaux ———	
	$a=o\quad \frac{\omega c^2}{30l^2}\left\{10b^2+5bc+c^2\right\}$	$\frac{\omega c^3}{20l^2}\left\{5b+c\right\}$
	$b=o.\quad \frac{\omega c^3}{60l^2}\left\{5a+2c\right\}$	$\frac{\omega c^2}{60l^2}\left\{10a(a+c)+3c^2\right\}$
	$a=b=o,\ c=l.\quad \frac{\omega l^2}{30}$	$\frac{\omega l^2}{20}$
	$\frac{I}{l^2}\int_a^b yx(l-x)^2dx$	$\frac{I}{l^2}\int_a^b yx^2(l-x)dx$
	——— Cas spéciaux ———	
	$a=o,\ b=l.$ $\frac{I}{l^2}\int_o^l yx(l-x)^2dx$	$\frac{I}{l^2}\int_o^l yx^2(l-x)dx$

Tableau B. I.

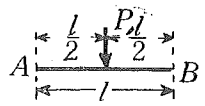
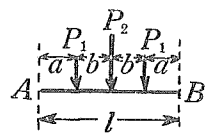
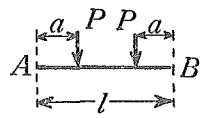
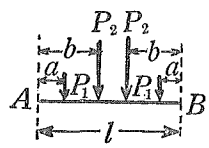
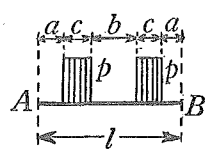
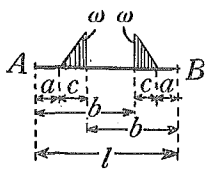
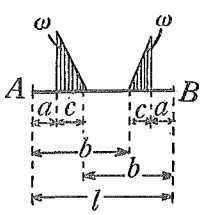
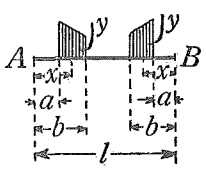
Condition des charges	$C_{ab}=C_{ba}$
	$\frac{Pl}{8}$
	$\frac{Pa(l-a)}{l}$ Cas spécial. $a=\frac{l}{3}$. $P\frac{2l}{9}$
	$\frac{(a+b)}{l^2}\left\{2P_1a(a+2b)+P_2(a+b)^2\right\}$ Cas spécial. $\begin{cases}a=b=\frac{l}{4}, & P\frac{5l}{16}\\ P_1=P_2.\end{cases}$
	$\frac{1}{l}\left\{P_1a(l-a)+P_2b(l-b)\right\}$ Cas spéciaux. 1) $\begin{cases}2.a=b & P\frac{a}{l}\left\{3l-5a\right\}\\ P_1=P_2\end{cases}$ 2) $\begin{cases}a=\frac{b}{2}=\frac{l}{5}, & P\frac{2l}{5}\\ P_1=P_2\end{cases}$
	$\frac{pc}{6l}\left\{6a(l-a)+3bc+4c^2\right\}$ Cas spéciaux. 1) $a=o.$ $\frac{pc^2}{6l}(3b+4c)$ 2) $b=o.$ $\frac{pc}{3l}\left\{3a(l-a)+2c^2\right\}$ 3) $a=b=c=\frac{l}{5}$. $P\frac{31l^2}{750}$ 4) $a=b=o,\ 2c=l.$ $P\frac{l^2}{12}$

Tableau B. II.

Condition des charges	$C_{ab}=C_{ba}$
	$\frac{\omega c}{12l}\left\{6ab+4bc+2ac+c^2\right\}$ Cas spéciaux. 1) $a=o.$ $\frac{\omega c^2}{12l}(4b+c)$ 2) $a+c=b.$ $\frac{\omega c}{12l}\left\{6a^2+12ac+5c^2\right\}$ 3) $a=o,\ b=c=\frac{l}{2}.$ $\omega\frac{5l^2}{96}$
	$\frac{\omega c}{12l}\left\{6ab+4ac+2bc+c^2\right\}$ Cas spéciaux. 1) $a=o.$ $\frac{\omega c^2}{12l}(2b+c)$ 2) $a+c=b.$ $\frac{\omega c}{4l}\left\{2a^2+4ac+c^2\right\}$ 3) $a=o,\ b=c=\frac{l}{2}.$ $\omega\frac{l^2}{32}$
	$\frac{I}{l}\int_a^b yx(l-x)dx$ Cas spécial. $a=o,\ b=\frac{l}{2}.$ $\frac{I}{l}\int_o^{\frac{l}{2}} yx(l-x)dx$