



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Étude de la force longitudinale et du moment de flexion aux extrémités de la pièce complètement encastree
Author(s)	Takabeya, F.
Citation	Memoirs of the Faculty of Engineering, Hokkaido Imperial University, 1, 1-21
Issue Date	1928
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/37673
Type	departmental bulletin paper
File Information	1_1-21.pdf



Étude de la Force Longitudinale et du Moment de Flexion aux Extrémités de la Pièce Complètement Encastrée.

Par

F. Takabeya, *Kogakuhakushi.*

(reçu le 27 Août 1925)

Introduction

Dans les livres d'étude sur la résistance des matériaux, la question de la pièce encastrée aux deux extrémités est généralement traitée sans qu'il soit tenu compte de la force longitudinale qui se manifeste dans la pièce. Toutes les fois qu'une pièce encastrée aux deux extrémités porte une charge verticale et s'infléchit, même très faiblement, il se produit une tension, en plus des réactions verticales et des moments de flexion aux extrémités de la pièce. Or, si les dernières forces sont prises en considération, la première, par contre, est en général négligée. Il est vrai que les ouvrages dont nous parlons ne prétendent traiter que le cas d'une pièce supposée rigoureusement inflexible et dans ces limites ils résolvent correctement le problème.

Lorsqu'une pièce encastrée est soumise à des charges verticales, elle prend une courbure plus ou moins marquée sans qu'il y ait d'axe neutre dont la longueur reste invariable après la déformation de la pièce. Le moment de flexion et la tension agissent alors simultanément et cette dernière force, négligée d'ordinaire dans les manuels, produit souvent assez d'effets.

Dans cet ouvrage, nous nous efforçons de traiter la question de la pièce complètement encastrée aux deux extrémités en tenant compte de la flèche,

même si elle est très faible, de la pièce ; dans cette étude intervient la force longitudinale produite par la charge extérieure.

Définition d'Une Pièce Encastrée.

Les manuels donnent d'ordinaire la définition suivante d'une pièce encastrée aux deux extrémités : c'est une pièce dont l'angle de tangence à la ligne élastique est nul aux extrémités où la pièce rencontre les murs. Pour nous, considérant que les matériaux dont on fait usage pour la construction des murs sont, dans la pratique, plus ou moins souples et par conséquent n'offrent pas une résistance absolue à la tension ni au moment de flexion de la pièce ; considérant que cette souplesse du matériel peut ainsi avoir, même si elle paraît extrêmement faible, une grande influence sur l'état d'équilibre de la pièce, nous avons cherché à donner du mot "encastrement" une définition qui se rapproche de l'état réel d'équilibre de la pièce encastrée plus que ne le fait la définition ordinaire. Nous emploierons ainsi le mot "*encastrement*" pour désigner :

- a) *le cas où la tension et le moment de flexion négatif agissent aux deux extrémités de la pièce ;*
- b) *le cas où la tension agit aux deux extrémités, sans qu'il y ait aucun moment de flexion ;*
- c) *le cas où le moment de flexion négatif agit aux deux extrémités, sans qu'il y ait aucune tension.*

Telle est la distinction que nous ferons des différents cas de la pièce encastrée. *

Nous appellerons alors "*pièce complètement encastrée*" une pièce encastrée aux deux extrémités et qui n'est susceptible d'aucun déplacement, horizontal ou angulaire.

* En général on suppose implicitement que les deux murs de soutien étaient faits de matériaux de même nature et on attribue une même valeur dy/dx aux angles d'inclinaison de la pièce, à ses extrémités. A un point de vue plus général on peut traiter d'encastrements dans lesquels les murs de soutien ne sont pas forcément construits avec des matériaux de même nature. Par suite de cela nous pouvons distinguer 21 cas différents correspondant aux conditions de l'encastrements aux deux extrémités de la pièce. (F. TAKABEYA: ÉTUDE DES PIÈCES ENCASTRÉES AUX DEUX EXTRÉMITÉS PAR CONSIDÉRATION SPÉCIALE DE LA FORCE LONGITUDINALE, PARIS, à paraître 1926)

Pièce Complètement Encastree, Portant une Charge Locale et Fixe.

I. Équations Générales.

Soit (Fig. 1) une pièce AB complètement encastree aux deux extrémités et portant une charge P au point situé à la distance a_1 de l'extrémité A. Soient R_1 et R_2 les réactions verticales respectives des extrémités A et B ; soit X la réaction horizontale aux extrémités ; soient M_1 et M_2 leurs moments de flexion.

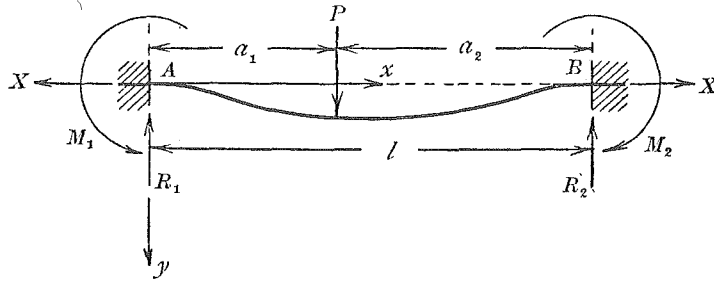


Fig. 1.

Pour les moments de flexion, nous avons les équations :

$$(1) \begin{cases} \text{de A à C : } M_x = R_1 x - M_1 - X y \\ \text{de C à B : } M_x = R_2 (l - x) - M_2 - X y \end{cases}$$

avec lesquelles l'équation

$$(2) \left\{ \frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M_x}{KI} \right. *$$

* Soit une pièce droite de section uniforme Ω dont l'axe neutre, primitivement droit, prend, lorsque la pièce est soumise au moment de flexion M_x la forme d'une courbe avec un rayon de courbure ρ ; nous avons dans ce cas : $1/\rho = M_x / (EI)$. De plus, si l'on introduit la tension X , on a la même formule, sans erreur pratique, en remplaçant E par $E + X/\Omega$; posons $K = E \{1 + X/(E\Omega)\}$. La valeur de $X/(E\Omega)$ peut être négligée devant l'unité et l'on peut donc écrire sans erreur pratique :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M_x}{EI}.$$

nous donne :

$$(3) \begin{cases} \text{de A à C : } y = A_1 e^{\xi x} + A_2 e^{-\xi x} + \frac{R_1}{X} x - \frac{M_1}{X} \\ \text{de C à B : } y = B_1 e^{\xi x} + B_2 e^{-\xi x} + \frac{R_2(l-x)}{X} - \frac{M_2}{X} \end{cases}$$

où $\xi = \sqrt{\frac{X}{KI}}$.

Les quatre constantes A_1 , A_2 , B_1 et B_2 sont déterminées par les quatre conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \text{pour } x=0 & \quad y=0; \\ \text{pour } x=0 & \quad dy/dx=0 \\ \text{pour } x=l & \quad y=0; \\ \text{pour } x=l & \quad dy/dx=0. \end{aligned}$$

On a donc

$$(4) \begin{cases} A_1 = \frac{I}{2\xi X} (M_1 \xi - R_1), \\ A_2 = \frac{I}{2\xi X} (M_1 \xi + R_1), \\ B_1 = \frac{I}{2e^{\xi l} \xi X} (M_2 \xi + R_2), \\ B_2 = \frac{I}{2e^{-\xi l} \xi X} (M_2 \xi - R_2). \end{cases}$$

Remplaçant A_1 , A_2 , B_1 , et B_2 par ces valeurs dans l'équation (3) nous avons :

$$(3) \begin{cases} \text{de A à C : } y = \frac{M_1}{X} \left\{ ch\xi x - 1 \right\} - \frac{R_1}{\xi X} \left\{ sh\xi x - \xi x \right\}, \\ \text{de C à B : } y = \frac{M_2}{X} \left\{ ch\xi(l-x) - 1 \right\} - \frac{R_2}{\xi X} \left\{ sh\xi(l-x) - \xi(l-x) \right\}. \end{cases}$$

En supposant que les deux extrémités demeurent, même après déformation de la pièce, sur la droite AB , les deux réactions horizontales X aux extrémités doivent être égales ; nous avons par suite cinq inconnues : X , R_1 , R_2 , M_1 et M_2 . Nous renvoyons à plus tard le calcul de X et nous

allons chercher à déterminer les quatre autres inconnues ; nous les affectons à priori d'un sens, le résultat de nos calculs nous indiquera si nous avons deviné juste ; la statique nous donne deux équations :

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 - P &= 0, \\ R_1 l - M_1 - P(l - a_1) + M_2 &= 0. \end{aligned}$$

Pour $x = a_1$, c'est-à-dire au point C , les flèches des lignes élastiques AC et CB sont égales ; et au même point leur inclinaison sur AB est identique ; ces conditions donnent deux équations qui, avec les deux équations précédentes, nous donnent les quatre inconnues : R_1 , R_2 , M_1 et M_2 :

$$(5) \begin{cases} R_1 = P \delta sh \omega \left\{ k_2 ch \omega + sh \left(\frac{k_1 - k_2}{2} \right) - sh \omega \right\}, \\ R_2 = P \delta sh \omega \left\{ k_1 ch \omega + sh \left(\frac{k_2 - k_1}{2} \right) - sh \omega \right\}, \\ M_1 = \frac{P \delta a_1}{2 k_1} \left\{ sh k_1 + sh k_2 - sh 2 \omega + k_2 (ch 2 \omega - 1) - 2 \omega (ch k_2 - 1) \right\}, \\ M_2 = \frac{P \delta a_2}{2 k_2} \left\{ sh k_1 + sh k_2 - sh 2 \omega + k_1 (ch 2 \omega - 1) - 2 \omega (ch k_1 - 1) \right\}, \\ \text{où } \delta = \left\{ \omega sh 2 \omega - ch 2 \omega + 1 \right\}^{-1}, \quad \omega = \frac{l}{2} \xi, \quad k_1 = a_1 \xi \text{ et } k_2 = a_2 \xi. \end{cases}$$

Si ces quatre valeurs R_1 , R_2 , M_1 et M_2 sont toutes positives, c'est que le sens choisi à priori et indiqué dans la Fig. 1 est le bon ; si l'une de ces valeurs apparaissait avec le signe moins ce serait l'indication que son sens est l'inverse de celui choisi à priori.

II. Force Longitudinale X.

Pour déterminer la force longitudinale X produite par la charge extérieure P on applique en général le théorème de Castigliano et à la formule bien connue :

$$(6) \int_s \frac{M_x M_1}{KI} ds + \int_s \frac{N_x N_1}{KI} ds = 0.$$

Dans cette formule, M_x contient P , X , R_1 , R_2 , M_1 et M_2 et $N_x = X$. Nous nous trouvons maintenant devant une grande difficulté ; quelle forme de pièce devons-nous adopter quand il s'agit d'une charge virtuelle ? Dans

les calculs de systèmes statiquement indéterminés, comme les arcs, les charpentes, qu'on a l'habitude de déterminer à l'aide des équations ci-dessus, on prend un système principal qu'on choisit généralement sans tenir compte des forces extérieures, c'est-à-dire sans tenir compte de la forme que prendra la construction après la déformation. Dans notre cas la flèche de la pièce joue un rôle important et l'on trouvera pour M_1 une valeur différente suivant que l'on prendra comme système principal une pièce primitivement droite ou une pièce légèrement courbée. Dans le deuxième cas on aura $M_1=y$, tandis que dans le premier cas on aura $M_1=0$. Pour pouvoir appliquer pratiquement l'équation (6), nous ferons la supposition suivante : nous prendrons, pour supporter une charge virtuelle, une pièce primitivement courbée dont la ligne élastique aura des ordonnées moitié moindres que la flèche réelle de la pièce en question.*

Nous avons donc : $M_1=y/2$, $N_1=-1$. Si l'on remplace ds par dx , l'équation (6) nous donne :

$$\int_x \frac{M_x y}{2KI} dx - \int_x \frac{X}{KQ} dx = 0.$$

En remplaçant dans la dernière équation M_x et y par leurs valeurs tirées des équations (1) et (3), et en intégrant et, en outre, en y remplaçant A_1 , A_2 , B_1 et B_2 par leurs valeurs, nous obtenons :

$$(7) \left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=1}^2 \frac{R_n M_n a_n^5}{k_n^5} \left(ch 2k_n - 2k_n sh k_n - 1 \right) \\ & - \sum_{n=1}^2 \frac{M_n^2 a_n^5}{k_n^4} \left(\frac{sh 2k_n}{2k_n} - \frac{2sh k_n}{k_n} + 1 \right) \end{aligned} \right.$$

* Pour la justification de notre hypothèse, nous prions le lecteur de se reporter à l'article III—Voir aussi p. 13-23, „Zur Berechnung des beiderseits eingemauerten Trägers unter besonderer Berücksichtigung der Längskraft, Berlin, 1924. par F. TAKABEYA.

M. le Prof. A. Ono a traité le problème similaire. Voir "On the Application of Variational Equations to Statical Problems of Elasticity," Memoirs of the College of Engineering, Kyushu Imperial University, Fukuoka, Japan, Vol. III, No. 2, 1924. M. le Prof. K. Hayashi a donné quelques avis pour la justification de notre hypothèse. Voir "Über die Anwendung des Satzes von der virtuellen Verschiebung in der Festigkeitslehre," Memoirs of the College of Engineering, Kyushu Imperial University, Fukuoka, Japan, Vol III, No. 3, 1924.

$$\left\{ \begin{aligned} & - \sum_{n=1}^2 \frac{K_n^2 \alpha_n^7}{k_n^6} \left(\frac{sh 2k_n}{2k_n} + \frac{2sh k_n}{k_n} - 2ch k_n - 1 \right) \\ & - \frac{4lK^2 I^3}{\Omega} = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette équation permet de déterminer la force longitudinale X .

III. Note.

Pour justifier notre théorie et prouver qu'elle est applicable pratiquement, nous voulons traiter la question plus à fond. Si l'on suppose que la force extérieure augmente graduellement, on constate que la pièce est en équilibre tout le temps que cette force augmente, causant, dans la forme de la pièce, certains changements qu'il faut calculer jusqu'au moment donné.

On donne donc aux forces extérieures (au moment de flexion M_x et à la force longitudinale N_x), certains changements infinitésimaux (dM_x et dN_x) qui communiquent à la pièce un déplacement da horizontal et réel.

Nous avons donc l'équation

$$(8) \quad \int_s \frac{M_1 dM_x}{KI} ds + \int_s \frac{N_1 dN_x}{K\Omega} ds = da^*$$

qui a été donnée pour la première fois, à ma connaissance, par M. K. Hayashi. Cette équation permettra d'étudier le système principal en question.

Soit AB une pièce "complètement encastree" et portant une charge locale et fixe (Fig. 2). Si la pièce fléchit, il se produit, à ses deux extrémités, une tension et un moment de flexion négatif. Ces deux dernières quantités sont fonctions de P .

L'équation (8) nous donne l'équation :

* Si l'on remplace E , M_x , N_x , et α respectivement par K , dM_x , dN_x , et da dans la formule bien connue :

$$\int_s \frac{M_1 M_x}{EI} ds + \int_s \frac{N_1 N_x}{E\Omega} ds = \alpha$$

on trouve l'équation (8)

$$(9) \quad \int_P \int_x \frac{M_x dM_x}{KI} dx + \int_P \int_x \frac{N_x dN_x}{K\Omega} dx = 0$$

qui est alors très difficile à résoudre, car la quantité X est fonction de la charge P appliquée extérieurement; soit $X=f(P)$. Il s'agit de déterminer $f(P)$ par l'équation (9). On a pour dM_x et dN_x les expressions qui contiennent $f(P)$ et $\frac{\partial f(P)}{\partial P}$, parce que M_x et N_x sont fonctions de $f(P)$. L'équation (9) nous donne donc une équation fonctionnelle qui contient $f(P)$ et $\frac{\partial f(P)}{\partial P}$ sous une forme très compliquée. Comme il est très difficile de résoudre cette équation, nous adopterons un procédé plus commode qui nous donnera une solution approchée :

La pièce étant d'abord droite, nous laisserons agir la tension X ; de cette tension s'ensuivra un déplacement horizontal α ; après que la pièce a repris son état d'immobilité, nous appliquons la charge locale et fixe pour rendre α nul (Fig. 2).

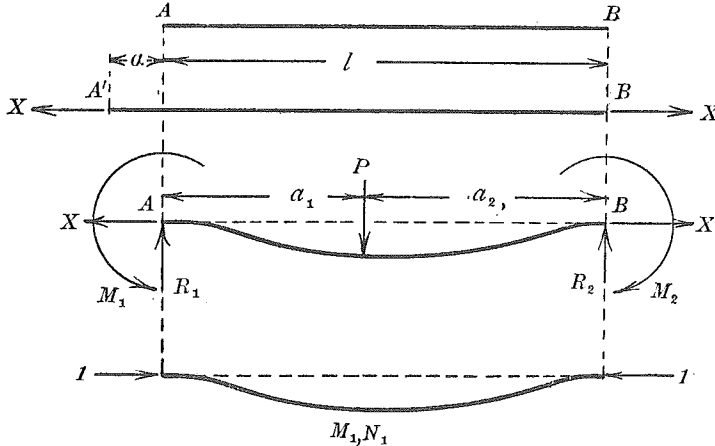


Fig. 2.

L'équation de la ligne élastique peut être exprimée comme ci-dessous :

$$\text{de A à C: } y = \frac{P}{X} \left\{ f_2 \left(cl\xi x - 1 \right) - f_1 \frac{(sl\xi x - \xi x)}{\xi} \right\},$$

$$\text{de C à B: } y = \frac{P}{X} \left\{ f_4 \left[ch\xi(l-x) - I \right] - f_3 \frac{[sh\xi(l-x) - \xi(l-x)]}{\xi} \right\},$$

où

$$f_1 = \delta sh\omega \left\{ k_2 ch\omega + sh \frac{(k_1 - k_2)}{2} - sh\omega \right\},$$

$$f_2 = \frac{\delta a_1}{2k_1} \left\{ shk_1 + shk_2 - sh2\omega + k_2(ch2\omega - I) - 2\omega(chk_2 - I) \right\},$$

$$f_3 = \delta sh\omega \left\{ k_1 ch\omega + sh \frac{(k_2 - k_1)}{2} - sh\omega \right\},$$

$$f_4 = \frac{\delta a_2}{2k_2} \left\{ shk_1 + shk_2 - sh2\omega + k_1(ch2\omega - I) - 2\omega(chk_1 - I) \right\}.$$

De ces équations et de la figure 2 on tire :

$$\begin{aligned} \text{de A à C: } dM_x &= \left\{ \frac{f_1}{\xi} sh\xi x - f_2 ch\xi x \right\} dP, & M_1 &= y, \\ dN_x &= 0, & N_1 &= -I, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{de C à B: } dM_x &= \left\{ \frac{f_3}{\xi} sh\xi(l-x) - f_4 ch\xi(l-x) \right\} dP, & M_1 &= y, \\ dN_x &= 0, & N_1 &= -I. \end{aligned}$$

Remplaçant ds par dx dans l'équation (8) et intégrant cette équation, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha du &= \frac{I}{KI} \int_0^P \int_0^{\alpha_1} \frac{P}{X} \left\{ f_2(ch\xi x - I) - f_1 \frac{(sh\xi x - \xi x)}{\xi} \right\} \left\{ \frac{f_1}{\xi} sh\xi x - f_2 ch\xi x \right\} dP dx \\ &+ \frac{I}{KI} \int_0^P \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{P}{X} \left\{ f_4[ch\xi(l-x) - I] - f_3 \frac{[sh\xi(l-x) - \xi(l-x)]}{\xi} \right\} \times \\ &\quad \left\{ \frac{f_3}{\xi} sh\xi(l-x) - f_4 ch\xi(l-x) \right\} dP dx \end{aligned}$$

ou

$$u = \frac{I}{KI} \int_0^{\alpha_1} \frac{P}{2X} \left\{ f_2(ch\xi x - I) - f_1 \frac{(sh\xi x - \xi x)}{\xi} \right\} P \left\{ \frac{f_1}{\xi} sh\xi x - f_2 ch\xi x \right\} dx$$



$$+ \frac{I}{KI} \int_{a_1}^l \frac{P}{2X} \left\{ f_4 \left[ch\xi(l-x) - 1 \right] - f_3 \frac{[sh\xi(l-x) - \xi(l-x)]}{\xi} \right\} P \times \\ \left\{ \frac{f_3}{\xi} sh\xi(l-x) - f_4 ch\xi(l-x) \right\} dx$$

ou encore

$$(10) \quad \frac{Xl}{KQ} = \frac{I}{KI} \int_x \frac{y}{2} M_x dx$$

L'équation (10) montre qu'une pièce courbée, dont les ordonnées sont égales à la moitié de la flèche réelle, peut servir de système principal.

IV. Cas Speciaux.

1). Soit $X=0$. À ce cas correspond une pièce qui est encastree aux deux extrémités et qui soutient une charge locale et fixe. Dans les manuels on suppose d'ordinaire, mais d'une manière implicite, qu'une des extrémités est complètement mobile horizontalement et de ce fait on ne s'occupe pas de la force longitudinale, qui peut produire un changement de longueur de la pièce, si les extrémités sont incomplètement mobiles horizontalement.

On obtient alors pour R_1 , R_2 , M_1 et M_2 .

$$(11) \quad \begin{cases} R_1 = \frac{Pa_2^2(3a_1 + a_2)}{l^3}, \\ R_2 = \frac{Pa_1^2(3a_2 + a_1)}{l^3}, \\ M_1 = \frac{Pa_1a_2^2}{l^2}, \\ M_2 = \frac{Pa_2a_1^2}{l^2}. \end{cases}$$

* Soit α le déplacement horizontal. La valeur de α/l peut être négligée devant l'unité.

2). Soit $\alpha_1 = \alpha_2$. À ce cas correspond une pièce qui est encastrée aux deux extrémités et qui soutient une charge P au milieu de sa portée.

En remplaçant α_1 et α_2 par $\frac{l}{2}$, les équations (5) nous donnent :

$$(12) \quad \begin{cases} R_1 = R_2 = \frac{P}{2}, \\ M_1 = M_2 = \frac{Pl}{4\omega} \tanh \frac{\omega}{2}. \end{cases}$$

L'équation (7), en y remplaçant α_1 et α_2 par $\frac{l}{2}$, R_1 , R_2 , M_1 et M_2 par ses valeurs, et en designant $\frac{k_1 + k_2}{2}$ par ω , nous donne pour X :

$$(13) \quad \frac{2 + ch\omega - \frac{3sh\omega}{\omega}}{\omega^6 ch^2 \frac{\omega}{2}} = \frac{1024 K^2 I^3}{P^2 l^6 Q}.$$

L'équation (13) étant transcendante, on n'en peut tirer aucune conclusion pratique. On peut cependant, par les considérations suivantes, se rendre compte du signe que l'on doit adopter pour X . En effet, pour une valeur positive de X , la quantité ω est réelle ; l'expression $\left\{ 2 + ch\omega - \frac{3sh\omega}{\omega} \right\} / \left(\omega^6 ch^2 \frac{\omega}{2} \right)$ est alors toujours positive et sa valeur varie en sens inverse de ω .

Pour une valeur négative de X , ω est imaginaire et l'expression $\left\{ 2 + ch\omega - \frac{3sh\omega}{\omega} \right\} / \left(\omega^6 ch^2 \frac{\omega}{2} \right)$ est alors négative. Il résulte de ceci que X doit être positif, puisque le second membre de l'équation (13) est toujours positif, quelque soit le signe de P . La force X se présente donc toujours comme une tension, indépendamment du signe de P .

Si l'on s'est donné la section de la pièce et la charge P appliquée de l'extérieur, le second membre de l'équation (13) est un nombre connu H . On peut alors chercher quelle valeur de ω substituée dans le premier membre rend ce premier membre égal à H et l'on n'aura plus, pour obtenir X , qu'à porter la valeur trouvée pour ω dans la formule $X = a\omega^2$ (où $a = \frac{4}{l^2} KI$).

La figure 3 peut servir à déterminer ω et en outre X .

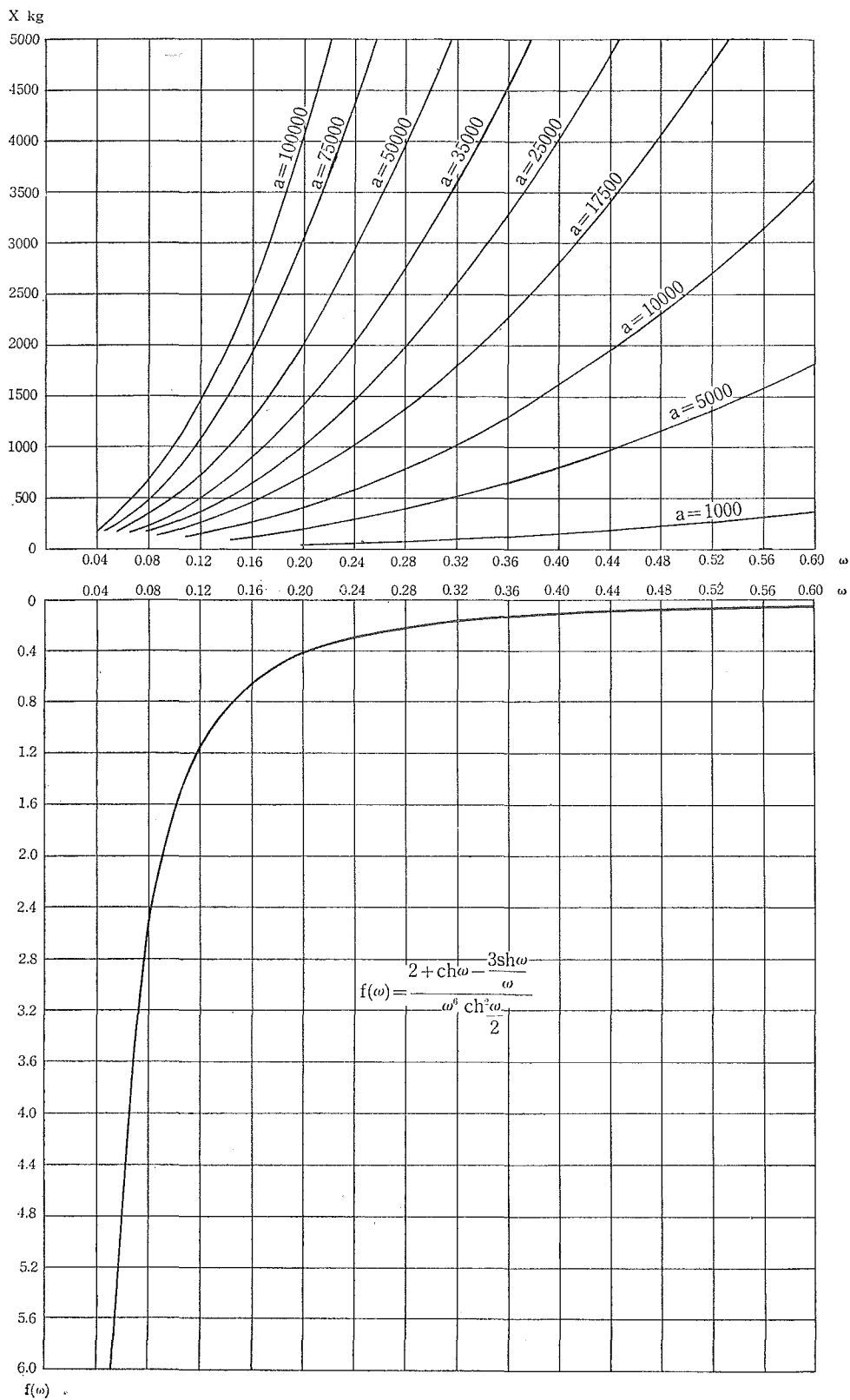


Fig. 3 a.

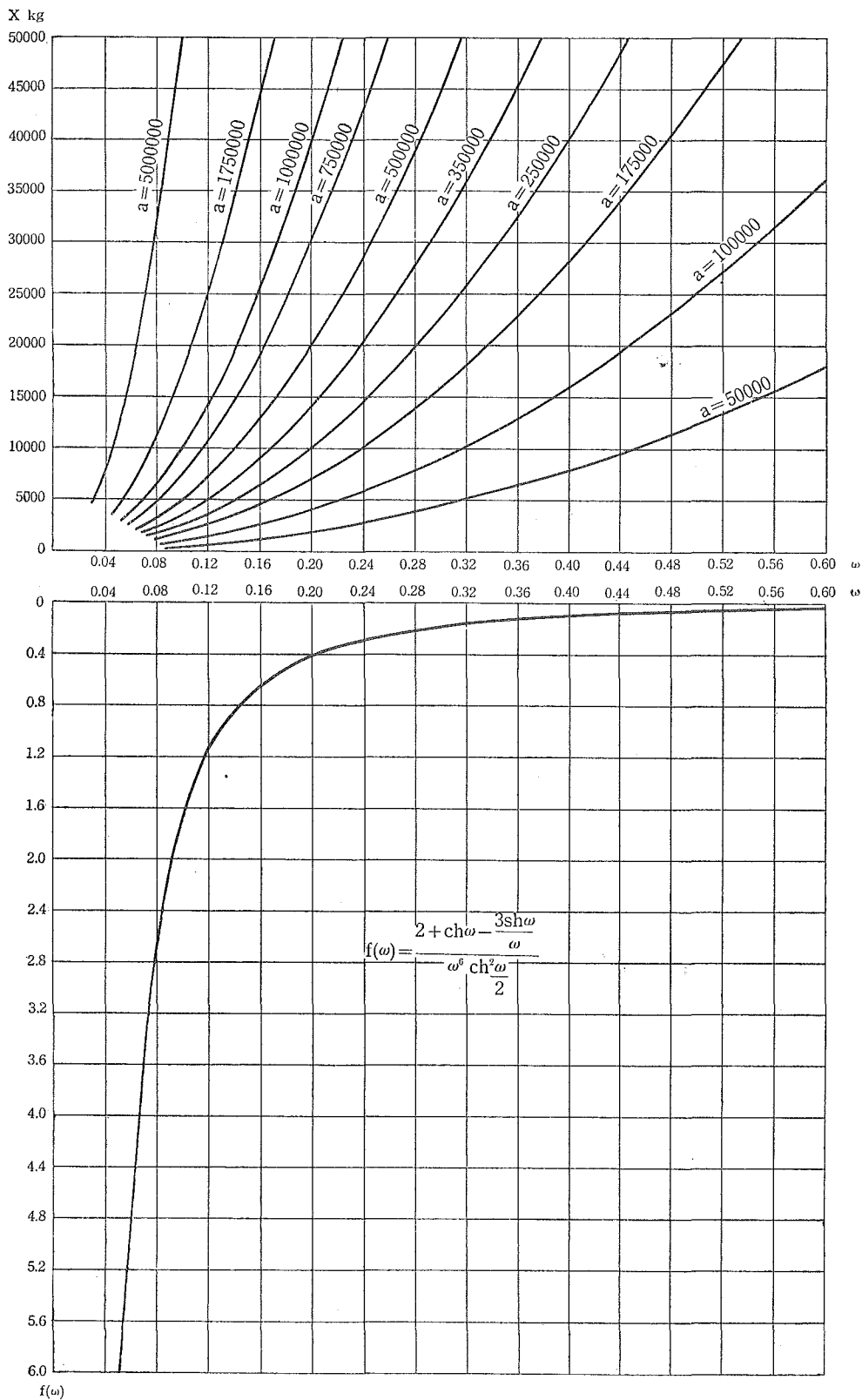


Fig. 3 b.

Réactions Verticales aux Extrémités de la Pièce Complètement Encastree.

Les premières deux équations de l'équation (5) nous donnent les réactions verticales qui se manifestent aux deux extrémités de la pièce complètement encastree. Ces deux équations sont transcendantes et sous une forme très compliquée à résoudre.

En développant donc en série l'expression de R_1 , on obtient :

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} R_1 = \frac{P(3a_1 + a_2)a_2^2}{l^3} (1 + \lambda), \\ \text{où } \lambda = \frac{(k_1 + k_2)^2}{40} + \frac{k_1^2(k_1 - k_2)}{10(3k_1 + k_2)} + \dots\dots\dots \\ \text{par analogie :} \\ R_2 = \frac{P(3a_2 + a_1)a_1^2}{l^3} (1 + \lambda'), \\ \text{où } \lambda' = \frac{(k_1 + k_2)^2}{40} + \frac{k_2^2(k_2 - k_1)}{10(3k_2 + k_1)} + \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Le coefficient d'élasticité étant en général un grand nombre, les expressions λ et λ' sont négligeables devant l'unité. Si l'on néglige ces deux quantités dans les équations (14), on obtient pour R_1 et R_2 les valeurs bien connues :

$$(15) \left\{ \begin{array}{l} R_1 = \frac{P(3a_1 + a_2)a_2^2}{l^3}, \\ R_2 = \frac{P(3a_2 + a_1)a_1^2}{l^3}. * \end{array} \right.$$

* En pratique la valeur de $X/(KI)$ est très petite, par suite les valeurs λ et λ' sont petites et l'on peut donc servir les équations (15) sans erreur pratique.

En désignant a_1 et a_2 respectivement par εl et $(l-\varepsilon)l$, on a encore :

$$(16) \left\{ \begin{array}{l} R_1 = P f_1(\varepsilon), \\ R_2 = P f_2(\varepsilon), \\ \text{où l'on a posé} \\ f_1(\varepsilon) = 1 - 3\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3, \\ f_2(\varepsilon) = 3\varepsilon^2 - 2\varepsilon^3, \\ \text{et} \\ + l > \varepsilon > 0. \end{array} \right.$$

La figure 4 donne la représentation graphique des expressions $f_1(\varepsilon)$ et $f_2(\varepsilon)$ qui permettent de déterminer les lignes d'influence de R_1 et R_2 .

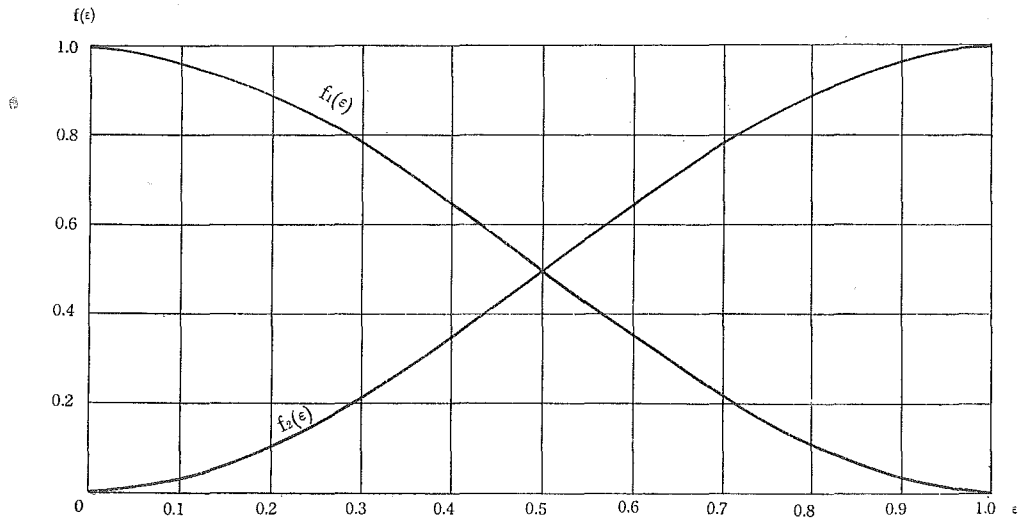


Fig. 4.

Moments de Flexion Négatifs aux Extrémités de la Pièce Complètement Encastrée.

Les dernières deux équations de l'équation (5) nous donnent les moments de flexion négatifs qui se manifestent aux deux extrémités de la pièce complètement encastrée. Ces deux équations sont transcendantes et

sous une forme très compliquée à résoudre. Comme précédemment, en développant donc en série l'expression de M_1 , on a :

$$(17) \left\{ \begin{array}{l} M_1 = \frac{Pa_1 a_2^2}{l^2} [1 - \eta], \\ \text{où } \eta = \frac{(k_1 + k_2)^2}{600} + \frac{k_2(2k_1 - k_2)}{60} + \dots \\ \text{par analogie :} \\ M_2 = \frac{Pa_2 a_1^2}{l^2} [1 - \eta'], \\ \text{où } \eta' = \frac{(k_1 + k_2)^2}{600} + \frac{k_1(2k_2 - k_1)}{60} + \dots \end{array} \right.$$

Le coefficient d'élasticité étant un grand nombre, la valeur de $X/(KT)$ est très petite et les expressions η et η' sont négligeables devant l'unité. Si l'on néglige ces deux quantités dans les équations (17), on a pour M_1 et M_2 sans erreur pratique :

$$(18) \left\{ \begin{array}{l} M_1 = \frac{Pa_1 a_2^2}{l^2}, \\ M_2 = \frac{Pa_2 a_1^2}{l^2} \end{array} \right.$$

qui sont les formules que donnent les manuels pour $X=0$. En désignant a_1 et a_2 respectivement par εl et $(1-\varepsilon)l$, on a encore :

$$(19) \left\{ \begin{array}{l} M_1 = Pl f_3(\varepsilon), \\ M_2 = Pl f_4(\varepsilon), \\ \text{où l'on a posé} \\ f_3(\varepsilon) = \varepsilon(1-\varepsilon)^2, \\ f_4(\varepsilon) = (1-\varepsilon)\varepsilon^2. \end{array} \right.$$

La figure 5 donne la représentation graphique des expressions $f_3(\varepsilon)$ et $f_4(\varepsilon)$ qui permettent de déterminer les lignes d'influence de M_1 et M_2 .

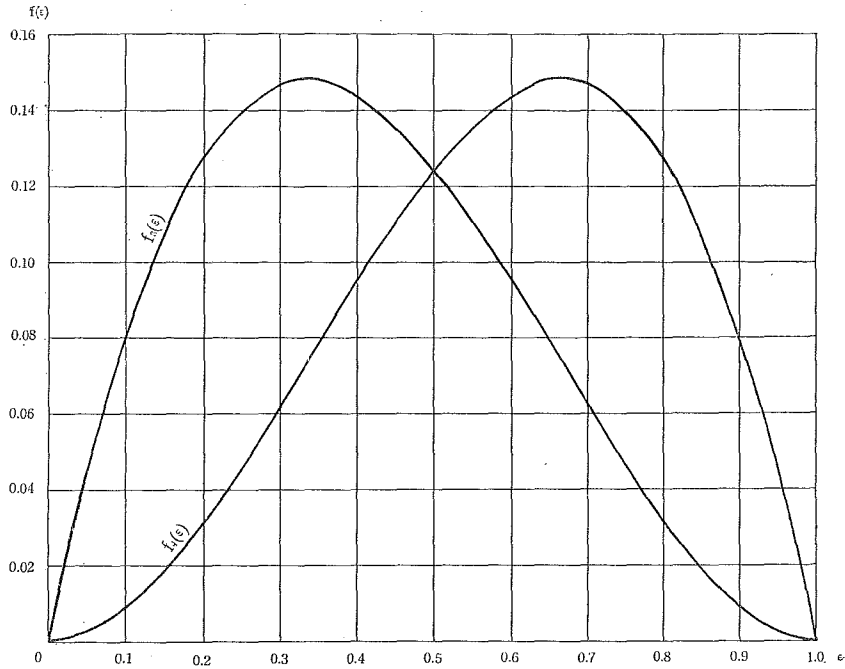


Fig. 5.

Force Longitudinale qui se Manifeste dans la Pièce.

L'équation (7) nous donne la force longitudinale qui se manifeste dans la pièce complètement encastree. La solution de cette équation envisagé n'est pas obtenue sans un calcul assez compliqué.

L'équation (7) nous donne :

$$\sum_{n=1}^{n=2} \left\{ R_n M_n \alpha_n^6 f_1(k_n) - M_n^2 \alpha_n^5 f_2(k_n) - R_n^2 \alpha_n^7 f_3(k_n) \right\} = \frac{4LK^2 I^3}{\Omega},$$

où l'on a posé

$$(20) \quad \begin{cases} f_1(k_n) = \frac{I}{k_n^6} \left\{ ch 2k_n - 2k_n sh k_n - 1 \right\}, \\ f_2(k_n) = \frac{I}{k_n^4} \left\{ \frac{sh 2k_n}{2k_n} - \frac{2sh k_n}{k_n} + 1 \right\}, \\ f_3(k_n) = \frac{I}{k_n^6} \left\{ \frac{sh 2k_n}{2k_n} + \frac{2sh k_n}{k_n} - ch k_n - 1 \right\}, \end{cases}$$

ou encore, en développant en série, l'on a :

$$(21) \left\{ \begin{array}{l} f_1(k_n) = \frac{I}{3k_n^2} [I + a_1], \\ f_2(k_n) = \frac{I}{3k_n^2} [I + a_2], \\ f_3(k_n) = \frac{I}{15k_n^2} [I + a_3], \end{array} \right.$$

où

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,216k_n^2 + 0,01785k_n^4 + \dots \\ a_2 &= 0,35k_n^2 + 0,03690k_n^4 + \dots \\ a_3 &= 0,15476k_n^2 + 0,00992k_n^4 + \dots \end{aligned}$$

On trouvera dans la figure 6 une représentation graphique des fonctions précédentes pour k_n .

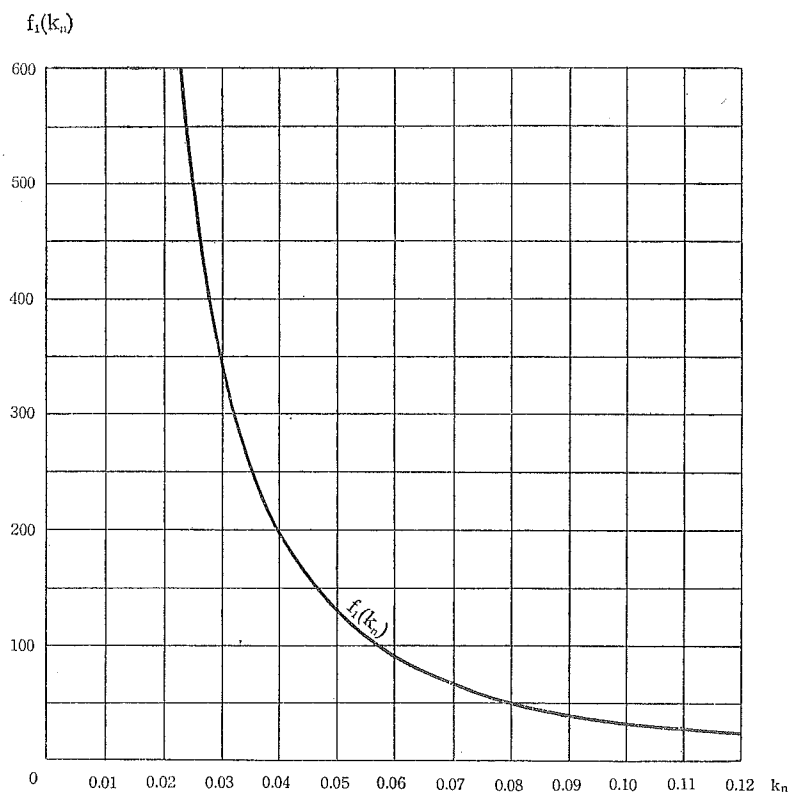


Fig. 6 a.

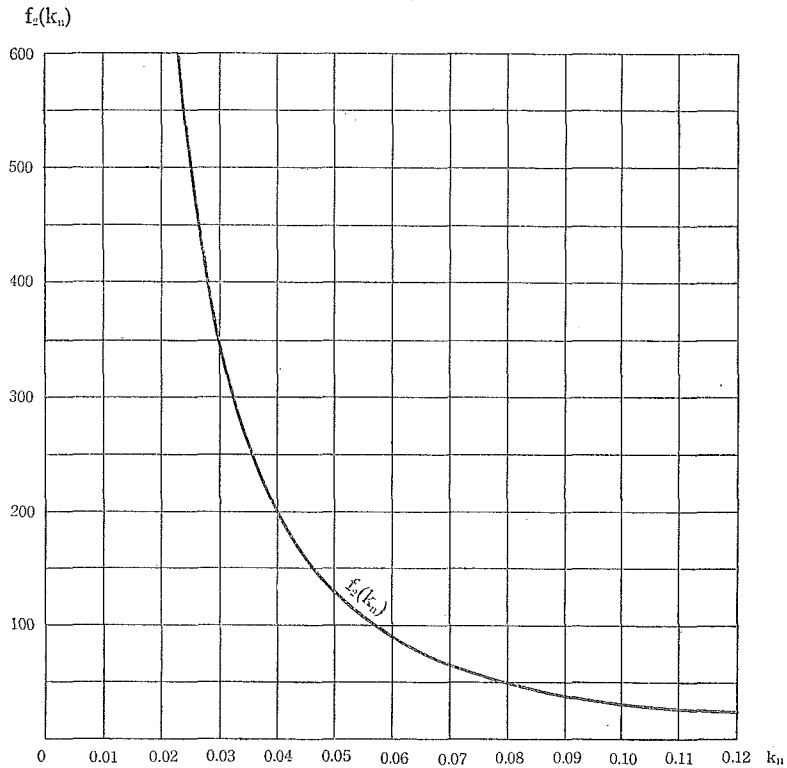


Fig. 6 b.

En effet, si l'on s'est donné la section de la pièce et la longueur de la portée, le second membre de la première équation de l'équation (20) est un nombre connu H . On peut alors chercher par tâtonnements quelles valeurs de k_1 et k_2 substituées dans le premier membre rendent ce premier membre égal à H et l'on n'aura plus, pour obtenir X , qu'à porter la valeur trouvée pour k_1 dans la formule $X = \left(\frac{k_1}{a_1}\right)^2 KI$.

La figure 4 peut servir à déterminer R_1 et R_2 , la figure 5 donne les valeurs M_1 et M_2 , et la figure 6 détermine les valeurs $f_1(k_1)$, $f_2(k_1)$, $f_3(k_1)$, $f_1(k_2)$, $f_2(k_2)$ et $f_3(k_2)$ pour k_1 et k_2 donnés.

Toutes les formules que nous avons obtenues dans les paragraphes précédents contiennent des termes transcendants qui les rendent difficilement applicables dans la pratique.

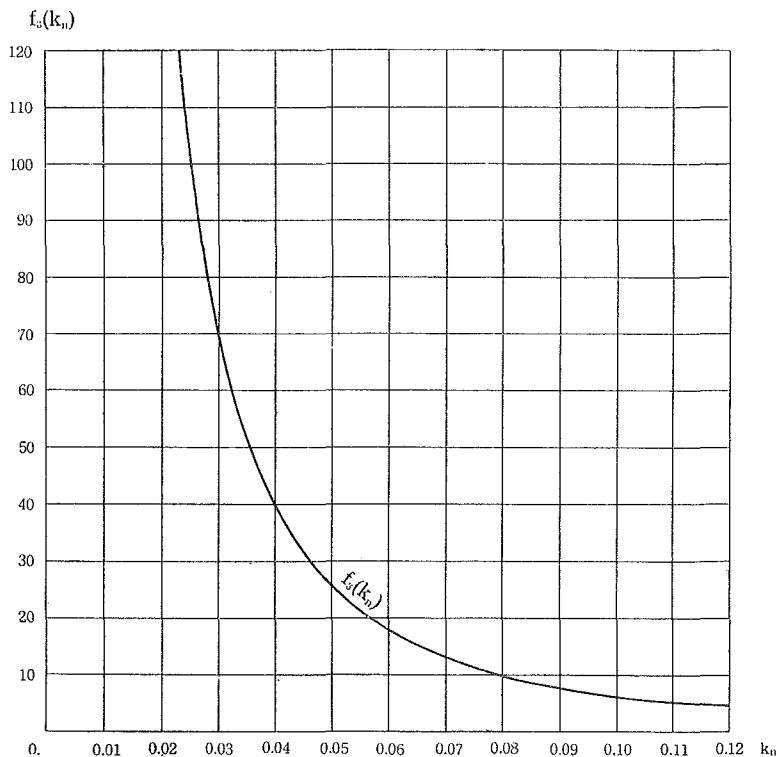


Fig. 6 c.

Nous donnerons, pour terminer, la ligne d'influence de X pour une pièce et une charge données.

Soit une pièce de section à double T , laminée, avec $l=400\text{cm}$, $I=170\text{cm}^4$, $\Omega=10,6\text{cm}^2$, $E=2100000\text{kg par cm}^2$ et $P=500\text{kg}$, chargée au point situé à la distance a_1 de l'extrémité A (Fig. 1).

Pour $a_1 = \frac{l}{2}$, on a $X=72\text{kg}$,

pour $a_1 = \frac{3}{8}l$, on a $X=56\text{kg}$.

La figure 7 nous donne la ligne d'influence de la force longitudinale X pour une pièce de section donnée comme ci-dessus avec une charge, locale et fixe, $P=500\text{ kg}$.

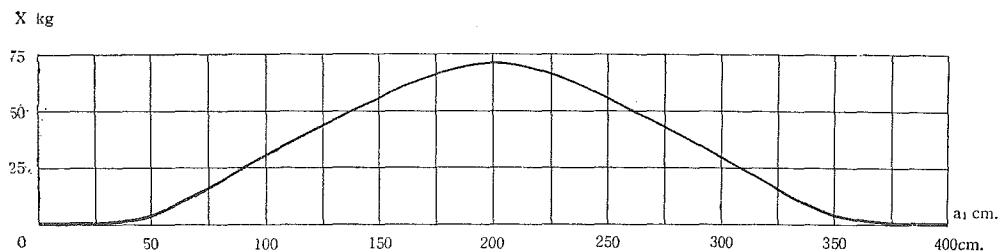


Fig. 7.