



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Über die Wärmeleitung in einem Medium in dem die Wärmequelle überall gleichmässig verteilt ist
Author(s)	Ikeda, Yoshiro
Citation	Memoirs of the Faculty of Engineering, Hokkaido Imperial University, 1, 91-103
Issue Date	1928
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/37676
Type	departmental bulletin paper
File Information	1_91-103.pdf



Über die Wärmeleitung in einem Medium in dem die Wärmequelle überall gleichmässig verteilt ist

Von

Yoshiro Ikeda.

(eingegangen am 1. Juli 1926.)

In der vorliegenden Arbeit wird eine Aufgabe der Wärmeleitung durch die Integralgleichung gelöst. Die Aufgabe der Wärmeleitung in einem Medium, in dem die Wärmequelle überall verteilt ist, ist im allgemeinen nicht einfach, doch im Falle wo die Wärmemenge, die in dem Medium entsteht, nur von der Zeit abhängig ist, ist sie ein einfaches Beispiel der mathematischen Physik.

Wenn die Wärmemenge, die in dem Medium entsteht und die Oberflächen- und Anfangsbedingungen exakt gegeben sind, so kann man die Temperatur als Funktion von Zeit und Ort berechnen.

Aber wenn die Temperatur in jeder Zeit und an jedem Ort bekannt ist, wie kann man die Wärmemenge, die in dem Medium entsteht, finden? Das ist die Aufgabe, die wir behandeln wollen.

t =Zeit

j =Wärmeströmung

λ =Wärmeleitfähigkeit

c =Spezifische Wärme

ρ =Massendichtigkeit

Q =Wärmemenge, die in der kleinen Volumeneinheit des Mediums
in der Zeiteinheit entsteht.

T =Temperatur.

Die fundamentale Gleichung lautet also ;

$$\operatorname{div} j + Q(t) = c\rho \frac{\partial T}{\partial t},$$

wobei

$$j = \lambda \operatorname{grad} T.$$

Wenn man

$$(1) \quad F(t) = \int_0^t \frac{Q(t)}{c\rho} dt$$

setzt, so erhält man

$$k \Delta \{T - F\} = \frac{\partial}{\partial t} \{T - F\},$$

wobei

$$k = \frac{\lambda}{c\rho}.$$

I.

Für einen Stab von der Länge l längs der x Achse, dessen Oberfläche Wärmeundurchlässig ist, kann, wenn die Stabquerschnittsdimension im Verhältnis zur Länge klein ist, die Temperatur als unabhängig von y und z angesehen werden, so dass gilt:

$$(2) \quad k \frac{\partial^2 (T - F)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial t} (T - F).$$

Es handelt sich nun um eine Aufgabe der Wärmeleitung mit den Nebendingungen;

$$\begin{aligned} t=0, \quad T &= T_0, \\ x=0, \quad -\frac{\partial T}{\partial x} + hT &= 0, \\ x=l, \quad \frac{\partial T}{\partial x} + hT &= 0. \end{aligned}$$

Oder:

$$\begin{aligned} t=0 \quad T - F &= T_0, \\ x=0 \quad -\frac{\partial}{\partial x} (T - F) + h(T - F) &= -hF, \\ x=l \quad \frac{\partial}{\partial x} (T - F) + h(T - F) &= -hF. \end{aligned}$$

Diese Aufgabe zerlegen wir in drei einfachere, indem wir $T-F$ als Summe von drei Funktionen $u_1 + u_2 + u_3$ betrachten, die sämtlich der Differentialgleichung (2) genügen, aber verschiedene Nebenbedingungen erfüllen, welche lauten:

$$\begin{aligned} \text{I. für } u_1: u_1(0, x) &= T_0, \quad \left\{ -\frac{\partial u_1}{\partial x} + hu_1 \right\}_{x=0} = 0, \quad \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x} + hu_1 \right\}_{x=l} = 0, \\ \text{II. für } u_2: u_2(0, x) &= 0, \quad \left\{ -\frac{\partial u_2}{\partial x} + hu_2 \right\}_{x=0} = -hF, \quad \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial x} + hu_2 \right\}_{x=l} = 0, \\ \text{III. für } u_3: u_3(0, x) &= 0, \quad \left\{ -\frac{\partial u_3}{\partial x} + hu_3 \right\}_{x=0} = 0, \quad \left\{ \frac{\partial u_3}{\partial x} + hu_3 \right\}_{x=l} = -hF. \end{aligned}$$

Die Lösungen sind bekannt:

$$\begin{aligned} u_1 &= 2T_0 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\int_0^t k a_n^2 dt} \frac{a_n \cos a_n x + h \sin a_n x}{\{(a_n^2 + h^2)l + 2h\} a_n} \{a_n \sin a_n l - h \cos a_n l + h\}, \\ u_2 &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos a_n x + h \sin a_n x}{(a_n^2 + h^2)l + 2h} (a_n \cos a_n l + h \sin a_n l) \int_0^t hF(\tau) k(\tau) e^{-a_n^2 \int_0^\tau k(t) dt} d\tau, \\ u_3 &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos a_n x + h \sin a_n x}{(a_n^2 + h^2)l + 2h} a_n \int_0^t hF(\tau) k(\tau) e^{-a_n^2 \int_0^\tau k(t) dt} d\tau, \end{aligned}$$

wobei:

$$\tan a_n l = \frac{2a_n h}{a_n^2 - h^2},$$

oder

$$(3) \quad \tan a_{2n+1} \frac{l}{2} = \frac{h}{a_{2n+1}},$$

$$(4) \quad \tan a_{2n} \frac{l}{2} = -\frac{a_{2n}}{h}.$$

Aus (4) folgt:

$$a_{2n} \sin a_{2n} l - h \cos a_{2n} l + h = 0,$$

$$a_{2n} \cos a_{2n} l + h \sin a_{2n} l + a_{2n} = 0.$$

Für $a = a_{2n+1}$,

$$\frac{a \cos ax + h \sin ax}{\{(a^2 + h^2)l + 2h\} a} (a \sin al - h \cos al + h) = 2 \frac{\cos a \left(x - \frac{l}{2} \right) \sin a \frac{l}{2}}{al + \sin al}.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$4 \frac{\cos a_{2n+1} \left(x - \frac{l}{2} \right) \sin a_{2n+1} \frac{l}{2}}{a_{2n+1} l + \sin a_{2n+1} l} = a_n(x), \text{ und } a_{2n+1} = a_n,$$

so haben wir

$$2 \frac{a_n \cos a_n x + l \sin a_n x}{(a_n^2 + k^2) l + 2h} (a_n \cos a_n l + \sin a_n l + a_n) = \frac{a_n(x)}{h} a_n^2.$$

Also erhalten wir die Lösung

$$(5) \quad T(x, t) - F(t) = T_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) e^{-\alpha_n^2 \int_0^t k(t) dt} - \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) a_n^2 k(\tau) F(\tau) e^{-\alpha_n^2 \int_{\tau}^t k(t) dt} d\tau.$$

Wenn k , h und $F(t)$ bekannt sind, so können wir $T(x, t)$ aus der Gleichung (5) berechnen.

Setzt man

$$T(x, t) - T_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) e^{-\int_0^t k(t) \alpha_n^2 dt} = \varphi(x, t),$$

so wird

$$(6) \quad \varphi(x, t) = F(t) - \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) a_n^2 k(\tau) F(\tau) e^{-\alpha_n^2 \int_{\tau}^t k(t) dt} d\tau.$$

Dies ist die Volterrasche Integralgleichung zweiter Art. Daraus ist es möglich $F(t)$ zu gewinnen, wenn $\varphi(x, t)$ bekannt ist. Aber der Kern ist nicht so einfach.

Zunächst betrachten wir die nachstehende Integralgleichung.

$$(7) \quad \varphi(x, t) = F_1(t) - \int_0^t a_1(x) a_1^2 k(\tau) e^{-\alpha_1^2 \int_{\tau}^t k(t) dt} F_1(\tau) d\tau.$$

Die Resolvente dieses Kerns wird durch eine Methode, die ich im Tohoku Mathematical Journal 1923 gezeigt habe, sehr leicht berechnet. Also bilden wir zwei Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\tau^2} + \left\{ -\frac{k'}{k} + a_1^2 k(I - a_1) \right\} \frac{du}{d\tau} &= 0, \\ \frac{d^2 v}{d\tau^2} + \left\{ -\frac{k'}{k} + a_1^2 k \right\} \frac{dv}{d\tau} &= 0, \end{aligned}$$

Die Lösungen sind

$$\begin{aligned} u_1 &= I, & u_2 &= e^{-\alpha_1^2(I-a_1)\int_0^t k(t)dt}, \\ v_1 &= I, & v_2 &= e^{-\alpha_1^2\int_0^\tau k(t)dt}. \end{aligned}$$

Wir schreiben

$$\begin{aligned} M(t, \tau) &= \frac{u_1(t)u_2(\tau) - u_2(t)u_1(\tau)}{u_1(\tau)u_2'(\tau) - u_2(\tau)u_1'(\tau)} = e^{\frac{-\alpha_1^2(I-a_1)\int_0^t kdt}{\tau} - I}, \\ N(t, \tau) &= \frac{v_1(t)v_2(\tau) - v_2(t)v_1(\tau)}{v_1(\tau)v_2'(\tau) - v_2(\tau)v_1'(\tau)} = e^{\frac{-\alpha_1^2\int_0^\tau kdt}{\tau} - I}. \end{aligned}$$

Wenn

$$K(t, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} \{N(t, \tau) a_1 a_1^2 k\}$$

ein Kern ist, so ist die Resolvente

$$S(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \{M(t, \tau) a_1 a_1^2 k\}.$$

Also

$$(8) \quad K(t, \tau) = -a_1 a_1^2 k e^{-\int_0^t k a_1^2 dt},$$

$$(9) \quad S(t, \tau) = a_1 a_1^2 k e^{-\int_0^t (I-a_1) \alpha_1^2 k dt}.$$

Daraus erhalten wir die Lösung der Integralgleichung (7);

$$F_1(t) = \varphi(x, t) + \int_0^t a_1 a_1^2 k e^{-\alpha_1^2 \int_0^t (I-a_1) k dt} \varphi(x, \tau) d\tau,$$

oder

$$\begin{aligned} F_1(t) &= T(x, t) - T_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) e^{-\alpha_n^2 \int_0^t k dt} \\ &\quad + \int_0^t a_1(x) a_1^2 k e^{-\alpha_1^2 \int_0^t (I-a_1(x)) k dt} T(x, \tau) d\tau \\ &\quad - T_0 \int_0^t a_1(x) a_1^2 k e^{-\alpha_1^2 \int_0^t (I-a_1(x)) k dt} \sum a_n(x) e^{-\alpha_n^2 \int_0^\tau k dt} d\tau. \end{aligned}$$

Setzt man

$$\varphi_1(x, t) = \varphi(x, t) + \int_0^t \sum_{n=2}^{\infty} a_n(x) a_n^2 k(\tau) F(\tau) e^{-\alpha_n^2 \int_{\tau}^t k dt} d\tau,$$

so wird

$$(10) \quad F(t) = \varphi_1(x, t) + \int_0^t a_1 a_1^2 k e^{-\int_{\tau}^t a_1^2 (t - a_1) k dt} \varphi(x, \tau) d\tau,$$

oder

$$(11) \quad F(t) = F_1(t) + \int_0^t \sum_{n=2}^{\infty} a_n(x) a_n^2 k e^{-\int_{\tau}^t \alpha_n^2 k dt} F(\tau) d\tau \\ + \int_0^t \sum_{n=2}^{\infty} a_n(x) a_n^2 k(\tau_1) F(\tau_1) d\tau_1 \int_{\tau_1}^t a_1 a_1^2 k(\tau) e^{-\int_{\tau}^t a_1^2 (t - a_1(x)) k dt - \alpha_n^2 \int_{\tau_1}^{\tau} k dt} d\tau,$$

denn wir haben die Dirichletsche Integralformel:

$$\int_0^t d\tau \int_0^t F(\tau, \tau_1) d\tau_1 = \int_0^t d\tau_1 \int_{\tau_1}^t F(\tau, \tau_1) d\tau.$$

Dies ist wieder eine Integralgleichung. Der Kern ist auch nicht so einfach, doch kann man durch die sukzessiven Approximationen die Funktion $F(t)$ gewinnen. Um die praktische Rechnung zu zeigen, wollen wir uns nun mit der weiter eingehenden Aufgabe beschäftigen.

II.

Ist es möglich, k , h und $F(t)$ zu berechnen, wenn man $T(x, t)$ gemessen hat, und wenn

$$Q(t) = 0 \quad t > t_c$$

ist?

Also

$$(12) \quad F(t) = \int_0^t \frac{Q(t)}{c\rho} dt \quad 0 < t < t_c; \quad F(t) = F(t_c) \quad t \geq t_c$$

Für sehr grosses t , folgt aus (5) und (12)

$$(13) \quad T(x, t) - F(t_0) = T_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) e^{-\alpha_n^2 \int_0^t k dt} - \int_0^{t_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \alpha_n^2 k e^{-\alpha_n^2 \int_{\tau}^t k dt} F(\tau) d\tau \\ - F(t_0) \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) (1 - e^{-\alpha_n^2 \int_{t_0}^t k dt}).$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = 1$ ist, so erhält man

$$T(x, t) = T_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) e^{-\alpha_n^2 \int_0^t k dt} + F(t_0) \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) e^{-\alpha_n^2 \int_{t_0}^t k dt} \\ - \int_0^{t_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(x) \alpha_n^2 k e^{-\alpha_n^2 \int_{\tau}^t k dt} F(\tau) d\tau,$$

α_n ist die n -te Wurzel der Gleichung (3) und es ist bekannt, dass

$$\alpha_n \frac{l}{2} = n\pi + \alpha_{n-1} \frac{l}{2}.$$

Daher ist die Gleichung (13) praktisch gleich

$$(14) \quad T(x, t) = a_1(x) e^{-\alpha_1^2 \int_0^t k dt} \left\{ T_0 + F(t_0) - \int_0^{t_0} \alpha_1^2 k e^{-\alpha_1^2 \int_{\tau}^t k dt} (F(\tau) - F(t)) d\tau \right\}.$$

Daraus folgt, dass

$$(15) \quad \frac{T(x_1, t)}{T(x_2, t)} = \frac{a_1(x_1)}{a_1(x_2)} = \frac{\cos \alpha_1 \left(x_1 - \frac{l}{2} \right)}{\cos \alpha_1 \left(x_2 - \frac{l}{2} \right)}$$

Aus der Gleichung können wir α_1 bestimmen, und wenn einmal α_1 berechnet worden ist, so haben wir h aus der Gleichung (4) und daraus α_2, α_3 , u.s.w.

Wenn t' auch hinreichend gross ist, so wird

$$\frac{T(x, t)}{T(x, t')} = e^{-\alpha_1^2 k(t-t')},$$

oder

$$(16) \quad -\alpha_1^2 k(t-t') = \log \frac{T(x, t)}{T(x, t')}.$$

Wie gezeigt, können wir für $t > t_e$ die Funktion k berechnen, aber wir können es nicht für $t \ll t_e$. Also nehmen wir an, dass k eine Konstante ist.

Wir schreiben die Gleichung (14) in der Gestalt;

$$\frac{T(x, t)}{a_1(x)} e^{\alpha_1^2 k t} = T_0 + F(t_e) - \int_0^{t_e} \alpha_1^2 k e^{\alpha_1^2 k \tau} \{F(\tau) - F(t_e)\} d\tau$$

Die linke Seite ist unabhängig von t und sie wird aus den versuchten Tatsachen bestimmt. Nun wollen wir sie mit K bezeichnen.

$$(17) \quad K = \frac{T(x, t)}{a_1(x)} e^{\alpha_1^2 k t}.$$

Da

$$(18) \quad T_0 = K - F(t_e) + \int_0^{t_e} \alpha_1^2 k e^{\alpha_1^2 k \tau} (F(\tau) - F(t_e)) d\tau$$

ist, so ergibt sich für klein t

$$\begin{aligned} T(x, t) - F(t) &= T_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) e^{-\alpha_n^2 k t} - \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \alpha_n^2 k e^{-\alpha_n^2 k(t-\tau)} F(\tau) d\tau \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) e^{-\alpha_n^2 k t} K + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) e^{-\alpha_n^2 k t} \int_0^{t_e} \alpha_1^2 k e^{\alpha_1^2 k \tau} F(\tau) d\tau \\ &\quad + F(t_e) \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) e^{-\alpha_n^2 k t} - \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \alpha_n^2 k e^{-\alpha_n^2 k(t-\tau)} F(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} T(x, t) - K \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) e^{-\alpha_n^2 k t} &= F(t) - F(t_e) \\ &\quad + \int_0^{t_e} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) e^{-\alpha_n^2 k t} \{F(\tau) - F(t_e)\} \alpha_1^2 k e^{-\alpha_1^2 k \tau} d\tau \\ &\quad - \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \alpha_n^2 e^{-\alpha_n^2 k(t-\tau)} \{F(\tau) - F(t_e)\} d\tau. \end{aligned}$$

Nun setzen wir

$$F(t) - F(t_c) = f(t);$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} T(x, t) - K \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) e^{-\alpha_n^2 k t} &= f(t) + \int_t^{t_c} a_1^2 k e^{\alpha_1^2 k \tau} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha_n^2 k t} f(\tau) d\tau \\ &+ \int_0^t \left\{ a_1^2 k e^{\alpha_1^2 k \tau} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) e^{-\alpha_n^2 k t} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\alpha_n^2 k(t-\tau)} \right\} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Letztes Integral ist

$$\int_0^t \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{-\alpha_n^2 k t} \left\{ a_1^2 k e^{\alpha_1^2 k \tau} - a_n^2 k e^{\alpha_n^2 k t} \right\} f(\tau) d\tau.$$

Für klein t , kann man das Integral vernachlässigen; also

$$\begin{aligned} (19) \quad T(x, t) - K \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) e^{-\alpha_n^2 k t} &= f(t) + \int_t^{t_c} a_1^2 k e^{-\alpha_1^2 k(t-\tau)} a_1(x) f(\tau) d\tau \\ &+ \int_t^{t_c} a_1^2 k f(\tau) e^{\alpha_1^2 k \tau} \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{-\alpha_n^2 k t} d\tau. \end{aligned}$$

Zunächst betrachten wir die Integralgleichung

$$T(x, t) - K \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) e^{-\alpha_n^2 k t} = f_1(t) + \int_t^{t_c} a_1^2 k e^{-\alpha_1^2 k(t-\tau)} a_1(x) f_1(\tau) d\tau$$

Die Resolvente dieses Kerns ist im vorhergehenden Paragraphen gegeben; die Lösung ist

$$\begin{aligned} (20) \quad F_1(t) - F_1(t_c) &= \left\{ T(x, t) - K \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) e^{-\alpha_n^2 k t} \right\} \\ &+ \int_{t_c}^t a_1^2 k a_1(x) e^{-\alpha_1^2 k(I-a_1(x))k(t-\tau)} T(x, \tau) d\tau \\ &- K \int_{t_c}^t a_1^2 k a_1(x) \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) e^{-\alpha_1^2 k(I-a(x))(t-\tau) - \alpha_n^2 k \tau} d\tau \\ &= T(x, t) + \int_{t_c}^t a_1^2 k a_1(x) e^{-\alpha_1^2 k(I-a_1(x))k(t-\tau)} T(x, \tau) d\tau \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -Ka_1(x)e^{-\alpha_1^2(I-a_1(x))k(t-t_0)-\alpha_1^2kt} - K\sum_{n=2}^{\infty}a_n(x)e^{-\alpha_n^2kt}\frac{a_1^2-a_n^2}{a_1^2(I-a_1(x))-\alpha_n^2} \\
& + K\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_1^2a_n}{a_1^2(I-a_1(x))-\alpha_n^2}a_n(x)e^{-\alpha_1^2(I-a_1(x))k(t-t_0)-\alpha_n^2kt}.
\end{aligned}$$

Für

$$0 < t \ll t_0$$

$$\begin{aligned}
(21) \quad F_1(t) - F_1(t_0) &= T(x, t)Ka_1(x)e^{-\alpha_1^2(I-a_1(x))k(t-t_0)-\alpha_1^2kt_0} \\
& - Ka_2(x)e^{-\alpha_2^2kt} + \int_{t_0}^t a_1^2ka_1(x)e^{-\alpha_1^2(I-a_1(x))k(t-\tau)} T(x, \tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Für

$$t=0$$

$$\begin{aligned}
(22) \quad -F(t_0) &= T(x, 0) - Ka_1(x)e^{-\alpha_1(x)\alpha_1^2kt_0} - (I-a_1(x))K \\
& - \int_0^{t_0} a_1^2a_1(x)e^{-\alpha_1^2(I-a_1(x))k\tau} T(x, \tau)d\tau + Ka_2(x)\frac{a_1^2a_1(x)}{(I-a_1(x))\alpha_1^2-\alpha_2^2}.
\end{aligned}$$

Wie schon bemerkt, ist $\frac{a_2l}{2} \doteq \pi + \frac{a_1l}{2}$; daher braucht man kaum die Abweichung von $F(t) - F_1(t)$ abzuschätzen. In ähnlicher Weise wie (10) und (11), können wir aus (19) und (20) die Abweichung berechnen.

$$\begin{aligned}
f(t) - f_1(t) &= - \int_0^{t_0} a_1^2kf(\tau) \sum_{n=2}^{\infty} a_n(x)e^{-\alpha_n^2kt + \alpha_1^2k\tau} d\tau \\
& + \int_0^{t_0} a_1(x)a_1^2ke^{-\alpha_1^2k(t-\tau)(I-a_1)} d\tau \int_{\tau}^{t_0} a_1^2ka_1(x)f(\tau) \sum_{n=2}^{\infty} a_n(x)e^{-\alpha_n^2k\tau_1 + \alpha_1^2kt} d\tau_1.
\end{aligned}$$

Da

$$\int_0^{t_0} d\tau \int_{\tau}^{t_0} \varphi(\tau, \tau_1) d\tau_1 = \int_0^{t_0} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \varphi(\tau, \tau_1) d\tau$$

ist, so wird

$$(23) \quad f(t) - f_1(t)$$

$$= \int_0^{t_0} a_1^2kf(\tau) d\tau \sum_{n=2}^{\infty} a_n(x) \left\{ a_1(x) \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2 e^{-\alpha_1^2(I-a_1(x))k(t-\tau)} - e^{-\alpha_n^2kt + \alpha_1^2k\tau} \right\}.$$

In der Tat ist die Differenz $F(t) - F_1(t)$ im Verhältnis zur Funktion $F(t)$ zu klein um beachtet zu werden.

III.

Wir haben ein Beispiel, auf welches die Rechnung anwendbar ist, gesucht und in der Betontechnik ein schönes gefunden. Herr Professor Tokujiro Yoshida hat über die Wärmeleitung frisch hergestellten Betons ausführliche Versuche⁽¹⁾ gemacht. Wir haben aus der Versuchskurve in seiner Abhandlung als Beispiel Nr. 6 die Funktion $F(t)$ berechnet. Die Kurve wird in Fig. 1 gezeigt.

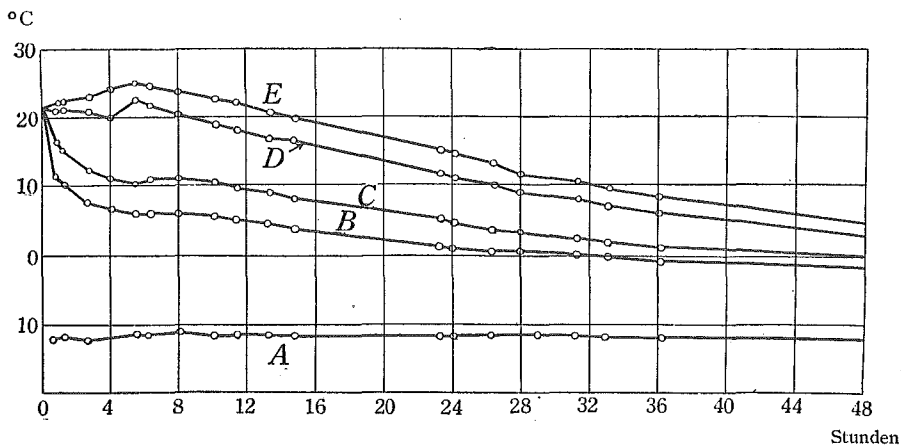


Fig. 1.

$l=60$ cm. Beton aus 1-1-2

Die Kurve A=Temperatur des kalten Zimmers

Die Kurve B= $T(0, t)$

Die Kurve C= $T(3,125, t)$

Die Kurve D= $T(15, t)$

Die Kurve E= $T(30, t)$

Aus der Gleichung (15) berechnen wir

$$\alpha=0.0333$$

(1) Studies on cooling of fresh concrete in freezing weather. University of Illinois Bulletin. May. 2. 1921.

Die Gleichung gilt nicht für die Kurve $T(0, t)$, denn

$$\left[-\frac{\partial(T-F)}{\partial x} + h(T-F) \right]_{x=0} = -hF(t),$$

sondern

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{\partial(T-F)}{\partial x} + h(T-F) \right]_{x=\varepsilon} = -hF(t).$$

Bei diesen Rechnungen, muss t hinreichend gross sein, aber wenn t sehr gross ist, so geht die Temperatur der Oberfläche des Betons unter 0°C . Dabei sind die Oberflächenbedingungen nicht erfüllt. Also berechnen wir a und h aus vier Versuchen zwischen 23 und 29 Stunden nach der Mischung.

$$a_1^2 k = 8.23 \cdot 10^{-6}$$

$$k = 0.00742 \quad \text{C-G-S Einheit}$$

$$h = 0.052$$

$$K = 46.7^\circ\text{C}$$

$$a_1(30) = 1.156 \quad a_2(30) = 0.2$$

$$a_1(15) = 1.014$$

Die Kurve $T(15, t)$ ist sehr bequem um $F(t)$ zu bestimmen, weil $1 - a_1(15) \neq 0$ ist. Wir haben aus (21) und (22) eine einfache Formel;

$$F(t) - F(t_e) = T(15, t) - T(15, t_e) - 8.23 \cdot 10^{-6} \int_{t_e}^t T(15, \tau) d\tau$$

$F(t)$ ist in Fig. 2 gezeigt worden. Aus der Kurve können wir die Wärmemenge $Q(t)$ berechnen, wenn c und ρ gegeben sind, denn

$$F(t) = \int_0^t \frac{Q(\tau)}{c\rho} d\tau.$$

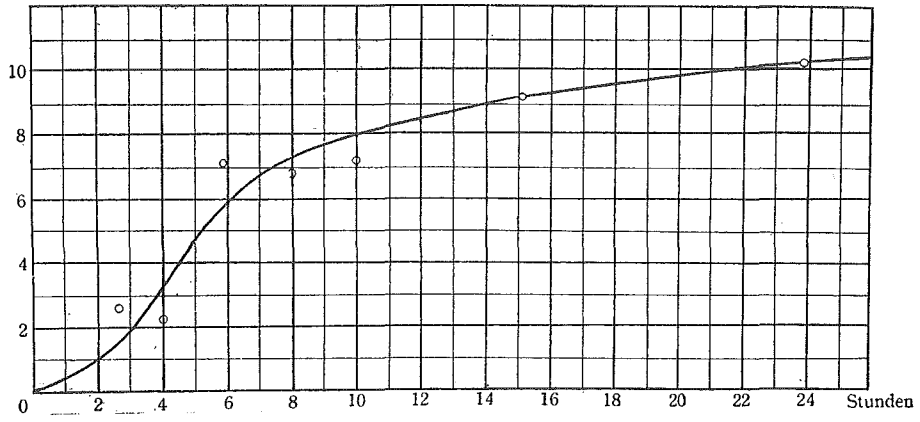


Fig. 2.