HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Die Eigenwertprobleme für die elastische rechteckige Platte
Author(s)	Iguchi, Shikazo
Citation	Memoirs of the Faculty of Engineering, Hokkaido Imperial University, 4, 305-372
Issue Date	1938
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/37716
Type	departmental bulletin paper
File Information	4_305-372.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

Die Eigenwertprobleme für die elastische rechteckige Platte.

Von

Shikazo IGUCHI.

(Eingegangen am 11. April 1938)

Einleitung.

Die rechteckige Platte bildet ein wichtiges Element zahlreicher Konstruktionen und bietet bedeutende Aufgaben ebenso für den Ingenieur wie für den Theoretiker auf dem Gebiet der Elastizitäts- und Festigkeitslehre. Wegen der Schwierigkeiten der mathematischen Behandlung und insbesondere der numerischen Berechnung ist es jedoch erst in jüngster Zeit gelungen, die strengen Lösungen sogar für die reinen Biegungsaufgaben für die Rechteckplatte, welche auf mindestens zwei benachbarten Seiten vollkommen eingespannt wird, zu ermitteln. Was weiter ihre Eigenwertprobleme betrifft, so sind die Lösungen noch nur von wenigen Forschern angegeben worden. Die Lösungen für die Plattenstreifen sowie auch für die auf mindestens zwei gegenüberliegenden Seiten frei gestützten Platten sind dagegen in den meisten Fällen nicht so schwer, und viele Forscher haben schon früher die wichtigsten Formeln nebst den Zahlenergebnissen gegeben. Da aber die bisher behandelten Probleme hauptsächlich auf Einzelfälle mit einfachen speziellen Randbedingungen beschränkt sind, so suche ich im folgenden die Behandlung noch etwas allgemeiner zu gestalten.

Zu diesem Zwecke werden zunächst einige allgemeine Gleichungen abgeleitet, welche für die Bestimmung der Grössen der verschiedenen Arten der Eigenwerte sowohl für die freien Biegungsschwingungen als auch für die Druck- und Schubknickungen der Rechteckplatte mit vor und auch nach der elastischen Deformation geradlinigen Rändern gelten. Die Platte mit einer solchen Berandung umfasst im allgemein sechs verschiedenen Fälle, wie Abb. 2 im nächsten Abschnitte zeigt, welche durch Kombinationen der zwei verschiedenen Randbedingungen (jede Seite frei gestützt oder vollkommen eingespannt) entstehen. Aus

den allgemeinen Gleichungen werden sodann Formeln für die genannten Sonderfälle abgeleitet. Die wichtigen Zahlenergebnisse für die einzelnen Fälle sind ausser in den entsprechenden Texten zur bequemen Übersicht auch in den letzten Tabellen 20 bis 22 zusammengestellt.

An dieser Stelle sei betont, dass diese Arbeit nichts anderes als eine Zusammenstellung meiner früheren Mitteilungen* (aber mit sehr vermehrten Zahlenbeispielen) über die Schwingungs- und Knickungsaufgaben für die rechteckige Platte ist und einige Abbildungen hierin aus den genannten Mitteilungen aufgenommen sind.

I. Allgemeine Erörterung.

1. Grundgleichung. Bezeichnet man mit p bzw. q die auf den zwei Seitenpaaren $x = 0$ und $x = a$ bzw. $y = 0$ und $y = b$ gleichmässig verteilten Randdruckkräfte, mit τ die in der Richtung der Ränder wirkenden Randschubkräfte, wie Abb. 1 zeigt, und mit w die Auslenkung zur Zeit t an der Stelle (x, y) der Mittelebene der Platte, so lautet bekanntlich die Bewegungsgleichung, wie folgt:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\frac{1}{N}\left(p\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2\tau\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}+q\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\gamma h}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)=0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Hierin bedeutet γ/g die Plattendichte und N die Plattensteifigkeit, d.h. $Eh^3/12(1-\nu^2)$, wenn h die Plattendicke, E der Elastizitätsmodul und ν die Querkontraktionszahl des Stoffes ist.

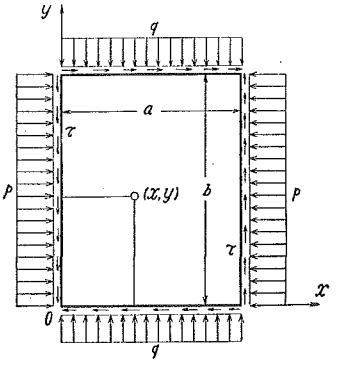


Abb. 1. Darstellung der Druck- und Schublastverteilung.

Wenn man nun mit w' eine nur von den Veränderlichen x und y abhängige Funktion, also die Eigenfunktion, mit ω die Kreisfrequenz und mit ε die Phasenverschiebung bezeichnet, so wird die Auslenkung w durch das Produkt

$$w = w' \cos(\omega t + \varepsilon) \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ausgedrückt. Setzt man (2) in (1) ein und dividiert die so ermittelte Gleichung durch $\cos(\omega t+\varepsilon)$, so erhält man

* **S. Iguchi,** Ing.-Arch. Berlin **7** (1936) S. 207; **8** (1937) S. 11; **9** (1938) S. 1.

$$\frac{\partial^4 w'}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w'}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w'}{\partial y^4}+\frac{1}{N}\left(p\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2}+2\tau\frac{\partial^2 w'}{\partial x\partial y}+q\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2}-\frac{\gamma h\omega^2}{g}w'\right)=0\,, \quad (3)$$

woraus man die Eigenfunktion w' für den betrachteten Fall zu finden hat. Die Gestalt der w'-Fläche hängt offenbar von den Grössen der Parameter ω, p, q und τ ab. Gemäss der Lehre des Eigenwertproblems soll der Wert von irgendeinem Parameter—Eigenwert—mit den gegebenen Werten von den anderen drei so bestimmt werden, dass die Differentialgleichung (3) unter den vorgegebenen Randbedingungen nicht identisch verschwindende Lösungen besitzt. Die eingehenden Rechenverfahren werden genau bei den Lösungen für die Sonderfälle in den kommenden Abschnitten angegeben.

2. Die Voraussetzung der Gleichung für w' und die Randbedingungen der Platte. Um die Lösung der Gleichung (3) für eine durch Abb. 1 dargestellte Rechteckplatte mit den Seitenlängen a und b zu ermitteln, stellen wir zuerst fest, dass die Eigenfunktion durch den Ansatz

$$\left.\begin{aligned} w' &= \sum_m\sum_n A_{mn}X_mY_n \\ &= \sum_m\sum_n A_{mn}\left[\frac{c_m}{3}\left(\frac{x^3}{a^3}-\frac{x}{a}\right)-\frac{c'_m}{3}\left(\frac{x^3}{a^3}-\frac{3x^2}{a^2}+\frac{2x}{a}\right)+\frac{1}{m\pi}\sin\frac{m\pi}{a}x\right]\times \\ &\quad\times\left[\frac{d_n}{3}\left(\frac{y^3}{b^3}-\frac{y}{b}\right)-\frac{d'_n}{3}\left(\frac{y^3}{b^3}-\frac{3y^2}{b^2}+\frac{2y}{b}\right)+\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{b}y\right] \\ &\qquad\qquad (m,\,n=1,\,2,\,3,\,\ldots) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

dargestellt wird, wenn man sich darauf beschränkt, dass die vier Ränder der Platte vor und auch nach ihrer Formänderung geradlinig gehalten werden. Die Beiwerte c_m, c'_m, d_n und d'_n können vollends leicht so bestimmt werden, dass die Randbedingungen der Platte befriedigt werden, welche darin bestehen, dass das Biegungsmoment längs des frei gestützten Randes und die Neigung der elastischen Mittelfläche längs des vollkommen eingespannten verschwindet. Vermöge der Beziehungen

$$\frac{\partial w'}{\partial x}=\sum_m\sum_n A_{mn}Y_n\frac{dX_m}{dx}\,, \qquad \frac{\partial w'}{\partial y}=\sum_m\sum_n A_{mn}X_m\frac{dY_n}{dy}\,,$$

$$m_x=-N\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2}\right)=-N\sum_m\sum_n A_{mn}\left(Y_n\frac{d^2X_m}{dx^2}+\nu X_m\frac{d^2Y_n}{dy^2}\right),$$

$$m_y=-N\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2}\right)=-N\sum_m\sum_n A_{mn}\left(X_m\frac{d^2Y_n}{dy^2}+\nu Y_n\frac{d^2X_m}{dx^2}\right)$$

erhält man folgende Werte für c_m, c'_m, d_n und d'_n, welche den durch Abb. 2 dargestellten sechs Fällen entsprechen.

	c_m	c'_m	d_n	d'_n	
I	0	0	0	0	(5a)
II	0	$\frac{3}{2}$	0	0	(5b)
III	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	(5c)
IV	$-1-2(-1)^m$	$2+(-1)^m$	0	0	(5d)
V	0	$\frac{3}{2}$	$-1-2(-1)^n$	$2+(-1)^n$	(5e)
VI	$-1-2(-1)^m$	$2+(-1)^m$	$-1-2(-1)^n$	$2+(-1)^n$	(5f)

frei gestützte Seite
Vollkommen eingespannte Seite

Abb. 2. Schematische Darstellung der Randbedingung.

3. Der Zusammenhang zwischen der Ausbiegungsgestalt der Platte und den Zeigern m und n. Ehe wir weiter zur Ermittelung der Gleichung für den unbekannten Beiwert A_{mn} übergehen, müssen wir untersuchen, in welchem Zusammenhang die Biegungsgestalt der Platte mit den Zeigern m in X_m und n in Y_n steht.

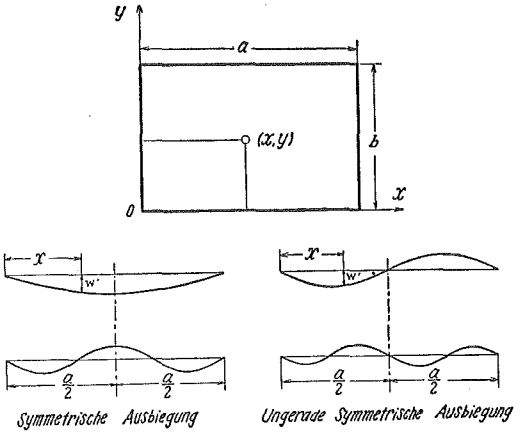


Abb. 3. Zwei Arten der elastischen Linie in der x-Richtung.

Es ist leicht verständlich, dass die elastische Fläche der Platte von konstanter Dichte, deren zwei gegenüberliegende Ränder, z.B. $x = 0$ und $x = a$ unter ungleichen Randbedingungen stehen, sich weder symmetrisch noch ungerade symmetrisch in der x-Richtung gestaltet, obwohl die Wirkung der äusseren Kräfte geometrisch symmetrisch oder ungerade symmetrisch in derselben Richtung ist. Hierbei hat

der Zeiger m ganz unbedingt die natürlichen Zahlen 1, 2, 3.... anzunehmen. Wenn dagegen die zwei gegenüberliegenden Ränder $x = 0$ und $x = a$ unter gleichen Randbedingungen stehen, so kann die Ausbiegung entweder symmetrisch oder ungerade symmetrisch in bezug auf die zur x-Achse senkrechte Mittellinie ($x = a/2$) des Rechtecks sein, je nachdem die Platte symmetrisch oder ungerade symmetrisch in bezug auf die gleiche Mittellinie beansprucht wird. Das mathematische Erfordernis hierzu lautet

$$| w' |_{\frac{x}{a}} = \pm | w' |_{1-\frac{x}{a}}$$

oder aus (4)

$$| X_m |_{\frac{x}{a}} \mp | X_m |_{1-\frac{x}{a}}$$
$$= \frac{1}{3}(c_m \mp c'_m)\left(\frac{x^3}{a^3} - \frac{x}{a}\right) - \frac{1}{3}(c'_m \mp c_m)\left(\frac{x^3}{a^3} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{2x}{a}\right)$$
$$+ \frac{1 \pm (-1)^m}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{a} x = 0 .$$

In dieser Gleichung entsprechen die oberen bzw. unteren Vorzeichen der symmetrischen bzw. ungerade symmetrischen Ausbiegung. Für die frei aufliegenden Ränder ergibt sich aus (5a)

$$c_m \mp c'_m = c'_m \mp c_m = 0 ;$$

für die vollkommen eingespannten aus (5d) oder (5f)

$$c_m \mp c'_m = \begin{cases} -3(1+(-1)^m) , \\ 1-(-1)^m , \end{cases}$$

$$c'_m \mp c_m = \begin{cases} 3(1+(-1)^m) , \\ 1-(-1)^m . \end{cases}$$

Somit erhält man die Beziehung

$$1 \pm (-1)^m = 0$$

für die beiden betreffenden Randbedingungen. Dies stellt dar, dass der Zeiger m die ungeraden Zahlen 1, 3, 5... oder die geraden 2, 4, 6... annehmen muss, je nachdem die Mittelfläche der Platte sich symmetrisch oder ungerade symmetrisch in bezug auf die Mittellinie $x = a/2$ gestaltet. Die analogen Beziehungen gelten auch für den anderen

Zeiger n, von dem die Ausbiegungsgestalt der Mittelfläche der Platte in der y-Richtung abhängig ist.

Die Berücksichtigung der oden erwähnten Zusammenhänge zwischen den Zeigern (m, n) und den Gestalten der elastischen Mittelfläche sind bei den Untersuchungen sowohl der Eigenschwingungsfälle als auch der Druckknickungsfälle nötig. Wenn es sich aber darum handelt, dass die Platte durch die auf ihren vier Rändern gleichmässig verteilten Schubkräfte ausknickt (Abb. 1), so sind die Verhältnisse etwas andres. Hierbei soll die Ausknickungsgestalt in der Richtung jeder Diagonale $y/b = x/a$ und $y/b = 1-x/a$ anstatt der Mittellinien $x/a = 1/2$ und $y/b = 1/2$ betrachtet werden. Durch ein ähnliches Rechenverfahren wie vorhin kann man beweisen, dass für die symmetrische bzw. ungerade symmetrische Ausknickung der Diagonale die Beziehungen*

$$m+n = \text{gerade } (2, 4, 6 \ldots)$$

bzw.

$$m+n = \text{ungerade } (1, 3, 5 \ldots)$$

gelten, wenn jedes Paar von gegenüberliegenden Seiten des Rechtecks unter gleichen Randbedingungen steht.

4. Allgemeine Lösung. Es handelt sich jetzt darum, den unbekannten Beiwert A_{mn} zweckmässig so zu bestimmen, dass w' (4) der Differentialgleichung (3) genügt. Setzt man zu diesem Zwecke den Ausdruck (4) in die Gleichung (3) ein, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$\sum_m \sum_n A_{mn} f(m, n) \sin\frac{m\pi}{a}x \sin\frac{n\pi}{b}y + \sum_m \sum_s A_{ms} f_1\left(m, s, \frac{y}{b}\right) \sin\frac{m\pi}{a}x$$

$$+ \sum_r \sum_n A_{rn} f_2\left(r, n, \frac{x}{a}\right) \sin\frac{n\pi}{b}y + \sum_r \sum_s A_{rs} f_3\left(r, s, \frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) = 0 .$$

Hierbei muss man beachten, dass die Zeiger r bzw. s in dieser Gleichung an Stelle der Zeiger m bzw. n geschrieben sind, wenn sie (m, n) in den nicht mit $\sin\frac{m\pi}{a}x$ bzw. $\sin\frac{n\pi}{b}y$ behafteten Gliedern enthalten sind, damit man Verwechslungen bei den weiteren Berechnungen vermeidet. Entwickelt man nun die Funktionen f_1, f_2 bzw. f_3 in Fouriersche Reihen nach $\sin\frac{n\pi}{b}y$, $\sin\frac{m\pi}{a}x$ bzw. $\sin\frac{m\pi}{a}x \times \sin\frac{n\pi}{b}y$, so entsteht formal die Beziehung

* **S. Iguchi,** Ing.-Arch. Berlin **9** (1938) S. 5.

$$\sum_m \sum_n a_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y = 0 .$$

Da diese Gleichung für jeden Wert von x und y erfüllt sein soll, so müssen alle Koeffizienten verschwinden. Also wird

$$a_{mn} = 0 .$$

Die wirkliche Durchrechnung liefert folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
&A_{mn}\left(m^4+\frac{2a^2}{b^2}m^2n^2+\frac{a^4}{b^4}n^4-\mu^2-m^2P-\frac{a^4}{b^4}n^2Q\right)\\
&+\frac{4}{m^2\pi^2}\left(\frac{2a^2}{b^2}m^2n^2+\frac{a^4}{b^4}n^4-\mu^2-m^2P-\frac{a^4}{b^4}n^2Q\right)\sum_r A_{rn}((-1)^m c_r - c_r')\\
&+\frac{4}{n^2\pi^2}\left(m^4+\frac{2a^2}{b^2}m^2n^2-\mu^2-m^2P-\frac{a^4}{b^4}n^2Q\right)\sum_s A_{ms}((-1)^n d_s - d_s')\\
&+\frac{16}{m^2n^2\pi^4}\left(\frac{2a^2}{b^2}m^2n^2-\mu^2-m^2P-\frac{a^4}{b^4}n^2Q\right)\sum_r\sum_s A_{rs}((-1)^m c_r - c_r')\times\\
&((-1)^n d_s - d_s')+\frac{8aT}{\pi^2 b}\sum_r\sum_s K_{mnrs}A_{rs}=0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)
\end{aligned}$$

mit den dimensionslosen Grössen

$$\left.\begin{aligned}
&\mu=\frac{\omega a^2}{\pi^2}\sqrt{\frac{\gamma h}{gN}}, \qquad T=\frac{\tau a^2}{N\pi^2},\\
&P=\frac{pa^2}{N\pi^2}, \qquad Q=\frac{qb^2}{N\pi^2},\\
&K_{mnrs}=m^2n^2\frac{1-(-1)^{m+r}}{m^2-r^2}\frac{1-(-1)^{n+s}}{n^2-s^2}\\
&-n^2\left[\frac{2+(-1)^m}{3}-2\frac{1-(-1)^m}{m^2\pi^2}\right]((-1)^m c_r + c_r')\frac{1-(-1)^{n+s}}{n^2-s^2}\\
&-m^2\left[\frac{2+(-1)^n}{3}-2\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}\right]((-1)^n d_s + d_s')\frac{1-(-1)^{m+r}}{m^2-r^2}\\
&+\left[\frac{2+(-1)^m}{3}-2\frac{1-(-1)^m}{m^2\pi^2}\right]\left[\frac{2+(-1)^n}{3}-2\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}\right]\times\\
&\times((-1)^m c_r + c_r')((-1)^n d_s + d_s') .
\end{aligned}\right\} \ldots (7)$$

Wenn man ferner zur Abkürzung setzt

$$\left.\begin{aligned}
&\rho_{mn}=\left(m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\right)^2-\mu^2-m^2P-\frac{a^4}{b^4}n^2Q=(m^2+\lambda_n^2)(m^2+\lambda_n'^2)\,,\\
&\left.\begin{matrix}\lambda_n^2\\ \lambda_n'^2\end{matrix}\right\}=\frac{a^2}{b^2}n^2-\frac{P}{2}\pm\sqrt{\frac{P^2}{4}-\frac{a^2}{b^2}n^2P+\frac{a^4}{b^4}n^2Q+\mu^2}\,,
\end{aligned}\right\}\ldots\ (8a)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\rho'_{mn}=\frac{b^4}{a^4}\rho_{mn}=\left(n^2+\frac{b^2}{a^2}m^2\right)^2-\frac{b^4}{a^4}\mu^2-\frac{b^4}{a^4}m^2P-n^2Q\\
&\quad=(n^2+\lambda_m^2)(n^2+\lambda_m'^2)\,,\\
&\left.\begin{matrix}\lambda_m^2\\ \lambda_m'^2\end{matrix}\right\}=\frac{b^2}{a^2}m^2-\frac{Q}{2}\pm\sqrt{\frac{Q^2}{4}-\frac{b^2}{a^2}m^2Q+\frac{b^4}{a^4}m^2P+\frac{b^4}{a^4}\mu^2}\,,
\end{aligned}\right\}\ldots\ (8b)$$

$$\left.\begin{aligned}
&A_n=\frac{4}{n^2\pi^2}\sum_r\sum_s A_{rs}(c_r+c_r')\left\{(-1)^n d_s-d_s'\right\}+\sum_r A_{rn}(c_r+c_r')\,,\\
&A_n'=\frac{4}{n^2\pi^2}\sum_r\sum_s A_{rs}(c_r'-c_r)\left\{(-1)^n d_s-d_s'\right\}+\sum_r A_{rn}(c_r'-c_r)\,,\\
&B_m=\frac{4}{m^2\pi^2}\sum_r\sum_s A_{rs}(d_s+d_s')\left\{(-1)^m c_r-c_r'\right\}+\sum_s A_{ms}(d_s+d_s')\,,\\
&B_m'=\frac{4}{m^2\pi^2}\sum_r\sum_s A_{rs}(d_s'-d_s)\left\{(-1)^m c_r-c_r'\right\}+\sum_s A_{ms}(d_s'-d_s)\,,
\end{aligned}\right\}\ldots\ (9)$$

$$\begin{aligned}
\theta_{mn}=A_{mn}&+\frac{4}{m^2\pi^2}\sum_r A_{rn}((-1)^m c_r-c_r')+\frac{4}{n^2\pi^2}\sum_s A_{ms}((-1)^n d_s-d_s')\\
&+\frac{16}{m^2n^2\pi^4}\sum_r\sum_s A_{rs}((-1)^m c_r-c_r')((-1)^n d_s-d_s')\,,\quad\ldots\ldots\ldots\ (10)
\end{aligned}$$

so geht die Gleichung (6) über in

$$\begin{aligned}
&\theta_{mn}+\frac{2m^2}{\pi^2\rho_{mn}}\left\{(1-(-1)^m)A_n+(1+(-1)^m)A_n'\right\}\\
&\quad+\frac{2n^2}{\pi^2\rho'_{mn}}\left\{(1-(-1)^n)B_m+(1+(-1)^n)B_m'\right\}\\
&\quad+\frac{8aT}{\pi^2 b\rho_{mn}}\sum_r\sum_s K_{mnrs}A_{rs}=0\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ (11)
\end{aligned}$$

Diese Formel ist die gesuchte Grundgleichung für den unbekannten Beiwert A_{mn}, mit welchem der Ansatz (4) der Differentialgleichung (3) genügt, und die Werte jeder der vier Unbekannten μ, P, Q und T für die gegeben Werte der übrigen drei können durch geeignete Lösung derselben Gleichung ausgerechnet werden, wenn die Randbedingungen

der Platte, dementsprechend die Werte von c_m, c'_m, d_n und d'_n gegeben werden. Die Methoden der diesbezüglichen weiteren Lösung für die verschiedenen Sonderfälle werden in den kommenden Abschnitten angegeben. Es ist bemerkenswert, dass die Gleichung (6) auch mit Hilfe der Energiemethode abgeleitet werden kann. Der Beweiss dafür wird aber hier unterdrückt.

Zur bequemen Ausführung der weiteren Berechnungen wollen wir die Formel (11) noch einmal umformen. Berücksichtigt man die Formeln

$$\sum_r \frac{(-1)^r}{r^2\pi^2} = -\frac{1}{12} \qquad \text{und} \qquad \sum_r \frac{1}{r^2\pi^2} = \frac{1}{6},$$

so erhält man

$$\sum_m \theta_{mn} = \sum_r \theta_{rn} = \sum_r A_{rn}\left(1-\frac{c_r+2c'_r}{3}\right) + \frac{4}{n^2\pi^2}\sum_r\sum_s A_{rs}\left(1-\frac{c_r+2c'_r}{3}\right)((-1)^n d_s - d'_s).$$

Aus den Formeln (5b) bis (5f) sieht man aber, dass für die Platte, deren zwei gegenüberliegende Seiten $x=0$ und $x=a$ nicht frei gestützt werden, stets gilt

$$c_r+2c'_r = 3.$$

Folglich ergibt sich

$$\sum_r \theta_{rn} = 0.$$

Analog

$$\sum_r (-1)^r \theta_{rn} = 0.$$

Somit liefern die Summen $\sum_{m=1}^{\infty}(=\sum_{r=1}^{\infty})$ der aus der Multiplikation der Gleichung (11) mit 1 bzw. $(-1)^m$ hervorgehenden zwei unendlichen Reihen die Beziehung

$$2\left[(A_n+A'_n)\sum_r \frac{\eta^2}{\pi^2\rho_{rn}} - (A_n-A'_n)\sum_r \frac{(-1)^r\eta^2}{\pi^2\rho_{rn}}\right] + \frac{2n^2}{\pi^2}\left[(1-(-1)^n)\sum_r \frac{B_r}{\rho'_{rn}} + (1+(-1)^n)\sum_r \frac{B'_r}{\rho'_{rn}}\right] + \frac{8aT}{\pi^2 b}\sum_r \frac{1}{\rho_{rn}}\left(\sum_{r'}\sum_s K_{rnr's}A_{r's}\right) = 0$$

bzw.

$$2\Big[(A_n+A_n')\sum_r\frac{(-1)^r r^2}{\pi^2\rho_{rn}}-(A_n-A_n')\sum_r\frac{r^2}{\pi^2\rho_{rn}}\Big]$$
$$+\frac{2n^2}{\pi^2}\Big[(1-(-1)^n)\sum_r\frac{(-1)^r B_r}{\rho'_{rn}}+(1+(-1)^n)\sum_r\frac{(-1)^r B'_r}{\rho'_{rn}}\Big]$$
$$+\frac{8aT}{\pi^2 b}\sum_r\frac{(-1)^r}{\rho_{rn}}\Big(\sum_{r'}\sum_s K_{rnr's}A_{r's}\Big)=0\,.$$

Mit Rücksicht auf die Formeln*

$$\sum\frac{r^2}{\pi^2\rho_{rn}}\frac{(-1)^{2r}}{(-1)^r}=\frac{1}{2\pi(\lambda_n^2-\lambda_n'^2)}\begin{Bmatrix}\lambda_n\,\mathfrak{Ctg}\,\pi\lambda_n-\lambda_n'\,\mathfrak{Ctg}\,\pi\lambda_n'\\ \lambda_n\,\mathfrak{Cofec}\,\pi\lambda_n-\lambda_n'\,\mathfrak{Cofec}\,\pi\lambda_n'\end{Bmatrix}\ldots\ (12)$$

$r=1,\ 2,\ 3\ \ldots$

erhält man also

$$(A_n+A_n')I_n-(A_n-A_n')J_n+\frac{2n^2(\lambda_n^2-\lambda_n'^2)}{\pi}\sum_r\frac{1}{\rho'_{rn}}\Big[B_r+B_r'-(-1)^n(B_r-B_r')\Big]$$
$$+\frac{8aT(\lambda_n^2-\lambda_n'^2)}{\pi b}\sum_r\frac{1}{\rho_{rn}}\Big(\sum_{r'}\sum_s K_{rnr's}A_{r's}\Big)=0,\ \ldots\ldots\ (13a)$$

$$(A_n+A_n')J_n-(A_n-A_n')I_n+\frac{2n^2(\lambda_n^2-\lambda_n'^2)}{\pi}\sum_r\frac{(-1)^r}{\rho'_{rn}}\Big[B_r+B_r'-(-1)^n(B_r-B_r')\Big]$$
$$+\frac{8aT(\lambda_n^2-\lambda_n'^2)}{\pi b}\sum_r\frac{(-1)^r}{\rho_{rn}}\Big(\sum_{r'}\sum_s K_{rnr's}A_{r's}\Big)=0\ \ldots\ldots\ (13b)$$

mit

$$I_n=\lambda_n\,\mathfrak{Ctg}\,\pi\lambda_n-\lambda_n'\,\mathfrak{Ctg}\,\pi\lambda_n'\,,\ \ldots\ldots\ (14a)$$
$$J_n=\lambda_n\,\mathfrak{Cofec}\,\pi\lambda_n-\lambda_n'\,\mathfrak{Cofec}\,\pi\lambda_n'\,.\ \ldots\ldots\ (14b)$$

Die obigen zwei Gleichungen (13a) und (13b) gelten stets für die ganzen Zahlen 1, 2. 3... von r und sind daher auf die Platte anwendbar, deren Mittelfläche sich unsymmetrisch in der x-Richtung gestaltet. Ihre Differenz bzw. Summe liefert ferner

---

* **S. Iguchi,** Eine Lösung für die Berechnung der biegsamen rechteckigen Platten S. 15 bis 19. Berlin 1933.

$$G_nA_n+\frac{n^2(\lambda_n^2-\lambda_n'^2)}{\pi}\sum_r\frac{1-(-1)^r}{\rho'_{rn}}\Big[B_r+B'_r-(-1)^n(B_r-B'_r)\Big]$$
$$+\frac{4aT(\lambda_n^2-\lambda_n'^2)}{\pi b}\sum_r\frac{1-(-1)^r}{\rho_{rn}}\Big(\sum_{r'}\sum_s K_{rnr's}A_{r's}\Big)=0 \quad \ldots\ldots \quad (15a)$$

bzw.

$$H_nA'_n+\frac{n^2(\lambda_n^2-\lambda_n'^2)}{\pi}\sum_r\frac{1+(-1)^r}{\rho'_{rn}}\Big[B_r+B'_r-(-1)^n(B_r-B'_r)\Big]$$
$$+\frac{4aT(\lambda_n^2-\lambda_n'^2)}{\pi b}\sum_r\frac{1+(-1)^r}{\rho_{rn}}\Big(\sum_{r'}\sum_s K_{rnr's}A_{r's}\Big)=0 \quad \ldots\ldots \quad (15b)$$

mit

$$G_n(=I_n-J_n)=\lambda_n\,\mathfrak{Tg}\frac{\pi}{2}\lambda_n-\lambda'_n\,\mathfrak{Tg}\frac{\pi}{2}\lambda'_n\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16a)$$

$$H_n(=I_n+J_n)=\lambda_n\,\mathfrak{Ctg}\frac{\pi}{2}\lambda_n-\lambda'_n\,\mathfrak{Ctg}\frac{\pi}{2}\lambda'_n\,. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16b)$$

Da die mit $1-(-1)^r$ behafteten Glieder in (15a) ausser für ungerade Werte von r verschwinden, so gilt sie nur für die Platte, deren Mittelfläche sich symmetrisch in der x-Richtung gestaltet. Analog gilt die Gleichung (15b) für die ungerade symmetrische Ausbiegung in derselben Richtung.

Durch analoge Summierung der Gleichung (11) in bezug auf den Zeiger $n(=s)$ erhält man folgende Formeln

1) für $n(=s)=1, 2, 3\ldots$, nämlich für die unsymmetrische Ausbiegung in der y-Richtung:

$$(B_m+B'_m)I_m-(B_m-B'_m)J_m+\frac{2m^2(\lambda_m^2-\lambda_m'^2)}{\pi}\sum_s\frac{1}{\rho_{ms}}\Big[A_s+A'_s-(-1)^m(A_s-A'_s)\Big]$$
$$+\frac{8aT(\lambda_m^2-\lambda_m'^2)}{\pi b}\sum_s\frac{1}{\rho_{ms}}\Big(\sum_r\sum_{s'}K_{msrs'}A_{rs'}\Big)=0\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17a)$$

$$(B_m+B'_m)J_m-(B_m-B'_m)I_m$$
$$+\frac{2m^2(\lambda_m^2-\lambda_m'^2)}{\pi}\sum_s\frac{(-1)^s}{\rho_{ms}}\Big[A_s+A'_s-(-1)^m(A_s-A'_s)\Big]$$
$$+\frac{8aT(\lambda_m^2-\lambda_m'^2)}{\pi b}\sum_s\frac{(-1)^s}{\rho_{ms}}\Big(\sum_r\sum_{s'}K_{msrs'}A_{rs'}\Big)=0 \quad \ldots\ldots \quad (17b)$$

mit

$$I_m = \lambda_m \operatorname{Ctg} \pi i_m - \lambda'_m \operatorname{Ctg} \pi \lambda'_m , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18a)$$

$$J_m = \lambda_m \operatorname{Cosec} \pi \lambda_m - \lambda'_m \operatorname{Cosec} \pi \lambda'_m ; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18b)$$

2) für $n(=s) = 1, 3, 5\ldots$, nämlich für die symmetrische Ausbieguug in der y-Richtung:

$$G_m B_m + \frac{m^2(\lambda_m^2 - \lambda_m'^2)}{\pi} \sum_s \frac{1-(-1)^s}{\rho_{ms}} \left[A_s + A'_s - (-1)^m (A_s - A'_s) \right]$$
$$+ \frac{4aT(\lambda_m^2 - \lambda_m'^2)}{\pi b} \sum_s \frac{1-(-1)^s}{\rho_{ms}} \left(\sum_r \sum_{s'} K_{msrs'} A_{rs'} \right) = 0 \ldots \quad (19a)$$

mit

$$G_m (= I_m - J_m) = \lambda_m \operatorname{Tg} \frac{\pi}{2} \lambda_m - \lambda'_m \operatorname{Tg} \frac{\pi}{2} \lambda'_m ; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19b)$$

3) für $n(=s) = 2, 4, 6\ldots$, nämlich für die ungerade symmetrische Ausbiegung in der y-Richtung:

$$H_m B'_m + \frac{m^2(\lambda_m^2 - \lambda_m'^2)}{\pi} \sum_s \frac{1+(-1)^s}{\rho_{ms}} \left[A_s + A'_s - (-1)^m (A_s - A'_s) \right]$$
$$+ \frac{4aT(\lambda_m^2 - \lambda_m'^2)}{\pi b} \sum_s \frac{1+(-1)^s}{\rho_{ms}} \left(\sum_r \sum_{s'} K_{msrs'} A_{rs'} \right) = 0 \ldots \quad (20a)$$

mit

$$H_m (= I_m + J_m) = \lambda_m \operatorname{Ctg} \frac{\pi}{2} \lambda_m - \lambda'_m \operatorname{Ctg} \frac{\pi}{2} \lambda'_m . \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20b)$$

Bei den numerischen Berechnungen hat man darauf zu achten, dass

a) für $\lambda_n =$ imaginär, also für $\lambda_n = i\theta$ gilt

$$\begin{matrix} \cdot \\ \lambda_n \end{matrix} \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{Tg} \frac{\pi}{2} \lambda_n \\ \operatorname{Ctg} \frac{\pi}{2} \lambda_n \end{array} \right\} = \mp \theta \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \theta \\ \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} \theta \end{array} \right\} ; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

b) für λ_n^2, $\lambda'^2_n =$ komplex, also für $\left.\begin{matrix} \lambda_n \\ \lambda'_n \end{matrix}\right\} = \sqrt{A \pm iB}$ gilt

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{matrix} G_n \\ H_n \end{matrix}\right\} = 2i \frac{\beta \operatorname{Sin} \pi\alpha \pm \alpha \sin \pi\beta}{\operatorname{Cof} \pi\alpha \pm \cos \pi\beta} , \\ \left.\begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{A^2+B^2} \pm A)} . \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Es ist nun interessant und zugleich auch notwendig, die durch (4) dargestellte Eigenfunktion w' so umzuformen, dass sie die Beiwerte A_n, A'_n, B_m und B'_m enthält. Wenn man zu diesem Zwecke den Ausdruck (4) in eine Fouriersche Doppelreihe nach $\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$ entwickelt, so erhält man

$$w' = \sum_m\sum_n \frac{1}{mn\pi^2}\Big[A_{mn}+\frac{4}{m^2\pi^2}\sum_r A_{rn}((-1)^m c_r - c'_r)+\frac{4}{n^2\pi^2}\sum_s A_{ms}((-1)^n d_s - d'_s)$$

$$+\frac{16}{m^2n^2\pi^4}\sum_r\sum_s A_{rs}((-1)^m c_r - c'_r)((-1)^n d_s - d'_s)\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\,,$$

oder einfacher

$$w' = \sum_m\sum_n \frac{\theta_{mn}}{mn\pi^2}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\,. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Somit folgt aus (11)

$$w' = -\frac{2}{\pi^4}\sum_m\sum_n\Big\{\frac{m}{n\rho_{mn}}\Big[(1-(-1)^m)A_n+(1+(-1)^m)A'_n\Big]$$

$$+\frac{n}{m\rho'_{mn}}\Big[(1-(-1)^n)B_m+(1+(-1)^n)B'_m\Big]$$

$$+\frac{4aT}{bmn\rho_{mn}}\sum_r\sum_s K_{mnrs}A_{rs}\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\,. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Die die Beiwerte A_n und A'_n bzw. B_m und B'_m enthaltenden Glieder in dieser Gleichung sind als die sich auf den Zeiger m bzw. n beziehenden unendlichen Reihen summierbar. So vermöge der Beziehungen*

---

* **S. Iguchi,** Eine Lösung für die Berechnung der biegsamen rechteckigen Platten S. 15 bis 19, Berlin 1933. In dieser Broschüre sind die wichtigsten Formeln für die Summen der unendlichen Reihen von den Formen

$$\sum_m \frac{(m\pi)^{2k+1}}{\pi^4(m^2+\lambda_n^2)(m^2+\lambda_n'^2)}\,\frac{(-1)^{2m}}{(-1)^m}\sin\frac{m\pi}{a}x \qquad (m=1,2,3\ldots)$$

bzw.

$$\sum_m \frac{(m\pi)^{2k}}{\pi^4(m^2+\lambda_n^2)(m^2+\lambda_n'^2)}\,\frac{(-1)^{2m}}{(-1)^m}\cos\frac{m\pi}{a}x$$

angegeben, worin der Zeiger k die Werte 1, 0, −1 und −2 hat.

$$\sum_{m=1,2,3\ldots} \frac{m(1-(-1)^m)}{\rho_{mn}} \sin\frac{m\pi}{a}x$$

$$= -\frac{\pi}{2(\lambda_n^2-\lambda_n'^2)}\left[\frac{\mathfrak{Cof}\,\pi\lambda_n\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{a}\right)}{\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{2}\lambda_n} - \frac{\mathfrak{Cof}\,\pi\lambda_n'\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{a}\right)}{\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{2}\lambda_n'}\right], \quad \ldots\ldots \text{(25a)}$$

$$\sum_{m=1,2,3\ldots} \frac{m(1+(-1)^m)}{\rho_{mn}} \sin\frac{m\pi}{a}x$$

$$= -\frac{\pi}{2(\lambda_n^2-\lambda_n'^2)}\left[\frac{\mathfrak{Sin}\,\pi\lambda_n\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{a}\right)}{\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{2}\lambda_n} - \frac{\mathfrak{Sin}\,\pi\lambda_n'\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{a}\right)}{\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{2}\lambda_n'}\right] \quad \ldots\ldots \text{(25b)}$$

geht (24) über in

$$\begin{aligned} w' = &\sum_n \frac{1}{n\pi^3(\lambda_n^2-\lambda_n'^2)}\left[A_n u_n\left(\frac{x}{a}\right)+A_n' v_n\left(\frac{x}{a}\right)\right]\sin\frac{n\pi}{b}y \\ &+\sum_m \frac{1}{m\pi^3(\lambda_m^2-\lambda_m'^2)}\left[B_m u_m\left(\frac{y}{b}\right)+B_m' v_m\left(\frac{y}{b}\right)\right]\sin\frac{m\pi}{a}x \\ &-\frac{8aT}{b\pi^4}\sum_m\sum_n \frac{1}{mn\rho_{mn}}\left(\sum_r\sum_s K_{mnrs}A_{rs}\right)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y \end{aligned}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(26)}$$

mit

$$u_n\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{\mathfrak{Cof}\,\pi\lambda_n\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{a}\right)}{\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{2}\lambda_n} - \frac{\mathfrak{Cof}\,\pi\lambda_n'\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{a}\right)}{\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{2}\lambda_n'}, \quad \ldots\ldots\ldots \text{(27a)}$$

$$v_n\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{\mathfrak{Sin}\,\pi\lambda_n\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{a}\right)}{\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{2}\lambda_n} - \frac{\mathfrak{Sin}\,\pi\lambda_n'\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{a}\right)}{\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{2}\lambda_n'}, \quad \ldots\ldots\ldots \text{(27b)}$$

$$u_m\left(\frac{y}{b}\right) = \frac{\mathfrak{Cof}\,\pi\lambda_m\left(\frac{1}{2}-\frac{y}{b}\right)}{\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{2}\lambda_m} - \frac{\mathfrak{Cof}\,\pi\lambda'_m\left(\frac{1}{2}-\frac{y}{b}\right)}{\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{2}\lambda'_m}\,, \quad \ldots\ldots\ldots \text{(27c)}$$

$$v_m\left(\frac{y}{b}\right) = \frac{\mathfrak{Sin}\,\pi\lambda_m\left(\frac{1}{2}-\frac{y}{b}\right)}{\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{2}\lambda_m} - \frac{\mathfrak{Sin}\,\pi\lambda'_m\left(\frac{1}{2}-\frac{y}{b}\right)}{\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{2}\lambda'_m}\,. \quad \ldots\ldots\ldots \text{(27d)}$$

Die Gleichung (26) genügt natürlich mit dem Ansatz (2) nicht nur der Differentialgleichung (1) sondern auch allen Grenzbedingungen der Platte, wenn für die Beiwerte A_n, A'_n, B_m und B'_m die Beziehungen (13a), (13b), (17a) und (17b) oder (15a), (15b), (19a) und (20a) gelten. In der Tat stellen diese Formeln die Bedingungsgleichungen dafür dar, dass die aus der Differentiation der Gleichung (26) hervorgehenden Grössen $\partial w'/\partial x$ bzw. $\partial w'/\partial y$ längs der eingespannten Ränder des Rechtecks gleich Null werden. Diese Tatsache erkennt man auch deswegen als ganz natürlich, weil die Beziehungen

$$\sum_r \theta_{rn} = \sum_r (-1)^r \theta_{rn} = \sum_s \theta_{ms} = \sum_s (-1)^s \theta_{ms} = 0\,,$$

welche der Ableitung der Formeln (13a) bis (20a) durch die Elimination von θ_{mn} aus (11) zugrunde liegen, die Bedingungsgleichungen darstellen, dass die Neigung auf den Grenzen $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ und $y = b$ der durch (23) dargestellten elastischen Mittelfläche verschwindet.

II. Die Biegungsschwingung.

1. Allgemeines. Als das erste Anwendungsbeispiel der im vorigen Abschnitte ermittelten allgemeinen Gleichungen wollen wir uns jetzt mit den freien Biegungsschwingungen der Platte ohne äussere Kraft beschäftigen.

Da die Kreisfrequenz, die Schwingungsfrequenz bzw. -dauer der Platte durch

$$\omega = \frac{\pi^2\mu}{a^2}\sqrt{\frac{gN}{\gamma h}}\,, \qquad f = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{bzw.} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

ausgedrückt wird, so besteht die Hauptaufgabe des betreffenden Problems darin, die zu Platten mit verschiedenen speziellen Randbedingungen gehörenden Werte von μ auszurechnen. Die allgemeinen

Formeln hierfür können natürlich unmittelbar aus den vorher ermittelten Formeln abgeleitet werden, wenn man nur P, Q und T in ihnen gleich Null setzt. So erhält man aus (11)

$$\theta_{mn}+\frac{2m^2}{\pi^2\rho_{mn}}\Big[(1-(-1)^m)A_n+(1+(-1)^m)A'_n\Big]$$
$$+\frac{2n^2}{\pi^2\rho'_{mn}}\Big[(1-(-1)^n)B_m+(1+(-1)^n)B'_m\Big]=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(28)}$$

mit

$$\left.\begin{aligned}&\rho_{mn}=(m^2+\lambda_n^2)(m^2+\lambda_n'^2)\,,\\ &\left.\begin{matrix}\lambda_n^2\\ \lambda_n'^2\end{matrix}\right\}=\frac{a^2}{b^2}n^2\pm\mu\,,\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(29a)}$$

$$\left.\begin{aligned}&\rho'_{mn}=(n^2+\lambda_m^2)(n^2+\lambda_m'^2)\,,\\ &\left.\begin{matrix}\lambda_m^2\\ \lambda_m'^2\end{matrix}\right\}=\frac{b^2}{a^2}(m^2\pm\mu)\,.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(29b)}$$

Jede Unbekannte A_n, A'_n, B_m und B'_m hat auch hier den gleichen Ausdruck wie in (9). Unter Benutzung der Beziehungen

$$\lambda_n^2-\lambda_n'^2=2\mu\,, \qquad \lambda_m^2-\lambda_m'^2=\frac{2b^2}{a^2}\mu$$

gehen die Formeln (13a) bis (20b) über in

1) für $m(=r)=1,\ 2,\ 3\ldots$, nämlich für die unsymmetrische Schwingung in der x-Richtung:

$$(A_n+A'_n)I_n-(A_n-A'_n)J_n+\frac{4n^2\mu}{\pi}\sum_r\frac{1}{\rho'_{rn}}\Big[B_r+B'_r-(-1)^n(B_r-B'_r)\Big]=0\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(30a)}$$

$$(A_n+A'_n)J_n-(A_n-A'_n)I_n+\frac{4n^2\mu}{\pi}\sum_r\frac{(-1)^r}{\rho'_{rn}}\Big[B_r+B'_r-(-1)^n(B_r-B'_r)\Big]=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(30b)}$$

mit

$$I_n=\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2+\mu}\ \mathfrak{Ctg}\,\pi\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2+\mu}-\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2-\mu}\ \mathfrak{Ctg}\,\pi\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2-\mu}\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(31a)}$$

$$J_n=\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2+\mu}\ \mathfrak{Cofec}\,\pi\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2+\mu}-\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2-\mu}\ \mathfrak{Cofec}\,\pi\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2-\mu}\,;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(31b)}$$

2) für $m(=r)=1,\ 3,\ 5\ldots$, nämlich für die symmetrische Schwingung in der x-Richtung:

$$A_n G_n+\frac{4n^2\mu}{\pi}\sum_r{}'\frac{1}{\rho'_{rn}}\left[B_r+B'_r-(-1)^n(B_r-B'_r)\right]=0 \quad \ldots\ldots\ldots \text{(32a)}$$

mit

$$G_n=\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2+\mu}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2+\mu}-\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2-\mu}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2-\mu}\,;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(32b)}$$

3) für $m(=r)=2,\ 4,\ 6\ldots$, nämlich für die ungerade symmetrische Schwingung in der x-Richtung:

$$A'_n H_n+\frac{4n^2\mu}{\pi}\sum_r{}'\frac{1}{\rho'_{rn}}\left[B_r+B'_r-(-1)^n(B_r-B'_r)\right]=0 \quad \ldots\ldots\ldots \text{(33a)}$$

mit

$$H_n=\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2+\mu}\,\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2+\mu}-\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2-\mu}\,\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2-\mu}\,;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(33b)}$$

4) für $n(=s)=1,\ 2,\ 3\ldots$, nämlich für die unsymmetrische Schwingung in der y-Richtung:

$$(B_m+B'_m)I_m-(B_m-B'_m)J_m$$
$$+\frac{4b^2m^2\mu}{\pi a^2}\sum_s{}'\frac{1}{\rho_{ms}}\left[A_s+A'_s-(-1)^m(A_s-A'_s)\right]=0\,, \quad \ldots\ldots \text{(34a)}$$

$$(B_m+B'_m)J_m-(B_m-B'_m)I_m$$
$$+\frac{4b^2m^2\mu}{\pi a^2}\sum_s{}'\frac{(-1)^s}{\rho_{ms}}\left[A_s+A'_s-(-1)^m(A_s-A'_s)\right]=0 \quad \ldots\ldots \text{(34b)}$$

mit

$$I_m=\frac{b}{a}\sqrt{m^2+\mu}\,\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi b}{a}\sqrt{m^2+\mu}-\frac{b}{a}\sqrt{m^2-\mu}\,\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi b}{a}\sqrt{m^2-\mu}\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(35a)}$$

$$J_m=\frac{b}{a}\sqrt{m^2+\mu}\,\mathfrak{Cofec}\,\frac{\pi b}{a}\sqrt{m^2+\mu}-\frac{b}{a}\sqrt{m^2-\mu}\,\mathfrak{Cofec}\,\frac{\pi b}{a}\sqrt{m^2-\mu}\,;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(35b)}$$

5) für $n(=s)=1,\ 3,\ 5\ldots$, nämlich für die symmetrische Schwingung in der y-Richtung:

$$B_m G_m + \frac{4b^2m^2\mu}{\pi a^2}\sum_s \frac{1}{\rho_{ms}}\Big[A_s + A_s' - (-1)^m(A_s - A_s')\Big] = 0 \quad \ldots\ldots \text{(36a)}$$

mit

$$G_m = \frac{b}{a}\sqrt{m^2+\mu}\,\mathfrak{Tg}\frac{\pi b}{2a}\sqrt{m^2+\mu} - \frac{b}{a}\sqrt{m^2-\mu}\,\mathfrak{Tg}\frac{\pi b}{2a}\sqrt{m^2-\mu}\,;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(36b)}$$

6) für $n(=s)=2,\ 4,\ 6\ldots$, nämlich für die ungerade symmetrische Schwingung in der y-Richtung:

$$B_m' H_m + \frac{4b^2m^2\mu}{\pi a^2}\sum_s \frac{1}{\rho_{ms}}\Big[A_s + A_s' - (-1)^m(A_s - A_s')\Big] = 0 \quad \ldots\ldots \text{(37a)}$$

mit

$$H_m = \frac{b}{a}\sqrt{m^2+\mu}\,\mathfrak{Ctg}\frac{\pi b}{2a}\sqrt{m^2+\mu} - \frac{b}{a}\sqrt{m^2-\mu}\,\mathfrak{Ctg}\frac{\pi b}{2a}\sqrt{m^2-\mu}\,.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(37b)}$$

Es lohnt sich nicht, den Ausdruck für die Eigenfunktion w' wiederum hier anzugeben, weil er sofort aus (26) bis (27d) mit $T=0$ und den oben benutzten speziellen Werten von λ_n, λ_n', λ_m und λ_m' ermittelt werden kann.

2. Die vierseitig frei aufliegende Platte (Abb. 21). Da in diesem Falle alle Beiwerte c_m, c_m', d_n und d_n' gleich Null werden, so liefert (28) allgemein die Bedingung dafür, dass der Beiwert A_{mn} (oder θ_{mn}) nicht gleich Null ist, wie folgt:

$$\rho_{mn} = \left(m^2 + \frac{a^2}{b^2}n^2 + \mu\right)\left(m^2 + \frac{a^2}{b^2}n^2 - \mu\right) = 0\,.$$

Dies ist die gesuchte Frequenzgleichung für diesen Fall und daraus folgt die bekannte Formel

$$\left.\begin{aligned} \mu &= m^2 + \frac{a^2}{b^2}n^2\,, \\ &= 1 + \frac{a^2}{b^2} \quad \text{für den Grundton.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(38)}$$

Ich beschränke mich hier auf diese Bemerkungen und unterdrücke die weiteren Berechnungen für diesen einfachsten Fall, weil seine

Schwingungserscheinungen schon früher genau behandelt und wohl bekannt sind.*

3. Die auf der Seite $x = 0$ vollkommen eingespannte und auf den übrigen drei Seiten frei aufliegende Platte (Abb. 2 II). Wegen des unsymmetrischen Verlaufs der elastischen Linie in der x-Richtung muss man hierbei den Zeigern $m(=r)$ die natürlichen Zahlen 1, 2, 3 ... geben, während die anderen $n(=s)$ die ungeraden oder geraden Zahlen annehmen müssen, je nachdem die elastische Linie in der y-Richtung symmetrisch oder ungerade symmetrisch verläuft.

Die Randbedingungen für diesen Fall werden durch

$$c_m = 0\,, \qquad c'_m = \frac{3}{2}\,, \qquad d_n = d'_n = 0$$

definiert. Mit diesen Werten folgt aus (9)

$$A_n = A'_n = \frac{3}{2}\sum_r A_{rm}\,, \qquad B_m = B'_m = 0\,.$$

Somit ergibt sich aus (30a) und (31a)

$$I_n \equiv \sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2+\mu}\,\mathfrak{Ctg}\,\pi\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2+\mu}-\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2-\mu}\,\mathfrak{Ctg}\,\pi\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2-\mu} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

als die Bedingung dafür, dass der Beiwerte $A_n + A'_n$ nicht gleich Null ist.

Für den Grenzwert $b = \infty$ geht aus (39)

$$\mathfrak{Ctg}\,\pi\nu\sqrt{\mu} = \operatorname{ctg}\pi\nu\sqrt{\mu}$$

oder

$$\mathfrak{Tg}\,\pi\nu\sqrt{\mu} = \operatorname{tg}\pi\nu\sqrt{\mu}\,, \qquad \pi\nu\sqrt{\mu} = a\sqrt[4]{\frac{\gamma h\omega^2}{gN}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

hervor. Dies ist nichts anderes als die Frequenzgleichung des am Ende $x = 0$ eingespannten und am anderen $x = a$ frei aufliegenden geraden Stabes.

Die Gleichung (39) dient zur Bestimmung der Werte von μ für Platten mit konstanter Seitenlänge a und allen Werten grösser als eins von b/a. Wenn man dagegen mit dem Falle beschäftigen wollen,

* **A. Nádai,** Elastische Platten S. 164 bis 167. Berlin 1925.

in dem b konstant gehalten wird und a/b alle Werte grösser als eins annehmen kann, so haben wir vorteilhafterweise die Werte von

$$\mu' = \frac{\omega b^2}{\pi^2}\sqrt{\frac{\gamma h}{gN}} = \frac{b^2}{a^2}\mu$$

anstatt von μ zu berechnen. Die Gleichung (39) formt sich hierbei, wie folgt um:

$$\sqrt{n^2+\mu'}\,\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi a}{b}\sqrt{n^2+\mu'} - \sqrt{n^2-\mu'}\,\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi a}{b}\sqrt{n^2-\mu'} = 0 \quad . \quad . \quad (41)$$

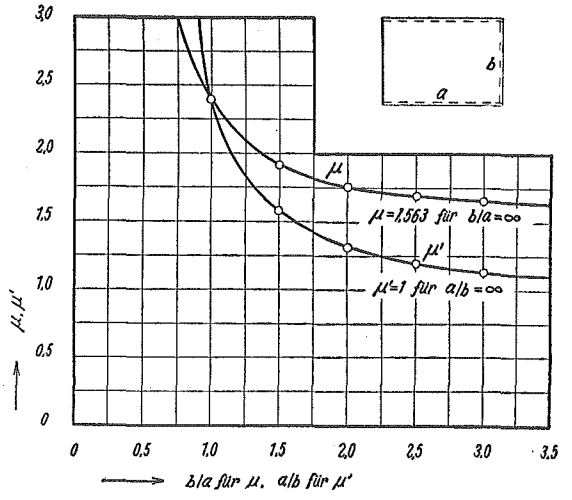


Abb. 4. Werte von μ bzw. μ' abhängig von b/a bzw. a/b für den Grundton.

Die niedrigsten Eigenwerte von μ bzw. μ', nämlich die Werte von μ bzw. μ' für den Grundton werden durch (39) bzw. (41) mit $n = 1$ ausgerechnet. Die Tabelle 1 und Abb. 4 zeigen die Rechenergebnisse.

Tabelle 1. Die den Werten von b/a bzw. a/b entsprechenden Werte von μ bzw. μ' für den Grundton.

b/a für μ a/b für μ'	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	∞
μ	2,396	1,915	1,756	1,685	1,647	1,563
μ'	2,396	1,578	1,309	1,191	1,129	1,000

Für die quadratische Platte ist ersichtlich

$$\mu = \mu' ,$$

und die Werte von μ für die verschiedenen Töne können durch die Lösung der Gleichung

$$\sqrt{n^2+\mu}\,\mathfrak{Ctg}\,\pi\sqrt{n^2+\mu}-\sqrt{\mu-n^2}\,\operatorname{ctg}\,\pi\sqrt{\mu-n^2}=0 \quad \ldots\ldots \quad (42)$$

bestimmt werden. Wenn man zu diesem Zwecke zur Abkürzung setzt

$$\xi = \sqrt{\mu-n^2} \quad \text{oder} \quad \mu = n^2+\xi^2 ,$$

so erhält man

$$\sqrt{\xi^2+2n^2}\,\mathfrak{Ctg}\,\pi\sqrt{\xi^2+2n^2}-\xi\,\operatorname{ctg}\,\pi\xi = 0 .$$

Wir haben also die Schnittpunkte der beiden Kurven

$$\eta_1 = \operatorname{ctg}\,\pi\xi , \qquad \eta_2 = \frac{1}{\xi}\sqrt{\xi^2+2n^2}\,\mathfrak{Ctg}\,\pi\sqrt{\xi^2+2n^2}$$

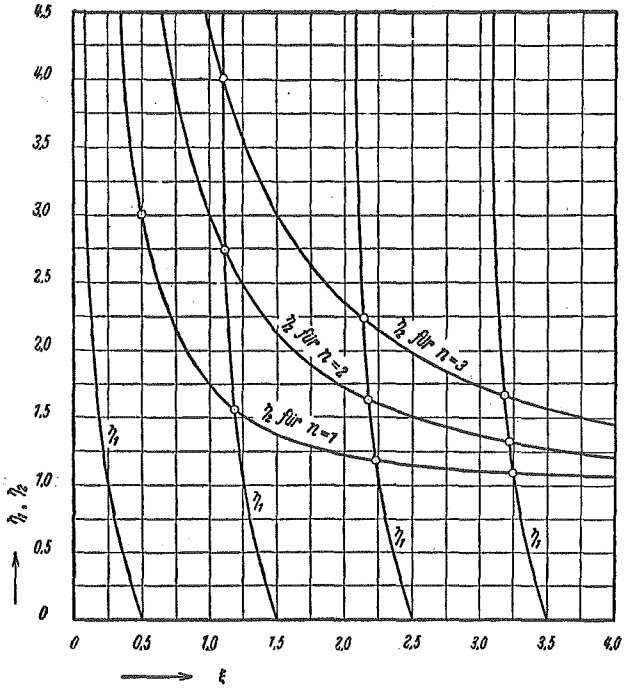


Abb. 5. Kurven zur Ermittelung der Werte von ξ für die verschiedenen Tonarten der quadratischen Platte.

zu finden. Die wirkliche Durchrechnung liefert die durch Abb. 5 dargestellten Kurven und die in folgender Tabelle zusammengestellten Zahlenergebnisse.

Tabelle 2. Die den Werten von n entsprechenden Werte von ξ und μ für die quadratische Platte.

Wurzeln	ξ			$\mu = n^2+\xi^2$		
	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
Die erste	1,1813	1,1116	1,0767	2,396	5,236	10,159
Die zweite	2,2231	2,1742	2,1344	5,942	8,727	13,556
Die dritte	3,2361	3,2048	3,1717	11,472	14,271	19,060

Die Werte von ξ und μ für $n=1$ und $n=3$ entsprechen natürlich den symmetrischen Schwingungen in der y-Richtung, während sie für $n=2$ den ungerade symmetrischen Schwingungen in derselben Richtung entsprechen. Da in diesem Falle die Eigenfunktion w' durch

$$w' = \sum_m \sum_n \frac{A_{mn}}{n\pi} X_m \sin\frac{n\pi}{b} y$$

ausgedrückt wird, so erkennt man leicht, dass die Schwingungsfläche der Platte mindestens eine Knotenlinie $y = b/2$ für $n=2$, und zwei Knotenlinien $y = b/3$ und $y = 2b/3$ für $n=3$ hat. Es ist selbstverständlich, dass die Schwingungsfläche für $n=1$ keine Knotenlinie in einer zur x-Achse parallelen Richtung hat.

Ferner muss man hierbei beachten, dass die in den Spalten der obigen Tabelle angeschriebene Grössenordnung der Werte von μ nur diejenigen für den Einzelwert von $n=1, 2, 3$ darstellt und natürlich nicht mit der Ordnung der Tonhöhe übereinstimmt. So z. B. entspricht $\mu = 5{,}942$ bzw. $\mu = 11{,}472$ dem zweiten bzw. fünften Oberton.

4. Die auf den zwei gegenüberliegenden Seiten $x=0$ und $x=a$ vollkommen eingespannte und auf den übrigen Seiten frei aufliegende Platte (Abb. 2 IV). Wegen der Gleichheit der Randbedingungen jedes Paares von gegenüberliegenden Seiten des Rechtecks findet hierbei keine unsymmetrische Schwingung weder in der x- noch in der y-Richtung statt. Somit müssen alle Zeiger m, r, n und s die ungeraden Zahlen 1, 3, 5 ... oder die geraden 2, 4, 6 ... annehmen.

Da für diesen Fall

$$c_m = -1-2(-1)^m\,, \qquad c'_m = 2+(-1)^m\,, \qquad d_n = d'_n = 0$$

ist, so erhält man aus (9)

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_r (1-(-1)^r) A_{rn} \\ &= 2\sum_r A_{rn} \quad \text{für} \quad r = 1, 3, 5 \ldots , \\ &= 0 \qquad\quad \text{für} \quad r = 2, 4, 6 \ldots , \\ A'_n &= 3\sum_r (1+(-1)^r) A_{rn} , \\ &= 6\sum_r A_{rn} \quad \text{für} \quad r = 2, 4, 6 \ldots , \\ &= 0 \qquad\quad \text{für} \quad r = 1, 3, 5 \ldots , \\ B_m &= B'_m = 0 . \end{aligned}$$

Für die symmetrische Schwingung in der x-Richtung folgt daher aus (32a) und (32b)

$$G_n \equiv \sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2+\mu}\, \mathfrak{Tg}\, \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2+\mu} - \sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2-\mu}\, \mathfrak{Tg}\, \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2-\mu} = 0 . \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43a)$$

Diese Gleichung geht mit $\mu = a^2\mu'/b^2$ über in

$$\sqrt{n^2+\mu'}\, \mathfrak{Tg}\, \frac{\pi a}{2b}\sqrt{n^2+\mu'} - \sqrt{n^2-\mu'}\, \mathfrak{Tg}\, \frac{\pi a}{2b}\sqrt{n^2-\mu'} = 0 . \quad (43b)$$

Für den Grenzwert ∞ von b wird die Gleichung (42a)

$$\mathfrak{Tg}\, \frac{\pi}{2}\sqrt{\mu} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}\sqrt{\mu} = 0 . \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

Dies ist die Frequenzgleichung für die symmetrische Schwingung des am beiden Enden eingespannten geraden Stabes.

Analog erhält man für die ungerade symmetrische Schwingung in der x-Richtung aus (33a) und (33b)

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2+\mu}\, \mathfrak{Ctg}\, \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2+\mu} - \sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2-\mu}\, \mathfrak{Ctg}\, \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2-\mu} = 0 , \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (45a)$$

$$\sqrt{n^2+\mu'}\, \mathfrak{Ctg}\, \frac{\pi a}{2b}\sqrt{n^2+\mu'} - \sqrt{n^2-\mu'}\, \mathfrak{Ctg}\, \frac{\pi a}{2b}\sqrt{n^2-\mu'} = 0 . \quad (45b)$$

Für $b = \infty$ lässt sich die Gleichung (45a), wie folgt, vereinfachen:

$$\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu} = 0\,. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

Dies ist die Frequenzgleichung für die ungerade symmetrische Schwingung des am beiden Enden eingespannten geraden Stabes.

Aus (44) und (46) erhält man

$$\left(\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu}\right)\left(\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu}\right) = 0$$

oder bekanntlich (nach weiteren Berechnungen)

$$\mathfrak{Cof}\,\pi\sqrt{\mu}\cos\pi\sqrt{\mu} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

als die allgemeine Frequenzgleichung für den betreffenden Stab.

Nun wollen wir die Werte von μ und μ' für den Grundton ausrechnen. Sie sind die niedrigsten Wurzeln der Gleichungen (43a) und (43b) mit $n = 1$. Mit Unterdrückung der weiteren Rechenverfahren sind die Zahlenergebnisse in folgender Tabelle zusammengestellt.

Tabelle 3. Die den Werten von b/a bzw. a/b entsprechenden Werte von μ bzw. μ' für den Grundton.

b/a für μ a/b für μ'	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	∞
μ	2,933	2,538	2,413	2,358	2,329	2,267
μ'	2,933	1,760	1,387	1,229	1,151	1,000

Aus Abb. 6 sieht man, wie sich die Grössen von μ und μ' mit den Seitenverhältnissen des Rechtecks ändern. Der von **Kato*** ausgerechnete Wert von μ für die quadratische Platte ist $\sqrt{8{,}57} = 2{,}927$.

Die höheren Eigenwerte μ für die symmetrischen Schwingungen in der x-Richtung können auch aus (43a) ausgerechnet werden. Setzt man zu diesem Zwecke

$$\mu = \xi^2 + \frac{a^2}{b^2}n^2\,,$$

* **H. Kato**, J. Soc. Nav. Arch. Tokyo **50** (1932) S. 209 bis 230.

so können die Wurzeln von (43a) aus der Auffindung der Schnittpunkte der beiden Kurven

$$\eta_1 = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\xi$$

$$\eta_2 = \frac{1}{\xi}\sqrt{\frac{2a^2}{b^2}n^2+\xi^2}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2a^2}{b^2}n^2+\xi^2}$$

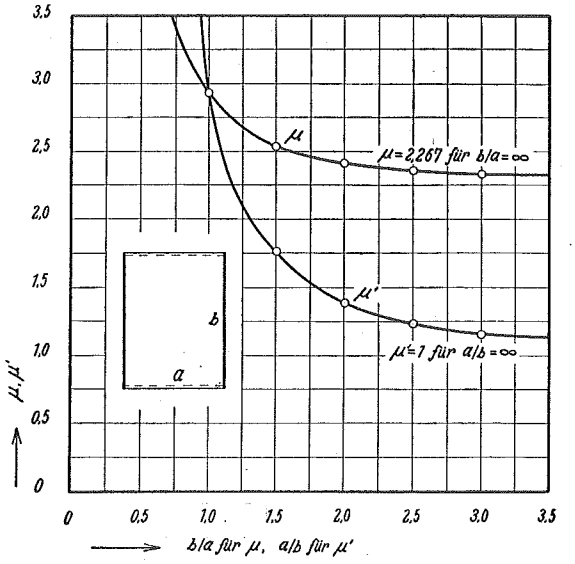


Abb. 6. Werte von μ bzw. μ' abhängig von b/a bzw. a/b für den Grundton.

bestimmt werden. Die Tabelle 4 und Abb. 7 enthalten die Rechenergebnisse für die quadratische Platte.

Tabelle 4. Die den Werten von n entsprechenden Werte von ξ und μ für die symmetrische Schwingung in der x-Richtung der quadratischen Platte.

Wurzeln	ξ			$\mu = n^2+\xi^2$		
	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
Die erste	1,3905	1,2436	1,1648	2,933	5,547	10,357
Die zweite	3,4757	3,4179	3,3534	13,080	15,682	20,245
Die dritte	5,4898	5,4622	5,4250	31,138	33,836	38,431

Tabelle 5. Die den Werten von n entsprechenden Werte von ξ und μ für die ungerade symmetrische Schwingung in der x-Richtung der quadratischen Platte.

Wurzeln	ξ			$\mu = n^2+\xi^2$		
	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
Die erste	2,4544	2,3630	2,2816	7,024	9,584	14,205
Die zweite	4,4849	4,4462	4,3971	21,114	23,769	28,334
Die dritte	6,4926	6,4722	6,4430	43,154	45,889	50,512

In gleicher Weise wie vorhin können die Werte von ξ und μ für die Obertöne der ungerade symmetrischen Schwingung der Platte aus Formel (45a) ausgerechnet werden. Wieder mit Unterdrückung der

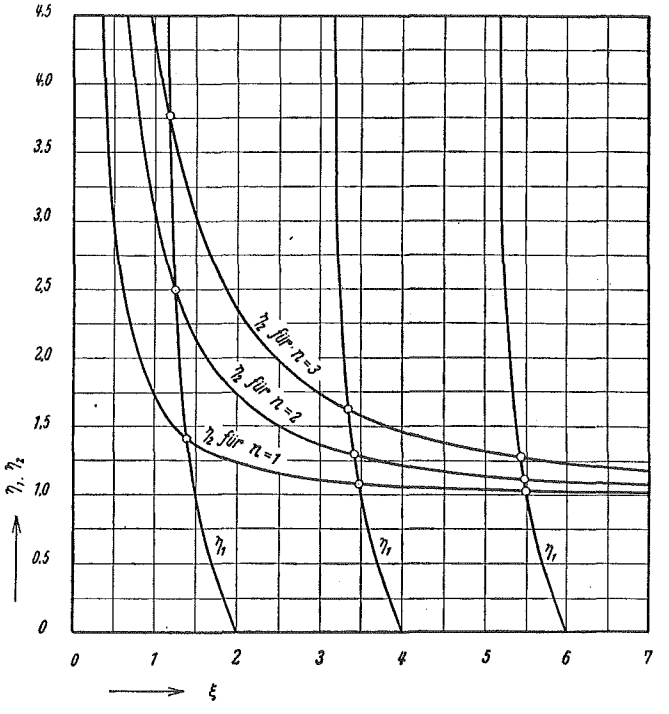


Abb. 7. Kurven zur Ermittelung der Werte ξ für die symmetrische Schwingung in der x-Richtung der quadratischen Platte.

weiteren Rechenverfahren sind die Ergebnisse in Tabelle 5 zusammengestellt. Die auf S. 22 angegebenen Anmerkungen gelten auch für diesen Fall.

5. Die vierseitig vollkommen eingespannte Platte (Abb. 2 VI). Da dieser Fall praktisch sehr wichtig ist, so wollen wir seine Behandlung noch etwas ausführlicher darstellen.

Alle Formeln hierfür können direkt aus den vorher angegebenen Formeln mit Werten

$$c_m = -1-2(-1)^m\,, \qquad c'_m = 2+(-1)^m\,,$$
$$d_n = -1-2(-1)^n\,, \qquad d'_n = 2+(-1)^n$$

abgeleitet werden. Der Bequemlichkeit halber werden die Schwingungsgestalten dieser Platte in drei Familien klassifiziert.

I) Erste Schwingungsfamilie. Wir betrachten erstens die erste Schwingungsfamilie der Platte, deren Schwingungsmittelfläche stets symmetrisch in jeder Achsenrichtung ist. Beide Zeiger $m(=r)$ und $n(=s)$ müssen also die ungeraden Zahlen 1, 3, 5 ... annehmen. So wird aus (9)

$$A'_n = \frac{12}{n^2\pi^2}\sum_r\sum_s(1+(-1)^r)((-1)^n d_s - d'_s)A_{rs} + 3\sum_r(1+(-1)^r)A_{rn} = 0\,,$$

$$B'_m = \frac{12}{m^2\pi^2}\sum_r\sum_s(1+(-1)^s)((-1)^m c_r - c'_r)A_{rs} + 3\sum_s(1+(-1)^s)A_{ms} = 0\,.$$

Folglich geht (32a) bzw. (36a) über in

$$A_n + \frac{8n^2\mu}{\pi G_n}\sum_r\frac{B_r}{\rho'_{rn}} = 0\,, \qquad \text{..... (48a)}$$

$$B_m + \frac{8b^2m^2\mu}{\pi a^2 G_m}\sum_s\frac{A_s}{\rho_{ms}} = 0\,. \qquad \text{..... (48b)}$$

Der Ausdruck für G_n in (48a) bzw. G_m in (48b) ist derselbe wie in (32b) bzw. (36b). Das Einsetzen von $B_r(=B_m)$ aus (48b) in (48a) liefert

$$\left.\begin{aligned} &A_n - \sum_s K_{ns}A_s = 0\,,\\ &K_{ns} = \frac{64b^2n^2\mu^2}{\pi^2a^2G_n}\sum_r\frac{r^2}{G_r\rho_{rs}\rho'_{rn}}\,. \end{aligned}\right\} \qquad \text{..... (49)}$$

Für die quadratische Platte ist ersichtlich

$$B_m(=B_n) = A_n\,, \qquad \rho_{mn} = \rho'_{mn}$$

und folglich

$$\sum_r \frac{B_r}{\rho'_{rn}} = \sum_s \frac{A_s}{\rho_{ns}} .$$

Somit lässt sich hier der Ausdruck für K_{ns} wie folgt vereinfachen:

$$K_{ns} = -\frac{8n^2\mu}{\pi G_n \rho_{ns}}$$

$$= -\frac{8n^2\mu}{\pi\left[(n^2+s^2)^2-\mu^2\right]\left(\sqrt{n^2+\mu}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{n^2+\mu}-\sqrt{n^2-\mu}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{n^2-\mu}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (50)$$

Wenn man ferner die unbekannten Beiwerte $A_1, A_3, A_5 \ldots$ in der ersten Gleichung (49) eliminiert, so erhält man folgende Determinantengleichung:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 1-K_{11} & K_{13} & K_{15} & K_{17} \ldots \\ K_{31} & 1-K_{33} & K_{35} & K_{37} \ldots \\ K_{51} & K_{53} & 1-K_{55} & K_{57} \ldots \\ K_{71} & K_{73} & K_{75} & 1-K_{77} \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0 . \quad \ldots\ldots (51)$$

Dies ist die gesuchte Frequenzgleichung, durch deren Auflösung die den verschiedenen Schwingungen dieser Familie entsprechenden Werte von μ zu bestimmen sind.* Man erkennt, dass es sehr schwer ist, die genauen Werte von μ unmittelbar aus (51) selbst, nämlich aus einer Determinantengleichung mit unendlich vielen Elementen, aufzufinden. Nehmen wir daher zuerst einmal

$$\Delta_1 \equiv 1-K_{11} = 0$$

als die Frequenzgleichung an, deren Wurzeln die ersten Näherungswerte von μ sein sollen. Durch Einführung des Ausdrucks (50) für K_{ns} mit $n = s = 1$ ergibt sich für die quadratische Platte

* Die Frequenzgleichung (44),

$$\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu} = 0$$

für die symmetrische Schwingung des am beiden Enden eingespannten geraden Stabes geht auch aus (48a) durch den Grenzübergang $b = \infty$ hervor.

$$\Delta_1 \equiv 1+\frac{8\mu}{\pi(4-\mu^2)\left(\sqrt{\mu+1}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu+1}+\sqrt{\mu-1}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu-1}\right)}=0\,.$$

Daraus findet man

die niedrigste Wurzel (für den Grundton): $\mu = 3{,}62$,
die erste höhere Wurzel (für den 3. Oberton): $\mu = 13{,}25$,
die zweite höhere Wurzel (für den 6. Oberton): $\mu = 31{,}25$.

Diese Näherungswerte von μ gewähren einen guten Anhalt bei der weiteren Ausrechnug ihrer genauen Werte.

Wir bezeichnen nun mit Δ_1, wie oben, das erste Element der Determinante (51), d. h. $1-K_{11}$, und mit Δ_2, Δ_3, Δ_4 die aus den ersten 2, 3, 4 Zeilen und Spalten bestehenden Determinanten. Zur Ermittelung von μ rechnet man zunächst für jede dieser Determinanten der Reihe nach die Werte aus, welche den versuchsweise gewählten Werten $\mu = 3{,}60$; 3,65 und 3,70 für den Grundton sowie $\mu = 13{,}30$; 13,35 und 13,40 für den dritten Oberton entsprechen. Die Ergebnisse sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Tabelle 6. Werte der den verschiedenen Grössen von μ entsprechenden Determinanten.

Für den Grundton					Für den dritten Oberton				
μ	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	μ	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4
3,60	-0,00734	-0,08891	-0,10224	-0,11075	13,30	0,44364	-0,37036	-0,69139	-0,77816
3,65	0,07201	0,01030	0,00845	0,00884	13,35	0,54389	-0,02140	-0,25192	-0,29746
3,70	0,14091	0,09643	0,10454	0,11260	13,40	0,61782	0,22554	0,05787	0,04323
Wurzeln	3,60427	3,64443	3,64590	3,64602		13,32713	13,35385	13,38973	13,39297

Aus dieser Tabelle sieht man sogleich, dass die Wurzel jeder Determinantengleichung zwischen 3,6 und 3,65 für den Grundton, zwischen 13,35 und 13,40 für den dritten Oberten liegt. Die in der untersten Reihe der Tabelle angeschriebenen Ziffern sind die Werte der Wurzeln, welche mit Hilfe der Lagrangeschen Interpolationsformel ausgerechnet sind. Somit können wir

$$\mu = 3{,}646 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

bzw.

$$\mu = 13{,}393 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (53)$$

als den richtigen Wert von μ für den Grundton bzw. den dritten Oberton annehmen. Der Wert $\mu = 3{,}646$ stimmt ganz befriedigend mit dem von **Tomotika**[1] ausgerechneten Wert 3,6461 überein. Der von **Sezawa**[2] ermittelte Wert ist $\mu = \sqrt{14{,}4} = 3{,}795$, während der erste bzw. zweite Näherungswert von **Kato**[3] $\mu = \sqrt{14{,}24} = 3{,}774$ bzw. $\sqrt{13{,}23} = 3{,}637$ ist.

Ferner zeigen die Zeilen in der obigen Tabelle, dass die Konvergenz der Reihe $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \ldots$ sehr gut ist; sogar die erste Näherungswurzel weicht von der richtigen nur um einen praktisch zu vernachlässigenden Fehler von ungefähr 0,7% für den Grundton und von 1,1% für den dritten Oberton ab. Man könnte also einen hinreichend genauen Wert erhalten, wenn man nur zwei oder drei Zeilen und Spalten der Determinante nähme. Das gilt auch für die anderen Schwingungsarten sowie für die Platten mit anderen Seitenverhältnissen, obwohl die Reihe $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \ldots$ mit der Zunahme von b/a etwas langsamer konvergiert.

So sind die Werte von μ für den Grundton der Platte mit verschiedenen Seitenverhältnissen, die aus der Gleichung

$$\Delta_4 = 0$$

ausgerechnet werden, in folgender Tabelle zusammengestellt.

Tabelle 7. Die den Werten von b/a entsprechenden Werte von μ für den Grundton.

b/a	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	∞
μ	3,646	2,736	2,489	2,408	2,350	2,267

Aus Abb. 8 sieht man, wie sich die Grösse μ mit den Seitenverhältnissen b/a ändert.

Weiter wollen wir uns jetzt mit der Untersuchung der Schwingungsgestalt dieser Familie beschäftigen. Da die Beiwerte A'_n und B'_m beide verschwinden, so lautet die Eigenfunktion für diese Schwingungsfamilie wie folgt:

$$w' = \frac{A_1}{2\pi^3\mu}\bar{w}' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (54a)$$

(1) **S. Tomotika**, Philos. Mag. London **142** (1936) S. 745.
(2) **K. Sezawa**, J. Aer. Res. Inst. Tokyo **70** (1931) S. 61.
(3) **H. Kato**, J. Soc. Nav. Arch. Tokyo **50** (1932) S. 209.

mit

$$\left.\begin{aligned} \bar{w}' &= \sum_n \frac{\alpha_n}{n} u_n\left(\frac{x}{a}\right) \sin\frac{n\pi}{b} y + \frac{a^2 B_1}{b^2 A_1} \sum_m \frac{\beta_m}{m} u_m\left(\frac{y}{b}\right) \sin\frac{m\pi}{a} x\,, \\ \alpha_n &= \frac{A_n}{A_1}\,, \qquad \beta_m = \frac{B_m}{B_1}\,, \qquad m, n = 1, 3, 5 \ldots \end{aligned}\right\} \quad (54b)$$

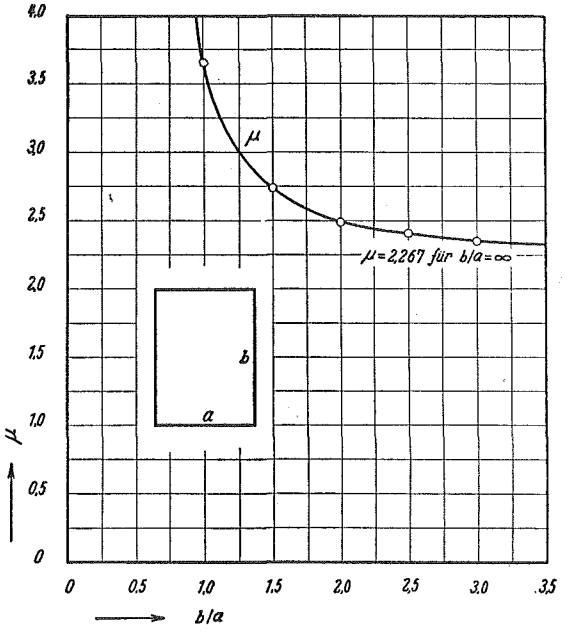


Abb. 8. Werte von μ abhängig von b/a für den Grundton.

Zur Untersuchung der Gestalt der Schwingungsfläche sowie der Knotenlinien der Platte genügt es, nur diese Funktion $\bar{w}'$ zu betrachten, denn die wirkliche Auslenkung des Punktes (x, y) zu irgendeiner Zeit ist proportional zu $\bar{w}'$.

Nun wird insbesondere für die quadratische Platte

$$B_m = B_n = A_n\,, \qquad \beta_m = \beta_n = \alpha_n\,.$$

Damit geht (54b) über in

$$\bar{w}' = \sum_n \frac{\alpha_n}{n}\left[u_n\left(\frac{x}{a}\right) \sin\frac{n\pi}{a} y + u_n\left(\frac{y}{a}\right) \sin\frac{n\pi}{a} x\right]. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (55)$$

Um die Werte von $\bar{w}'$ auszurechnen, haben wir zunächst die Werte von α_n zu finden. Dividiert man zu diesem Zwecke die erste Gleichung (49) mit $-A_1$, so erhält man

$$-\alpha_n+\sum_s K_{ns}\alpha_s=0\,.$$

Daraus folgt folgendes System linearer Gleichungen für α_n, wenn man alle Glieder mit n und $s \gtreqless 9$ vernachlässigt.

$$\begin{aligned}
&K_{11}-1+ K_{13}\alpha_3 + K_{15}\alpha_5 + K_{17}\alpha_7 = 0\,,\\
&K_{31} + (K_{33}-1)\alpha_3 + K_{35}\alpha_5 + K_{37}\alpha_7 = 0\,,\\
&K_{51} + K_{53}\alpha_3 + (K_{55}-1)\alpha_5 + K_{57}\alpha_7 = 0\,,\\
&K_{71} + K_{73}\alpha_3 + K_{75}\alpha_5 + (K_{77}-1)\alpha_7 = 0\,.
\end{aligned}$$

Diese vier Gleichungen für die drei Unbekannten α_3, α_5 und α_7 liefern vier verschiedene Systeme der drei Gleichungen, aus deren Lösungen vier Wurzeln für jede Unbekannte hervorgehen. Aber sie sind einander gleich; denn es gilt die Bedingung (Frequenzgleichung), dass die aus allen Koeffizienten bestehenden Determinante Δ_4 gleich Null wird. Die wirkliche Lösung der obigen Gleichung liefert

für den Grundton:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_3 &= -0{,}62139,\\ \alpha_5 &= -0{,}27033,\\ \alpha_7 &= -0{,}08294,\end{aligned}\right\} \quad (56a)$$

für den dritten Oberton:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_3 &= 0{,}65346,\\ \alpha_5 &= -0{,}15379,\\ \alpha_7 &= -0{,}02850.\end{aligned}\right\} \quad (56b)$$

Ersichtlich ist $\alpha_1 = 1$ für beide Töne.

Es lohnt sich nicht, die Schwingungsform für den Grundton, welcher keine Knotenlinie hat, weiter zu untersuchen; vielmehr sollen die Berechung nur für den dritten Oberton ausgeführt werden.

Durch Einführung der Werte von α_n in (54b) ergibt sich für den dritten Oberton

$$\left.\begin{aligned}\overline{w}' = &\left[u_1\left(\frac{x}{a}\right)\sin\frac{\pi}{a}y+u_1\left(\frac{y}{a}\right)\sin\frac{\pi}{a}x\right]\\ &+0{,}21782\left[u_3\left(\frac{x}{a}\right)\sin\frac{3\pi}{a}y+u_3\left(\frac{y}{a}\right)\sin\frac{3\pi}{a}x\right]\\ &-0{,}03076\left[u_5\left(\frac{x}{a}\right)\sin\frac{5\pi}{a}y+u_5\left(\frac{y}{a}\right)\sin\frac{5\pi}{a}x\right]\\ &-0{,}00407\left[u_7\left(\frac{x}{a}\right)\sin\frac{7\pi}{a}y+u_7\left(\frac{y}{a}\right)\sin\frac{7\pi}{a}x\right].\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ (57)$$

Die Ergebnisse der weiteren Berechnung sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Tabelle 8. Die den Werten von x/a und y/a entsprechenden Werte von $\overline{w}'$ für den dritten Oberton.

y/a \ x/a	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,1	0,2098	0,6675	0,8210	0,7052	0,5997
0,2	0,6675	1,3720	1,6975	1,2321	0,9173
0,3	0,8210	1,6975	1,4059	0,3524	−0,2456
0,4	0,7052	1,2321	0,3524	−1,3196	−2,1888
0,5	0,5997	0,9173	0,2456	−2,1888	−3,1724

Aus diesen Grössen von $\overline{w}'$ können wir die Schichtlinien der $\overline{w}'$— Fläche bilden, wie Abb. 9 zeigt. Die mit 0 bezeichnete geschlossene Kurve ist die Knotenlinie der Schwingungsfläche für diesen Ton.

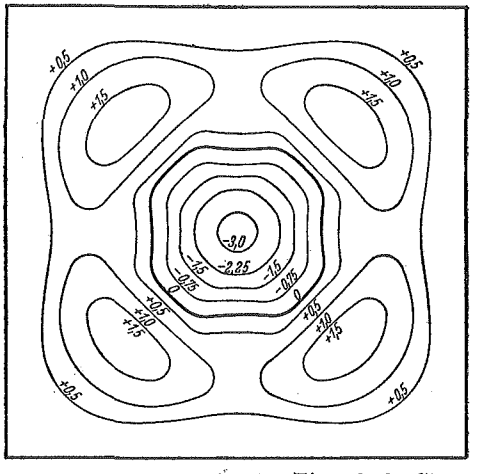


Abb. 9. Schichtlinien der $\overline{w}'$— Fläche für den dritten Oberton.

2) Zweite Schwingungsfamilie. Wir betrachten zweitens den Fall, wo die Schwingungsfläche symmetrisch in der x-Richtung und ungerade symmetrisch in der y-Richtung ist. Hierbei durchläuft der Zeiger $m(=r)$ die ungeraden Zahlen 1, 3, 5 ..., der Zeiger $n(=s)$ dagegen die geraden 2, 4, 6.... Gemäss der Eigenschaft dieser Schwingungsfamilie überzeugt man sich leicht, dass die Schwingungsfläche mindestens eine Knotenlinie $y = b/2$ hat. Der niedrigste Ton für diesen Fall ist der erste Oberton, welcher aus der einfachsten Schwingungsform mit der einzigen Knotenlinie $y = b/2$ entsteht, wie Abb. 10 zeigt.

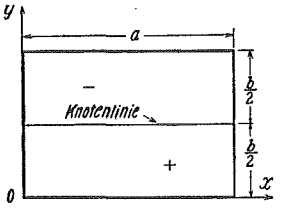


Abb. 10. Knotenlinie der Schwingungsfläche für den ersten Oberton.

Nun ergibt sich hierbei aus (9)

$$A'_n = B_m = 0 .$$

Damit folgt aus (32a) und (37a)

$$A_n + \frac{8n^2\mu}{\pi G_n} \sum_r \frac{B'_r}{\rho'_{rn}} = 0 , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (58a)$$

$$B'_m + \frac{8b^2m^2\mu}{\pi a^2 H_m} \sum_s \frac{A_s}{\rho_{ms}} = 0 . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (58b)$$

Der Vergleich dieser Formeln mit (48a) und (48b) zeigt, dass die erste Gleichung (49) sowie die Frequenzgleichung (51) auch hier gilt, wenn man nur in dem Ausdrucke von K_{ns}

$$K_{ns} = \frac{64b^2m^2\mu^2}{\pi^2 a^2 G_n} \sum_r \frac{r^2}{H_r \rho_{rs} \rho'_{rn}} , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

$m(=r) = 1, 3, 5\ldots$ und $n(=s) = 2, 4, 6\ldots$ setzt. Da die Auslenkungen in den beiden Achsenrichtungen schon für die quadratische Platte voneinander ganz verschieden, sind, so ergibt sich hierbei keine einfache Formel für K_{ns} wie (50). Man muss daher zur Ausrechnung des Wertes von K_{ns} den durch (59) gegebenen Ausdruck, d.h. die Summe der unendlichen Reihe nach r anwenden.

Wie im vorigen Falle kann man die ersten Näherungswerte von μ durch die Lösung der Gleichung

$$\Delta_1 \equiv 1 - K_{22} = 0$$

ermitteln. Daraus und aus der Formel (59) mit (29a), (29b), (32b) und (37b) ergibt sich für die quadratische Platte

$$\left(\sqrt{\mu+1}\,\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu+1} - \sqrt{\mu-1}\,\operatorname{ctg}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu-1}\right) \times$$

$$\left(\sqrt{\mu+4}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu+4} + \sqrt{\mu-4}\,\operatorname{tg}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu-4}\right) = \frac{256\,\mu^2}{\pi^2(25-\mu^2)^2} .$$

Die niedrigste Wurzel dieser Gleichung ist

$$\mu = 7{,}60 \quad \text{(für den ersten Oberton)} ,$$

während die nächst höhere

$$\mu = 16{,}25 \quad \text{(für den vierten Oberton)}$$

ist. Hält man sich an diese Näherungswerte von μ, so kann man ihre genaueren Werte durch ein ähnliches Rechenverfahren wie vorhin ausrechnen. Die Ergebnisse sind

$$\mu = 7{,}437 \quad \text{(für den ersten Oberton)}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

$$\mu = 16{,}717 \quad \text{(für den vierten Oberton)}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

Die Eigenfunktion für die quadratische Platte wird durch

$$w' = \frac{A_2}{2\pi^3\mu}\overline{w}' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (62a)$$

mit

$$\left.\begin{aligned} \overline{w}' &= \sum_n \frac{\alpha_n}{n} u_n\left(\frac{x}{a}\right)\sin\frac{n\pi}{a}y + \sum_m \frac{\beta_m}{m} v_m\left(\frac{y}{a}\right)\sin\frac{m\pi}{a}x\,, \\ \alpha_n &= \frac{A_n}{A_2}\,, \qquad \beta_m = \frac{B'_m}{A_2} \end{aligned}\right\} \ldots \quad (62b)$$

ausgedrückt. Ferner finden wir

für den ersten Oberton:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2 &= 1, \\ \alpha_4 &= -0{,}54887, \\ \alpha_6 &= -0{,}25210, \\ \alpha_8 &= -0{,}14899, \end{aligned}\right\} \quad (63a) \qquad \left.\begin{aligned} \beta_1 &= 1{,}04048, \\ \beta_3 &= -0{,}47510, \\ \beta_5 &= -0{,}26668, \\ \beta_7 &= -0{,}16080, \end{aligned}\right\} \quad (63b)$$

für den vierten Oberton:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2 &= 1, \\ \alpha_4 &= -0{,}37435, \\ \alpha_6 &= -0{,}22711, \\ \alpha_8 &= -0{,}16263, \end{aligned}\right\} \quad (64a) \qquad \left.\begin{aligned} \beta_1 &= 0{,}02459, \\ \beta_3 &= 0{,}97164, \\ \beta_5 &= -0{,}42402, \\ \beta_7 &= -0{,}21913. \end{aligned}\right\} \quad (64b)$$

Mit diesen Werten von α_n und β_m kann man aus (62b) die Werte von $\overline{w}'$ in den verschiedenen Punkten des Quadrates berechnen. Für den vierten Oberton erhält man so folgende Ergebnisse:

Tabelle 9. Die den Werten von x/a und y/a entsprechenden Werte von $\overline{w}$ für den vierten Oberton.

y/a \ x/a	1/16	2/16	3/16	4/16	5/16	6/16	7/16	8/16
1/16	0,2599	0,2656	0,1218	-0,0154	-0,0976	-0,1208	-0,1133	-0,1066
2/16	0,1632	-0,0264	-0,2932	-0,3724	-0,2456	0,0071	0,2455	0,3418
3/16	0,0572	-0,2832	-0,6241	-0,6378	-0,3368	0,1319	0,5459	0,7094
4/16	-0,0536	-0,4717	-0,8302	-0,7847	-0,3704	0,2266	0,7405	0,9416
5/16	-0,1355	-0,5464	-0,8672	-0,7851	-0,3453	0,2641	0,7811	0,9824
6/16	-0,1517	-0,4786	-0,7173	-0,8215	-0,2658	0,2310	0,6490	0,8113
7/16	-0,0971	-0,2788	-0,4056	-0,5367	-0,1444	0,1343	0,3678	0,4581
8/16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Abb. 11 zeigt die Schichtlinien für diesen Fall. Daraus sieht man, dass hier drei Knotenlinien entstehen, deren erste die Mittellinie $y = a/2$ des Quadrats ist, während die zweite und die dritte symmetrisch zu den beiden Mittellinien liegende geschlossene Kurven sind.

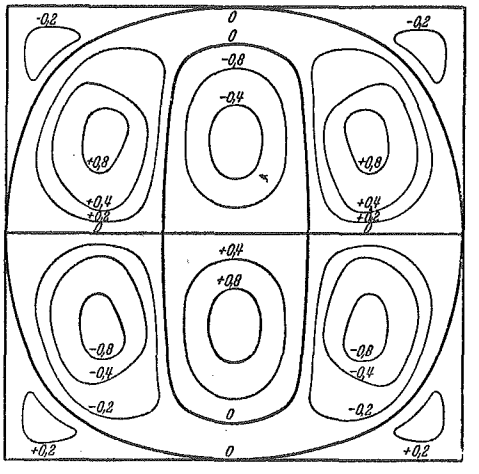


Abb. 11. Schichtlinien der $\overline{w}'$— Fläche für den vierten Oberton.

3) Dritte Schwingungsfamilie. Wir betrachten zuletzt den Fall, wo die Schwingungsfläche ungerade symmetrisch in den beiden Achsenrichtungen ist. Hierbei müssen die beiden Zeiger $m(= r)$ und $n(= s)$ die geraden Zahlen 2, 4, 6... sein, und die schwingende Mittelfläche der Platte hat mindestens zwei Knotenlinien $x = a/2$ und $y = b/2$ (dies entspricht dem zweiten Oberton), wie Abb. 12 zeigt.

Nun folgt aus (9) für diesen Fall

$$A_n = B_m = 0 .$$

Mithin geht (33a) bzw. (37a) über in

$$A'_n + \frac{8n^2\mu}{\pi H_n} \sum_r \frac{B'_r}{\rho'_{rn}} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (65a)$$

bzw.

$$B'_m + \frac{8b^2m^2\mu}{\pi a^2 H_m} \sum_s \frac{A'_s}{\rho_{ms}} = 0\,. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (65b)$$

Infolge der Analogie dieser Gleichungen mit (48a) und (48b) kann man die Werte von μ wieder mit Hilfe der Frequenzgleichung (51) berechnen, wenn man nur in dem Ausdrucke von K_{ns}

$$K_{ns} = \frac{64b^2n^2\mu^2}{\pi^2 a^2 H_n} \sum_r \frac{r^2}{H_r \rho_{rs} \rho'_{rn}}\,, \quad \ldots \quad (66)$$

$r = n = s = 2,\ 4,\ 6\ldots$ setzt.

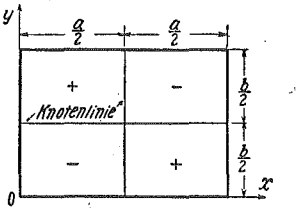


Abb. 12. Knotenlinien der Schwingungsfläche für den zweiten Oberton.

Für die quadratische Platte ist ersichtlich wie in 1)

$$B'_m (= B'_n) = A'_n\,, \qquad \rho'_{mn} = \rho_{mn}$$

und auch

$$\sum_r \frac{B'_r}{\rho'_{rn}} = \sum_s \frac{A'_s}{\rho_{ns}}\,.$$

Somit lässt sich der Ausdruck für K_{ns} wie folgt vereinfachen:

$$K_{ns} = -\frac{8n^2\mu}{\pi \rho_{ns} H_n}$$

$$= -\frac{8n^2\mu}{\pi\left[(n^2+s^2)^2-\mu^2\right]\left(\sqrt{n^2+\mu}\,\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{n^2+\mu} - \sqrt{n^2-\mu}\,\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{n^2-\mu}\right)}\,. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (67)$$

In ähnlicher Weise wie in den früheren Fällen kann man die ersten Näherungswerte von μ aus

$$\Delta_1 \equiv 1 - K_{22} = 0$$

bestimmen. Vermöge (67) ergibt sich so für die quadratische Platte

$$\sqrt{\mu+4}\,\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu+4}-\sqrt{\mu-4}\,\operatorname{ctg}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu-4}+\frac{32\,\mu}{\pi(64-\mu^2)}=0\,.$$

Die Auflösung dieser Gleichung liefert die Wurzeln für den zweiten bzw. fünften Oberton

$$\mu=10{,}92 \quad \text{bzw.} \quad \mu=24{,}25\,.$$

Ihre genaueren Werte, die durch die Lösung der Determinantengleichung

$$\Delta_4=0$$

ermittelt werden, sind

$$\mu=10{,}965 \quad \text{(für den zweiten Oberton)}\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (68)$$

$$\mu=24{,}631 \quad \text{(für den fünften Oberton)}\,. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (69)$$

Ferner wird die Eigenfunktion für die quadratische Platte durch

$$w'=\frac{A_2}{2\pi^3\mu}\overline{w}' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (70a)$$

mit

$$\left.\begin{aligned}\overline{w}' &= \sum_r \frac{\alpha_n}{n}\left[v_n\left(\frac{x}{a}\right)\sin\frac{n\pi}{a}y+v_n\left(\frac{y}{a}\right)\sin\frac{n\pi}{a}x\right],\\ \alpha_n &= \frac{A_n}{A_2}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (70b)$$

ausgedrückt. Die Werte der Beiwerte α_n sind

für den zweiten Oberton:		für den fünften Oberton:	
$\alpha_2=1,$		$\alpha_2=1,$	
$\alpha_4=-0{,}44944,$	(71a)	$\alpha_4=\ \ 0{,}61172,$	(71b)
$\alpha_6=-0{,}23801,$		$\alpha_6=-0{,}58071,$	
$\alpha_8=-0{,}14939,$		$\alpha_8=-0{,}34694.$	

Die weiteren Berechnung für $\overline{w}'$ (70b) mit diesen Werten von α_n für den fünften Oberton liefern folgende Ergebnisse:

Tabelle 10, Die den Werten von x/a und y/a entsprechenden Werte von $\overline{w}'$ für den fünften Oberton.

y/a \ x/a	1/16	2/16	3/16	4/16	5/16	6/16	7/16	8/16
1/16	0,6470	0,8552	0,6692	0,1097	-0,4947	-0,8166	-0,6058	0,0000
2/16	0,8552	1,4326	1,5401	0,9775	0,1153	-0,5324	-0,5252	0,0000
3/16	0,6692	1,5401	1,9452	1,5010	0,5490	-0,2701	-0,4194	0,0000
4/16	0,1097	0,9775	1,5010	1,2108	0,3663	-0,3593	-0,4591	0,0000
5/16	-0,4947	0,1153	0,5490	0,3663	-0,2611	-0,6853	-0,6125	0,0000
6/16	-0,8166	-0,5324	-0,2701	-0,3593	-0,6853	-0,8879	-0,6356	0,0000
7/16	-0,6058	-0,5252	-0,4194	-0,4591	-0,6125	-0,6356	-0,4233	0,0000
8/16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Abb. 13 stellt die aus diesen Grössen von $\overline{w}'$ gebildeten Schichtlinien der $\overline{w}'$-Fläche dar. Daraus sieht man, dass es bei dieser Schwingungsart sechs Knotenlinien gibt, von denen zwei mit den beiden Mittellinien des Quadrats übereinstimmen, während die übrigen vier symmetrisch zu den beiden Diagonalen liegen.

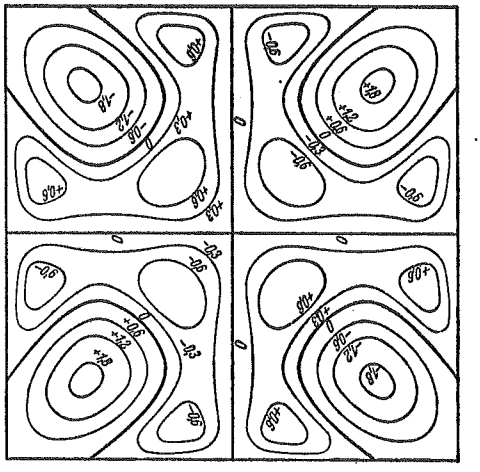


Abb. 13. Schichtlinien der $\overline{w}'$-Fläche für den fünften Oberton.

III. Die Druckknickung.

1. Allgemeines. In dem zweiten Beispiel wollen wir uns jetzt mit der Untersuchung der durch Randdrucke belasteten schwingungsfreien Rechteckplatte beschäftigen.

Da hierbei $\mu = 0$ ist, so erhält man aus (8a) und (8b)

$$\left.\begin{aligned} \rho_{mn} &= \left(m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\right)^2 - m^2P - \frac{a^4}{b^4}n^2Q\,, \\ &= (m^2+\lambda_n^2)(m^2+\lambda_n'^2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(72a)}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{matrix}\lambda_n^2\\ \lambda_n'^2\end{matrix}\right\} = \frac{a^2}{b^2}n^2 - \frac{P}{2} \pm \sqrt{\frac{P^2}{4} - \frac{a^2}{b^2}n^2\left(P - \frac{a^2}{b^2}Q\right)}\,, \\ &\lambda_n^2 - \lambda_n'^2 = 2\sqrt{\frac{P^2}{4} - \frac{a^2}{b^2}n^2\left(P - \frac{a^2}{b^2}Q\right)}\,; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(72b)}$$

$$\left.\begin{aligned} \rho'_{mn} &= \left(n^2 + \frac{b^2}{a^2}m^2\right)^2 - n^2Q - \frac{b^4}{a^4}m^2P\,, \\ &= (n^2 + \lambda_m^2)(n^2 + \lambda_m'^2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(73a)}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{matrix}\lambda_m^2\\ \lambda_m'^2\end{matrix}\right\} = \frac{b^2}{a^2}m^2 - \frac{Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} - \frac{b^2}{a^2}m^2\left(Q - \frac{b^2}{a^2}P\right)}\,, \\ &\lambda_m^2 - \lambda_m'^2 = 2\sqrt{\frac{Q^2}{4} - \frac{b^2}{a^2}m^2\left(Q - \frac{b^2}{a^2}P\right)}\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(73b)}$$

Die weiteren Formeln für diesen Knickungsfall, welche den allgemeinen Formeln (11) bis (37d) entsprechen, können unmittelbar aus den letzteren mit $T = 0$ sowie mit Einführung der oben angegebenen Ausdrücke für λ_n, λ'_n, λ_m und λ'_m ermittelt werden.

Es ist leicht ersichtlich, dass die deformierte Mittelfläche der Platte durch die Randdruckkräfte insofern es ihre Form betrifft ganz ähnlich ist wie die bei der Biegungsschwingung. So knickt die Platte je nach ihren Randbedingungen symmetrisch, ungerade symmetrisch oder unsymmetrisch in der x- oder y-Richtung; als Werte der Zeiger $m(=r)$ und $n(=s)$ sind dementsprechend die ungeraden Zahlen 1, 3, 5 ..., die geraden 2, 4, 6 ... oder die natürlichen Zahlen 1, 2, 3 ... zu nehmen. Der praktisch wichtigste Wert der Knicklasten ist der kleinste kritische Randdruck, unter welchem die ausgeknickte Mittelfläche der Platte eine einfache Wellenform ohne Knotenlinie bildet. Beschränken wir das Problem auf solche Fälle, so müssen wir den Zeigern $m(=r)$ bzw. $n(=s)$ die ganzen Zahlen 1, 3, 5 ... oder 1, 2, 3 ... geben, je nachdem die gegenüberliegenden Seiten $x = 0$ und $x = a$ bzw. $y = 0$ und $y = b$ unter denselben Randbedingungen stehen oder nicht.

2. **Die vierseitig frei aufliegende Platte** (Abb. 2 I). Analog wie bei den Schwingungsfällen erhält man für diese Platte

$$\rho_{mn} = \left(m^2 + \frac{a^2}{b^2}n^2\right)^2 - m^2P - \frac{a^4n^2}{b^4}Q = 0\,,$$

oder bekanntlich

$$P=\frac{\left(m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\right)^2}{m^2+\frac{qa^2}{pb^2}n^2}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (74)$$

Der kleinste Wert von P geht aus dieser Formel mit $m=n=1$ hervor:

$$\left.\begin{aligned} P&=\frac{\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)^2}{1+\frac{qa^2}{pb^2}}, \\ &=2\text{, wenn } a=b\text{, } q=p\text{.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (75)$$

Daraus folgt auch

$$\lim_{b\to\infty} P=1 \quad \text{oder} \quad p_{min}=\frac{\pi^2 N}{a^2}.$$

Dies ist die Eulersche Knickformel für den an beiden Enden frei drehbar gelagerten geraden Stab.

3. Die auf der Seite $x=0$ vollkommen eingespannte und auf den übrigen drei Seiten frei aufliegende Platte (Abb. 2 II). Wegen des unsymmetrischen bzw. symmetrischen Verlaufs der elastischen Linie in der x- bzw. y-Richtung hat man den Zeigern $m(=r)$ die Zahlen 1, 2, 3 ... und den anderen $n(=s)$ dagegen 1, 3, 5 ... zuzuordnen. Damit und mit den entsprechenden Werten von c_m, c'_m, d_n und d'_n ergibt sich aus (13a) und (14a), wie beim Schwingungsfalle

$$I_n \equiv \lambda_n \operatorname{Ctg} \pi\lambda_n - \lambda'_n \operatorname{Ctg} \pi\lambda'_n = 0.$$

Für die Platte mit vierseitig gleichmässig verteilten Randdrucken $q=p$ $\left(P=\frac{a^2}{b^2}Q\right)$ wird aus (72b)

$$\lambda_n=\frac{a}{b}n, \qquad \lambda'_n=\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2-P}.$$

Folglich kommt

$$\frac{a}{b}n \operatorname{Ctg} \frac{\pi a}{b}n - \sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2-P}\operatorname{Ctg}\pi\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2-P}=0. \quad \ldots\ldots \quad (76)$$

Der kleinste Wert von P kann durch Auflösung dieser Gleichung mit $n = 1$ ermittelt werden. Für die quadratische Platte erhält man so

$$P = 2{,}6627 \,. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (77)$$

Multipliziert man die Gleichung (76) mit π und nimmt den Grenzwert für $b = \infty$, so geht die Beziehung

$$1 - \pi\sqrt{P}\operatorname{ctg}\pi\sqrt{P} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (78)$$

hervor. Dies ist die Knickformel für den an einem Ende vollkommen eingespannten und am anderen drehbar gelagerten geraden Stab. Man findet daraus

$$P = 2{,}0457$$

als ihre kleinste Wurzel.

4. **Die auf den zwei benachbarten Seiten $x = 0$ und $y = 0$ vollkommen eingespannte und auf den anderen zwei Seiten frei aufliegende Platte** (Abb. 2 III). In diesem Falle knickt die Platte unsymmetrisch in beiden Achsenrichtungen aus, und für alle Zeiger m, r, n und s sind die ganzen Zahlen 1, 2, 3 ... zu nehmen.

Da nun die Randbedingungen dieser Platte durch

$$c_m = d_n = 0 \,, \qquad c'_m = d'_n = \frac{3}{2}$$

definiert werden, so folgt aus (9)

$$A_n = A'_n = -\frac{9}{n^2\pi^2}\sum_r\sum_s A_{rs} + \frac{3}{2}\sum_r A_{rn} \,,$$

$$B_m = B'_m = -\frac{9}{m^2\pi^2}\sum_r\sum_s A_{rs} + \frac{3}{2}\sum_s A_{ms} \,.$$

Damit geht (13a) bzw. (17a) über in

$$\left.\begin{aligned} &A_n I_n + \frac{2n^2(\lambda_n^2 - \lambda_n'^2)}{\pi}\sum_r \frac{B_r}{\rho'_{rn}} = 0 \\ \text{bzw.} \qquad &B_m I_m + \frac{2m^2(\lambda_m^2 - \lambda_m'^2)}{\pi}\sum_s \frac{A_s}{\rho_{ms}} = 0 \,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (79)$$

Für den Sonderfall, wo $q = p\left(Q = \frac{a^2}{b^2}P\right)$ ist, ergibt sich daher

$$\left.\begin{aligned} A_n+\frac{2n^2P}{\pi I_n}\sum_r\frac{B_r}{\rho'_{rn}}&=0\,,\\ B_m+\frac{2b^2m^2P}{\pi a^2 I_m}\sum_s\frac{A_s}{\rho_{ms}}&=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (80)$$

mit

$$\left.\begin{aligned} I_n&=\frac{a}{b}n\,\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi a}{b}n-\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2-P}\,\mathfrak{Ctg}\,\pi\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2-P}\,,\\ I_m&=\frac{b}{a}m\,\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi b}{a}m-\frac{b}{a}\sqrt{m^2-P}\,\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi b}{a}\sqrt{m^2-P}\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (81)$$

Durch Elimination von B_r in der ersten Gleichung (80) ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} &A_n-\sum_s K_{ns}A_s=0\,,\\ &K_{ns}=\frac{4b^2n^2P^2}{\pi^2a^2I_n}\sum_r\frac{r^2}{I_r\rho_{rs}\rho'_{rn}}\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (82)$$

Für die durch gleiche Randdrucke $q=p$ belastete quadratische Platte lässt sich der Ausdruck für K_{ns} wie folgt vereinfachen:

$$\begin{aligned} K_{ns}&=-\frac{2n^2P}{\pi I_n\rho_{ns}}\\ &=-\frac{2n^2P}{\pi(n^2+s^2)(n^2+s^2-P)(n\,\mathfrak{Ctg}\,n\pi-\sqrt{n^2-P}\,\mathfrak{Ctg}\,\pi\sqrt{n^2-P})}\,. \end{aligned}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (83)$$

In ähnlicher Weise wie in Ziff. 5 des II. Abschnittes können die Werte der Knicklasten P durch die Lösung der Determinantengleichung, die durch Elimination der unendlich vielen Unbekannten A_1, A_2, A_3 ... in der ersten Gleichung (82) gebildet wird, ermittelt werden. Das Rechenergebnis für die quadratische Platte mit gleichen Randdrucken $q=p$ ist

$$P=3{,}2316\,. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (84)$$

5. Die auf den zwei gegenüberliegenen Seiten $x=0$ und $x=a$ vollkommen eingespannte und auf den übrigen Seiten frei aufliegende Platte (Abb. 2 IV). Aus dem analogen Grunde wie für den entsprechenden Schwingungsfall (s. S. 23) ergibt sich für die symmetrische Ausknickung der Platte

$$G_n \equiv \lambda_n \mathfrak{T}\mathfrak{g}\frac{\pi}{2}\lambda_n - \lambda_n' \mathfrak{T}\mathfrak{g}\frac{\pi}{2}\lambda_n' = 0 .$$

Für den Sonderfall, dass die Platte durch die gleichen Randdrucke $q = p$ beansprucht wird, ist wie früher

$$\lambda_n = \frac{a}{b}n , \qquad \lambda_n' = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2 - P} .$$

Damit erhält man

$$\frac{a}{b}n \,\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,\frac{\pi a}{2b}n - \sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2 - P}\,\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2 - P} = 0 , \quad \ldots\ldots \text{(85)}$$

oder für $P'\left(= \frac{pb^2}{N\pi^2} = \frac{b^2}{a^2}P \right)$

$$n \,\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,\frac{\pi a}{2b}n - \sqrt{n^2 - P'}\,\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,\frac{a\pi}{2b}\sqrt{n^2 - P'} = 0 . \quad \ldots\ldots\ldots \text{(86)}$$

Die kleinste Knicklast P bzw. P' ist die niedrigste Wurzel der Gleichung (85) bzw. (86) mit $n = 1$. Die wirkliche Durchrechnung liefert die in folgender Tabelle zusammengestellten Ergebnisse.

Tabelle 11. Die den Werten von b/a bzw. a/b entsprechenden Werte von P bzw. P' für die Rechteckplatte mit $q = p$.

b/a für P a/b für P'	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	∞
P	5,924	3,830	3,768	3,825	3,872	3,905	4,000
P'	15,299	3,830	2,010	1,481	1,273	1,174	1,000

Abb. 14 zeigt, wie sich die Werte von P und P' abhängig von b/a bzw. a/b ändern. Daraus sieht man, dass die Grösse von P sich für die grösseren Werte von b/a als rund 1 immer nur ein wenig ändert und bemerkenswerterweise nie den Grenzwert $P = 4$ für $b = \infty$, d.h. die Knicklast für den Plattenstreifen mit einer konstanten Breite a übersteigt. Es ist ganz natürlich, dass P' für $a/b = \infty$ mit der Knicklast $P' = 1$ für den an beiden Enden frei gestützten geraden Stabes übereinstimmt.

Reissner[1] hat die Knickungsfälle der durch die parallel zu nur einem Seitenpaar wirkenden Randdrucke beanspruchten Rechteckplatte

(1) **H. Reissner,** Zentralbl. Bauverw. Berlin **29** (1909) S. 93.

ausführlich untersucht, beschränkt aber auf den Fall, dass die Platte auf mindestens zwei gegenüberliegenden Seiten frei gestützt ist.

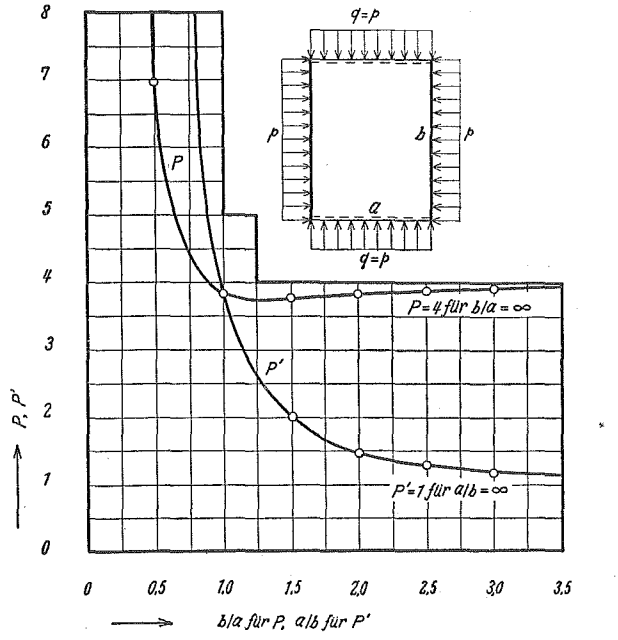


Abb. 14. Werte von P bzw. P' abhängig von b/a bzw. a/b.

6. Die auf den drei Seiten $x = 0$, $y = 0$ und $y = b$ vollkommen eingespannte und auf der einzigen übrigen Seite frei aufliegende Platte (Abb. 2 V). Die einfachste Knickungsfläche dieser Platte ist unsymmetrisch in der x-Richtung dagegen symmetrisch in der y-Richtung. Zur Ausrechnung der kleinsten Knicklast muss man daher den Zeigern $m(=r)$ die ganzen Zahlen 1, 2, 3 ... und den anderen $n(=s)$ die Werte 1, 3, 5 ... geben.

Den gegebenen Randbedingungen genügen nun die Werte

$$c_m = 0\,, \qquad c'_m = \frac{3}{2}\,,$$

$$d_n = -1-2(-1)^n = 1\,, \qquad d'_n = 2+(-1)^n = 1\,.$$

Durch Einführung dieser Werte in (9) erhält man

$$A_n = A'_n = -\frac{12}{n^2\pi^2}\sum_r\sum_s A_{rs} + \frac{3}{2}\sum_r A_{rn}\,,$$

$$B_m = -\frac{12}{m^2\pi^2}\sum_r\sum_s A_{rs} + 2\sum_s A_{ms}\,,$$

$$B'_m = 0\,.$$

Somit folgt aus (13a) und (19a)

$$\left.\begin{aligned} &A_n + \frac{2n^2(\lambda_n^2-\lambda_n'^2)}{\pi I_n}\sum_r \frac{B_r}{\rho'_{rn}} = 0\,,\\ &B_m + \frac{4m^2(\lambda_m^2-\lambda_m'^2)}{\pi G_m}\sum_s \frac{A_s}{\rho_{ms}} = 0\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (87)$$

Durch Elimination von $B_r(=B_m)$ kommt

$$\left.\begin{aligned} &A_n - \sum_s K_{ns}A_s = 0\,,\\ &K_{ns} = \frac{8n^2(\lambda_n^2-\lambda_n'^2)}{\pi^2 I_n}\sum_r \frac{r^2(\lambda_r^2-\lambda_r'^2)}{G_r\rho_{rs}\rho'_{rn}}\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (88)$$

Der Ausdruck für I_n bzw. G_m ist derselbe wie in (14a) mit Werten von λ_n und λ'_n aus (72b) bzw. (19b) mit Werten von λ_m und λ'_m aus (73b). Für gleichmässig verteilte Randdrucke $q=p$ ist

$$\lambda_n^2-\lambda_n'^2 = P\,, \qquad \lambda_m^2-\lambda_m'^2 = Q = \frac{b^2}{a^2}P\,,$$

und es gilt

$$\left.\begin{aligned} I_n &= \frac{a}{b}n\,\mathfrak{Ctg}\,\frac{\pi a}{b}n - \sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2-P}\;\mathfrak{Ctg}\,\pi\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2-P}\,,\\ G_m &= \frac{b}{a}m\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi b}{2a}m - \frac{b}{a}\sqrt{m^2-P}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi b}{2a}\sqrt{m^2-P}\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (89)$$

Die wirkliche Durchrechnung für die quadratische Platte mit $q=p$ liefert

$$P = 4{,}3144 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (90)$$

als den niedrigsten Wert von P. Das Rechenverfahren wird auch hier unterdrückt, weil es ganz ähnlich ist wie in Ziff. 5 des II. Abschnittes.

7. Die vierseitig vollkommen eingespannte Platte (Abb. 2 VI). Da hierbei der gesuchte kleinste Wert von P zu der in den beiden Achsenrichtungen symmetrischen Ausknickungsfläche der Platte ge-

hört, so muss man den beiden Zeigern $m(=r)$ und $n(=s)$ die ungeraden Zahlen 1, 3, 5 ... geben. Diese Beschränkung für die Zeiger gibt

$$c_m = c'_m = d_n = d'_n = 1 ;$$

dementsprechend ergibt sich aus (9)

$$A_n = -\frac{16}{n^2\pi^2}\sum_r\sum_s A_{rs} + 2\sum_r A_{rn} , \qquad A'_n = 0 ,$$

$$B_m = -\frac{16}{m^2\pi^2}\sum_r\sum_s A_{rs} + 2\sum_s A_{ms} , \qquad B'_m = 0 .$$

Somit schreiben sich die Formeln (15a) und (19a) wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} A_n + \frac{4n^2(\lambda_n^2-\lambda_n'^2)}{\pi G_n}\sum_r \frac{B_r}{\rho'_{rn}} &= 0 , \\ B_m + \frac{4m^2(\lambda_m^2-\lambda_m'^2)}{\pi G_m}\sum_s \frac{A_s}{\rho_{ms}} &= 0 . \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (91)$$

Durch Elimination von B_r in der ersten Gleichung (91) erhält man

$$\left.\begin{aligned} A_n - \sum_s K_{ns}A_s &= 0 , \\ K_{ns} = \frac{16n^2(\lambda_n^2-\lambda_n'^2)}{\pi^2 G_n}\sum_r \frac{r^2(\lambda_r^2-\lambda_r'^2)}{G_r\rho_{rs}\rho'_{rn}} &. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (92)$$

Der Ausdruck für G_n bzw. G_m ist derselbe wie in (16a) mit Werten von λ_n und λ'_n aus (72b) bzw. in (19b) mit Werten von λ_m und λ'_m aus (73b).

Als Anwendungsbeispiel für die Ausrechnung der Werte von P wählen wir jetzt den Fall, dass die Platte durch Randrucke von zwei verschiedenen Verteilungsarten belastet wird.

1) Die durch vierseitig gleichmässig verteilte Randdrucke $q = p\left(Q = \frac{b^2}{a^2}P\right)$ belastete Platte. Da für diesen Fall

$$\lambda_n = \frac{a}{b}n , \qquad \lambda'_n = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2 - P} , \qquad \lambda_n^2 - \lambda_n'^2 = P ,$$

$$\lambda_m = \frac{b}{a}m , \quad \lambda_m'^2 = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}m^2 - Q} = \frac{b}{a}\sqrt{m^2-P} , \quad \lambda_m^2 - \lambda_m'^2 = Q = \frac{b^2}{a^2}P$$

ist, so lautet G_n bzw. G_m ebenso wie (85) bzw. (89), während K_{ns} in (92) durch

$$K_{ns} = \frac{16b^2n^2P^2}{\pi^2a^2G_n}\sum_r \frac{r^2}{G_r\rho_{rs}\rho'_{rn}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (93)$$

ausgedrückt wird. Für die quadratische Platte sind die Zeiger $m(=r)$ und $n(=s)$ vertauchbar, und der Ausdruck für K_{ns} lässt sich wie folgt vereinfachen:

$$K_{ns} = -\frac{4n^2(\lambda_n^2-\lambda_n'^2)}{\pi G_n\rho_{ns}}$$

$$= -\frac{4n^2P}{\pi(n^2+s^2)(n^2+s^2-P)\left(n\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi}{2}n - \sqrt{n^2-P}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{n^2-P}\right)}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (94)$$

Durch Elimination der unbekannten Beiwerte A_1, A_3, A_5 ... in der ersten Gleichung (92) erhält man die gleiche Determinantengleichung (51) wie für die Biegungsschwingung.

Nun bezeichnen wir mit Δ_1 den Wert des ersten Elementes der gleichen Determinante d.h. von $1-K_{11}$, und mit Δ_2, Δ_3, Δ_4, Δ_5 denjenigen von jeder aus den ersten 2, 3, 4, 5 Zeilen und Spalten bestehenden Determinante. Zum Zwecke der Ermittelung des kleinsten Wertes von P für die durch gleiche Randdrucke $q=p$ belastete quadratische Platte rechnet man zunächst jede Grösse der obengenannten Determinanten der Reihe nach aus, welche den versuchsweise gewählten Werten von $P=5{,}0$; $5{,}1$; $5{,}2$; $5{,}3$ und $5{,}4$ entsprechen. Die Ergebnisse sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

Tabelle 12. Werte der den verschiedenen Grössen von P entsprechenden Determinanten.

$P=\frac{pa^2}{N\pi^2}$	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5
5,0	−0,15688	−0,35301	−0,39742	−0,42999	−0,45677
5,1	−0,05132	−0,21747	−0,24551	−0,26566	−0,28221
5,2	0,03898	−0,10175	−0,11578	−0,12532	−0,13313
5,3	0,11714	−0,00182	−0,00372	−0,00408	−0,00434
5,4	0,18548	0,08531	0,09403	0,10168	0,10802
Wurzeln	5,15498	5,30196	5,30357	5,30363	5,30363

Aus dieser Tabelle erkennt man leicht, dass die Wurzel jeder Determinantengleichung ausser $\Delta_1 = 0$ nur ein wenig grösser ist als 5,3. Die in der untersten Reihe der Tabelle angeschriebenen Ziffern sind die Werte der Wurzeln, welche mit Hilfe der Lagrangeschen Interpolationsformel ausgerechnet sind. Somit können wir

$$P = 5{,}3036 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (95)$$

als den richtigen Wert der kleinsten Knicklast annehmen. Dies stimmt ganz befriedigend mit den von **Sezawa,**[1] **Taylor,**[2] **Fraxén,**[3] **Trefftz**[4] sowie von **Weinstein**[5] ausgerechneten Werten überein.

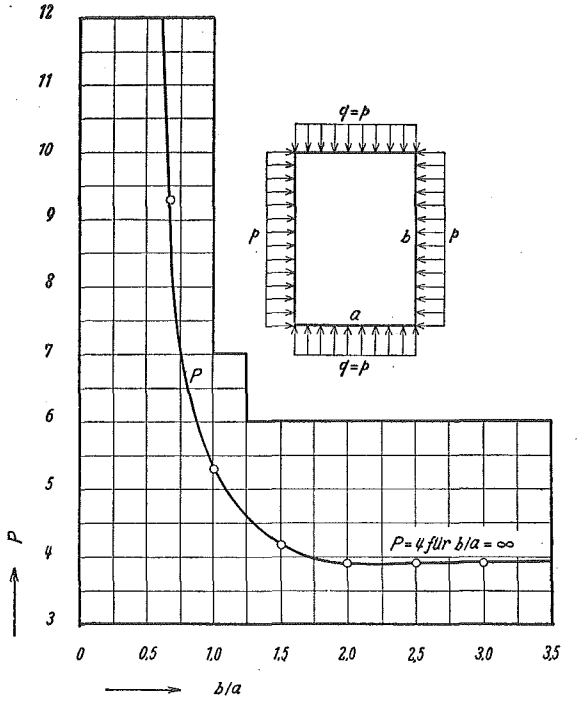


Abb. 15. Werte von P abhängig von b/a.

Ferner zeigt die Tabelle, dass die Konvergenz der Zahlenfolge der den Determinantengleichungen $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$ ... entsprechenden Wurzeln sehr gut ist. Man könnte also einen hinreichend genauen

(1) **K. Sezawa,** J. Aer. Res. Inst. Tokyo **11** (1936) S. 409.
(2) **I. Taylor,** Z. angew. Math. Mech. Berlin **13** (1933) S. 147.
(3) **H. Faxén,** Z. angew. Math. Mech. Berlin **15** (1935) S. 268.
(4) **E. Trefftz,** Z. angew. Math. Mech. Berlin **15** (1935) S. 337.
(5) **A. Weinstein,** J. Lond. Math. Soc. **10** (1935) S. 184.

Wert der Knicklast erhalten, wenn man nur zwei oder drei Zeilen und Spalten der Determinante nähme. Das gilt auch für die früheren Fälle in Ziff. 4 und 6 dieses Abschnittes. Aber man muss hierbei beachten, dass das nicht im allgemeinen für die Platten mit ungleichen Seitenverhältnissen zutrifft; in der Tat, je mehr das Verhältnis b/a zunimmt, desto langsamer konvergiert die Zahlenfolge. Die wirkliche Durchrechnung zeigt, dass die Gleichung $\Delta_3 = 0$ einen genügend genauen Wert von P für die Platte mit $b/a \gtrless 3$ gibt. Die folgenden Ziffern sind die Lösungsergebnisse der Gleichung $\Delta_4 = 0$.

Tabelle 13. Die den Werten von b/a entsprechenden Werte von P für die Platte mit $q = p$.

b/a	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	∞
P	5,304	4,118	3,887	3,885	3,892	4,000

Aus Abb. 15 sieht man, wie sich die Werte von P abhängig von b/a ändern.

2) Die durch auf zwei gegenüberliegenden Seiten gleichmässig verteilten Randdrucke $p(q = 0)$ belastete Platte. Für diesen Fall ergibt sich aus (72a) bis (73b)

$$\rho_{mn} = \left(m^2 + \frac{a^2}{b^2} n^2\right)^2 - m^2 P = (m + \lambda_n^2)(m^2 + \lambda_n'^2) ,$$

$$\rho'_{mn} = \left(n^2 + \frac{b^2}{a^2} m^2\right)^2 - \frac{b^4}{a^4} m^2 P = (n^2 + \lambda_m^2)(n^2 + \lambda_m'^2) ,$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda_n^2 \\ \lambda_n'^2 \end{matrix}\right\} = \frac{a^2}{b^2} n^2 - \frac{P}{2} \pm \sqrt{\frac{P^2}{4} - \frac{a^2}{b^2} n^2 P} , \quad \lambda_n^2 - \lambda_n'^2 = 2\sqrt{\frac{P^2}{4} - \frac{a^2}{b^2} n^2 P},$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda_m^2 \\ \lambda_m'^2 \end{matrix}\right\} = \frac{b^2}{a^2}(m^2 \pm m\sqrt{P}) , \qquad \lambda_m^2 - \lambda_m'^2 = \frac{2b^2}{a^2} m\sqrt{P} .$$

Durch Einführung dieser Werte in die vorher angegebenen Formeln kann man die weiteren Berechnungen für den betreffenden Fall durchführen. Man muss aber noch beachten, dass für $P < 4a^2n^2/b^2$ die beiden Argumente λ_n nnd λ'_n komplex werden. Gemäss (22) ergibt sich so für diesen Fall

$$\frac{\lambda_n^2 - \lambda_n'^2}{G_n} = \frac{\mathfrak{Cof}\,\pi\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2 - \frac{P}{4}} + \cos\frac{\pi}{2}\sqrt{P}}{\frac{\mathfrak{Sin}\,\pi\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2 - \frac{P}{4}}}{2\sqrt{\frac{a^2}{b^2}n^2 - \frac{P}{4}}} + \frac{\sin\frac{\pi}{2}\sqrt{P}}{\sqrt{P}}} \cdot \quad \ldots\ldots\ldots \quad (96)$$

Mit Unterdrückung der weiteren Berechnungen sind hier nur die Zahlenergebnisse in Tabelle 14 zusammengestellt.

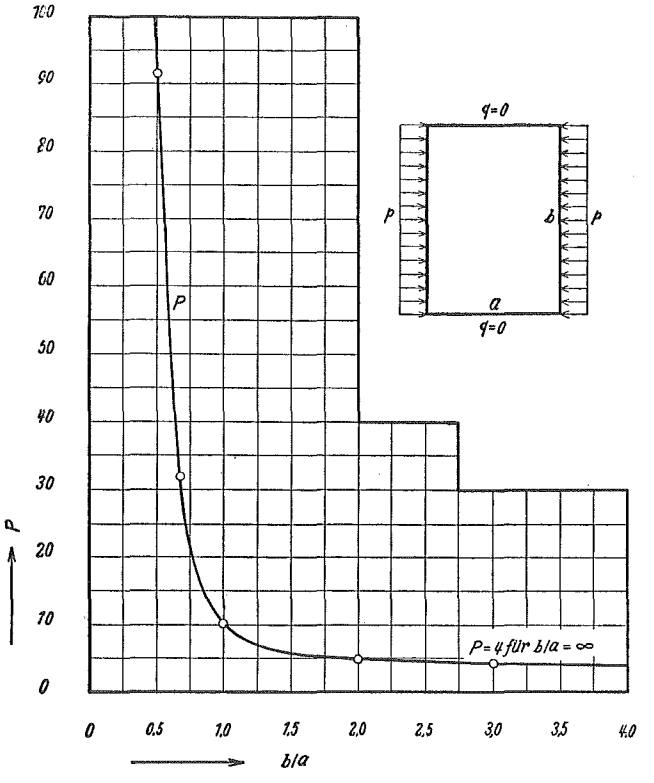


Abb. 16. Werte von P abhängig von b/a.

Tabelle 14. Die den Werten von b/a entsprechenden Werte von P für die Platte mit p $(q = 0)$.

b/a	1/2	2/3	1,0	2,0	3,0	∞
P	91,296	31,930	10,074	4,835	4,282	4,000

Abb. 16 zeigt die Änderung der Grösse von P in Abhängigkeit von b/a. Die von **Sezawa*** ausgerechneten Werte von P sind ein wenig kleiner als jene vom Verfasser.

IV. Die Schubknickung.

1. Allgemeines. Als das letzte Beispiel wollen wir uns jetzt mit den Schubknickungsfällen der schwingungsfreien Platte beschäftigen. Da in diesem Falle $\mu = P = Q = 0$ ist, so geht die allgemeine Gleichung (6) über in

$$A_{mn}\left(m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\right)^2+\frac{4}{m^2\pi^2}\left(\frac{2a^2}{b^2}m^2n^2+\frac{a^4}{b^4}n^4\right)\sum_r A_{rn}((-1)^m c_r-c'_r)$$
$$+\frac{4}{n^2\pi^2}\left(m^4+\frac{2a^2}{b^2}m^2n^2\right)\sum_s A_{ms}((-1)^n d_s-d'_s)\,.$$
$$+\frac{32a^2}{\pi^4b^2}\sum_r\sum_s A_{rs}((-1)^m c_r-c'_r)((-1)^n d_s-d'_s)$$
$$+\frac{8aT}{b\pi^2}\sum_r\sum_s K_{mnrs}A_{rs}=0$$

oder

$$\alpha_{mn}A_{mn}+\sum_r\beta_{mnr}A_{rn}+\sum_s\gamma_{mns}A_{ms}+\sum_r\sum_s\delta_{mnrs}A_{rs}+T\sum_r\sum_s K_{mnrs}A_{rs}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(97a)}$$

mit

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{mn} &= \frac{\pi^2 b}{8a}\left(m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\right)^2,\\
\beta_{mnr} &= \frac{n^2}{2}\left(\frac{2a}{b}+\frac{a^3n^2}{b^3m^2}\right)((-1)^m c_r-c'_r)\,,\\
\gamma_{mns} &= \frac{m^2}{2}\left(\frac{2a}{b}+\frac{bm^2}{an^2}\right)((-1)^n d_s-d'_s)\,,\\
\delta_{mnrs} &= \frac{4a}{\pi^2 b}((-1)^m c_r-c'_r)((-1)^n d_s-d'_s)\,,
\end{aligned}\right\} \quad \text{(97b)}$$

* **K. Sezawa**, J. Aer. Res. Inst. Tokyo **11** (1936) S. 409.

$$
\left.\begin{aligned}
K_{mnrs} = {} & m^2n^2\frac{1-(-1)^{m+r}}{m^2-r^2}\,\frac{1-(-1)^{n+s}}{n^2-s^2} \\
& -n^2\left[\frac{2+(-1)^m}{3}-2\frac{1-(-1)^m}{m^2\pi^2}\right]((-1)^m c_r+c'_r)\frac{1-(-1)^{n+s}}{n^2-s^2} \\
& -m^2\left[\frac{2+(-1)^n}{3}-2\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}\right]((-1)^n d_s+d'_s)\frac{1-(-1)^{m+r}}{m^2-r^2} \\
& +\left[\frac{2+(-1)^m}{3}-2\frac{1-(-1)^m}{m^2\pi^2}\right]\left[\frac{2+(-1)^n}{3}-2\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}\right]\times \\
& \qquad \times((-1)^m c_r+c'_r)((-1)^n d_s+d'_s)\,.
\end{aligned}\right|
$$

Der Vergleich dieser Formeln mit Formeln für die Schwingungs- und Druckknickungsfälle zeigt, dass das Lösungsverfahren obiger Gleichung verschieden ist von demjenigen, welches ich in vorigen Abschnitten zur Ermittelung des Wertes von μ sowie von P angewandt habe. Diese Verschiedenheit beruht wesentlich darauf, dass die Differentialgleichung vierter Ordnung für diesen Fall einen Differentialquotienten von ungerader Ordnung in bezug auf jede Veränderliche, nämlich das Glied $\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}$ enthält. Ferner ist die aus Division von (97a) durch α_{mn} hervorgehende Gleichung als eine unendliche Reihe in bezug auf den Zeiger m oder n summierbar. Aber diese Summierung bringt keine für die Ausführung der weiteren Berechnungen vorteilhaftere Gleichung hervor als (97a), weil es hierbei unmöglich ist, die unbekannten Beiwerte A_{rs} mit zwei unabhängigen Zeigern r und s aus (97a) zu eliminieren. Die Lösungen für die verschiedenen Sonderfälle folgen jetzt.

2. Die vierseitig frei aufliegende Platte. Da hierbei alle Beiwerte c_m, c'_m, d_n und d'_n verschwinden, so lässt sich die Formel (97a) vereinfachen zu

$$
\alpha_{mn}A_{mn}+T\sum_r\sum_s K_{mnrs}A_{rs}=0 \qquad \text{..... (98a)}
$$

mit

$$
\left.\begin{aligned}
\alpha_{mn} &= \frac{\pi^2 b}{8a}\left(m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\right)^2, \\
K_{mnrs} &= m^2n^2\frac{1-(-1)^{m+r}}{m^2-r^2}\,\frac{1-(-1)^{n+s}}{n^2-s^2}\,, \\
&= \frac{4m^2n^2}{(m^2-r^2)(n^2-s^2)} \qquad \binom{m+r}{n+s}\ \text{ungerade}\Big).
\end{aligned}\right\} \text{..... (98b)}
$$

Dies ist nichts anderes als die Formel von **Timoshenko,*** die er mit der Energiemethode abgeleitet hat, und stellt ein System von unendlich vielen homogen linearen Gleichungen für die unbekannten Beiwerte A_{mn} dar.

Die Werte von T können durch Auflösen der aus den Koeffizienten dieser linearen Gleichungen bestehenden Determinantengleichung ermittelt werden. Der praktisch wichtigste Werte der Knicklasten ist die kleinste kritische Schubkraft, unter der die Knickungsfläche der Platte eine einfachste Form bildet. Beschränken wir das Problem nur auf solche Fälle (oder noch allgemeiner auf die Fälle, in denen die elastische Linie jeder Diagonale des Rechtecks sich symmetrisch in bezug auf ihren Mittelpunkt gestaltet), so müssen wir den Summen $m+n$ die geraden Zahlen 2, 4, 6 ... geben. Der Grund dafür ist in Ziff. 3 des I. Abschnittes erwähnt worden. Mit Unterdrückung der weiteren Berechnungen sind hier nur die von **Timoshenko** ausgerechneten niedrigsten Werte von T in folgender Tabelle zusammengestellt.

Tabelle 15. Die den Werten von b/a entsprechenden Werte von T für die vierseitig frei aufliegende Platte. (nach **Timoshenko**)

b/a	1,0	1,2	1,4	1,5	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0
T	9,4	8,0	7,3	7,1	7,0	6,8	6,6	6,3	6,1

3. Die auf den zwei gegenüberliegenden Seiten $x = 0$ und $x = a$ vollkommen eingespannte und auf den übrigen Seiten frei aufliegende Platte (Abb. IV). Aus den Randbedingungen dieser Platte ergibt sich

$$c_m = -1-2(-1)^m , \qquad c'_m = 2+(-1)^m ,$$

$$d_n = d'_n = 0 .$$

* **S. Timoshenko,** Eisenbau Leipzig **12** (1921) S. 147; **S. Timoshenko,** Theory of Elastic Stability, S. 357 bis 363. New York und London 1936. Siehe ferner: **E. Seydel,** Ing.-Arch. Berlin **4** (1933) S. 169; **E. Trefftz** u. **Fr. A. Willers,** Z. angew. Math. Mech. Berlin **16** (1936) S. 336; **Fr. A. Willers,** Z. angew. Math. Mech. Berlin **18** (1938) S. 93.

Folglich wird

$$\beta_{mnr} = -\frac{n^2}{2}\left(\frac{2a}{b}+\frac{a^3n^2}{b^3m^2}\right)(1+(-1)^{m+r})(2+(-1)^r)\,,$$

$$\gamma_{mns} = \delta_{mnrs} = 0\,,$$

$$K_{mnrs} = \left[\frac{m^2n^2}{(m^2-r^2)(n^2-s^2)}\right.$$

$$\left.-n^2\left(\frac{2+(-1)^m}{3}-2\frac{1-(-1)^m}{m^2\pi^2}\right)\right](1-(-1)^{m+r})(1-(-1)^{n+s})\,.$$

Damit geht Gleichung (97a) für A_{mn} über in

$$\alpha_{mn}A_{mn}+\sum_r\beta_{mnr}A_{rn}+\sum_r\sum_s K_{mnrs}A_{rs}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(99a)}$$

mit

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_{mn} = \frac{\pi^2 b}{8a}\left(m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\right)^2,\\
&\beta_{mnr} = -n^2\left(\frac{2a}{b}+\frac{a^3n^2}{b^3m^2}\right)(2+(-1)^r) \quad (m+r \text{ gerade})\,,\\
&K_{mnrs} = 4\left[\frac{m^2n^2}{(m^2-r^2)(n^2-s^2)}\right.\\
&\qquad\left.-n^2\left(\frac{2+(-1)^m}{3}-2\frac{1-(-1)^m}{m^2\pi^2}\right)\frac{2+(-1)^r}{n^2-s^2}\right]\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\begin{pmatrix} m+r \\ n+s \end{pmatrix} \text{ ungerade}\Big)\,.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{(99b)}$$

Wie man aus diesen Formeln sieht, müssen die Summen $m+r$ für β_{mnr} immer gerade, die anderen $m+r$ und $n+s$ für K_{mnrs} dagegen ungerade sein. Ausser diesen Beschränkungen für $m+r$ und $n+s$ hat man noch darauf zu achten, dass die Summen $m+n$ gerade oder ungerade sein müssen, je nachdem die Diagonale des Rechtecks sich symmetrisch oder ungerade symmetrisch in bezug auf ihren Mittelpunkt ausknickt. Für die niedrigsten Werte von T sind also die Summen $m+n$ gerade und daher geht aus (99a) folgendes System von linearen Gleichung für A_{mn} hervor:

	Erste Gruppe									Zweite Gruppe				
	A_{11}	A_{13}	A_{31}	A_{33}	A_{15}	A_{51}	A_{17}	A_{71}	...	A_{22}	A_{24}	A_{42}	A_{26}	...
Erste Gruppe	$\alpha_{11}+\beta_{111}$	0	β_{113}	0	0	β_{115}	0	β_{117}	...	TK_{1122}	TK_{1124}	TK_{1142}	TK_{1126}	$\ldots=0$
	0	$\alpha_{13}+\beta_{131}$	0	β_{133}	0	0	0	0	...	TK_{1322}	TK_{1324}	TK_{1342}	TK_{1326}	$\ldots=0$
	β_{311}	0	$\alpha_{31}+\beta_{313}$	0	0	β_{315}	0	β_{317}	...	TK_{3122}	TK_{3124}	TK_{3142}	TK_{3126}	$\ldots=0$
	0	β_{331}	0	$\alpha_{33}+\beta_{333}$	0	0	0	0	...	TK_{3322}	TK_{3324}	TK_{3342}	TK_{3326}	$\ldots=0$
	0	0	0	0	$\beta_{15}+\beta_{151}$	0	0	0	...	TK_{1522}	TK_{1524}	TK_{1542}	TK_{1526}	$\ldots=0$
	β_{511}	0	β_{513}	0	0	$\alpha_{51}+\beta_{515}$	0	β_{517}	...	TK_{5122}	TK_{5124}	TK_{5142}	TK_{5126}	$\ldots=0$
	0	0	0	0	0	0	$\alpha_{17}+\beta_{171}$	0	...	TK_{1722}	TK_{1724}	TK_{1742}	TK_{1726}	$\ldots=0$
	β_{711}	0	β_{713}	0	0	β_{715}	0	$\alpha_{71}+\beta_{717}$	...	TK_{7122}	TK_{7124}	TK_{7142}	TK_{7126}	$\ldots=0$
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	$\ldots=0$
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	$\ldots=0$
Zweite Gruppe	TK_{2211}	TK_{2213}	TK_{2231}	TK_{2233}	TK_{2215}	TK_{2251}	TK_{2217}	TK_{2271}	...	$\alpha_{22}+\beta_{222}$	0	β_{224}	0	$\ldots=0$
	TK_{2411}	TK_{2413}	TK_{2431}	TK_{2433}	TK_{2415}	TK_{2451}	TK_{2417}	TK_{2471}	...	0	$\alpha_{24}+\beta_{242}$	0	0	$\ldots=0$
	TK_{4211}	TK_{4213}	TK_{4231}	TK_{4233}	TK_{4215}	TK_{4251}	TK_{4217}	TK_{4271}	...	β_{422}	0	$\alpha_{42}+\beta_{424}$	0	$\ldots=0$
	TK_{2611}	TK_{2613}	TK_{2631}	TK_{2633}	TK_{2615}	TK_{2651}	TK_{2617}	TK_{2671}	...	0	0	0	$\alpha_{26}+\beta_{262}$	$\ldots=0$
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	$\ldots=0$
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	$\ldots=0$

(100)

Die Werte von T können durch die Lösung der durch Elimination von A_{mn} in diesen Gleichungen hervorgehenden Gleichung ermittelt werden.

Die durch (100) dargestellte Anordnung der unbekannten Beiwerte A_{mn} ist für die Durchführung der weiteren numerischen Rechnungen deswegen am bequemsten, weil jedes A_{mn} in der ersten Gruppe (ohne T) der Reihe nach sehr leicht eliminiert werden kann. Ferner sind die Beiwerte A_{mn} in jeder Gruppe vorteilhaft so anzuorden, dass die Koeffizienten $\alpha_{mn} + \beta_{mnr}$ auf der Diagonale sich nach ihrer Grösse geordnet in der Reihenfolge von links oben nach rechts unten befinden, damit man aus den so hergestellten Gleichungen, deren Glieder von hinlänglich grossen Werten m und n an (je nach der Grösse des Seitenverhältnis b/a der Platte) vernachlässigt werden, möglichst genaue Werte von T ermitteln kann. So zeigen die wirklichen Rechnungen zum Beispiel, dass die Glieder mit A_{51} kleinere Einflüsse auf die Genauigkeit von T haben, als die Glieder mit A_{17} sowie mit A_{19}, wenn das Verhältnis b/a grösser ist als 1,5.

Als Rechenbeispiel wählen wir die Platte, deren Seitenverhältnis $b/a = 2{,}0$ ist. Vernachlässigen wir alle A_{mn} ausser A_{11}, A_{13}, A_{31}, A_{33}, A_{15}, A_{17} und A_{19} in der ersten Gruppe und alle ausser A_{22}, A_{24} und A_{26} in der zweiten, so erhalten wir aus (100) zehn homogene lineare Gleichungen für zehn unbekannte Beiwerte A_{mn}. Daraus eliminiert man zunächst alle A_{mn} in der ersten Gruppe und dann weiter alle A_{mn} in der zweiten, so dass zuletzt folgende Determinantengleichung kommt:

$$\Delta_3 \equiv \begin{vmatrix} 48{,}18503 - 0{,}34508\,T^2 & 0{,}08917\,T^2 & 0{,}02893\,T^2 \\ 0{,}35668\,T^2 & 85{,}91367 - 0{,}52787\,T^2 & -0{,}02880\,T^2 \\ 0{,}26045\,T^2 & -0{,}06480\,T^2 & 187{,}49079 - 0{,}32510\,T^2 \end{vmatrix} = 0$$

Bezeichnet man mit Δ_1 das erste Element dieser Determinante und mit Δ_2 die Determinante aus den ersten zwei Zeilen und Spalten, so findet man die Wurzeln

1. aus $\Delta_1 = 0$: $T_1 = \pm 11{,}817$,
2. aus $\Delta_2 = 0$: $T_2 = \pm 10{,}276$, $T_2' = \pm 16{,}148$,
3. aus $\Delta_3 = 0$: $T_3 = \pm 10{,}212$, $T_3' = \pm 16{,}127$, $T_3'' = \pm 24{,}955$.

Die Wurzeln T_1, T_2 und T_3 gehören zum ersten Eigenwert, nämlich zu dem gesuchten niedrigsten Wert von T, und die anderen T_2', T_3'

bzw. T_3'' zum zweiten bzw. dritten Eigenwert für die Knickungsfamilie mit symmetrischen elastischen Linien in den beiden Diagonalenrichtungen. Gemäss der Knickungseigenschaft der durch Schubkräfte beanspruchten Rechteckplatte ist es ganz natürlich, dass die Gleichung $\Delta = 0$ immer Paare von Wurzeln mit gleicher Grösse und entgegengesetztem Vorzeichen hat.

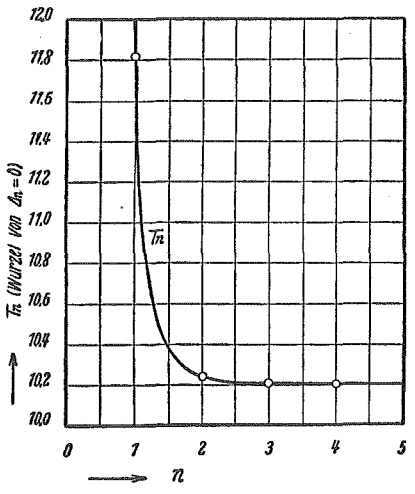


Abb. 17. Darstellung der Schnelligkeit der Konvergenz der Zahlenfolge $T_1, T_2, T_3 \ldots$.

Aus den ermittelten Rechenergebnissen oder aus Abb. 17 erkennt man, dass die Konvergenz der Zahlenfolge $T_1, T_2, T_3 \ldots$ sehr gut ist; aus $\Delta_4 = 0$ würde mittels der Newtonschen Interpolationsformel der gleiche Wert 10,212 folgen, wie T_3 aus $\Delta_3 = 0$. Somit kann man $T = 10{,}212$ als den richtigen Wert von T annehmen. Man muss aber beachten, dass die Konvergenz der Zahlenfolge $T_1, T_2, T_3 \ldots$ nicht unter allen Umständen so gut ist wie hier; je mehr das Verhältnis b/a zunimmt, desto langsamer konvergiert die Zahlenfolge.

Analog habe ich die niedrigsten Werte von T für Rechteckplatten mit anderen Seitenverhältnissen ausgerechnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 16 zusammengestellt.

Tabelle 16. Die den Werten von b/a entsprechenden Werte von T.

b/a	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	∞
T	12,28	11,12	10,21	9,81	9,61	8,99

Wenn die Platte sich in der y-Richtung unbegrenzt ausdehnt, so wird sie ein unendlich langer Plattenstreifen mit konstanter Breite a, so dass der Wert von T mit wachsendem b/a gegen 8,99 (nach **Southwell***) strebt. Die Abhängigkeit der Grösse T von b/a zeigt Abb. 18.

* **R. V. Southwell** u. **S. W. Skan,** Proc. Roy. Soc., Lond. **105** (1924) S. 582.

Aus den vorhin ermittelten Werten von T_2' nnd T_3' kann man entnehmen, dass der zweite Eigenwert von T für die Knickungsfamilie mit symmetrischen elastischen Linien in den beiden Diagonalenrichtungen ein wenig kleiner ist als 16,127; man kann $T = 16{,}1$ als einen guten Näherungswert ansehen. Zur Berechnuug der genauen höheren Eigenwerte müsste man natürlich weitere Glieder in den Gleichungen für A_{mn} heranziehen.

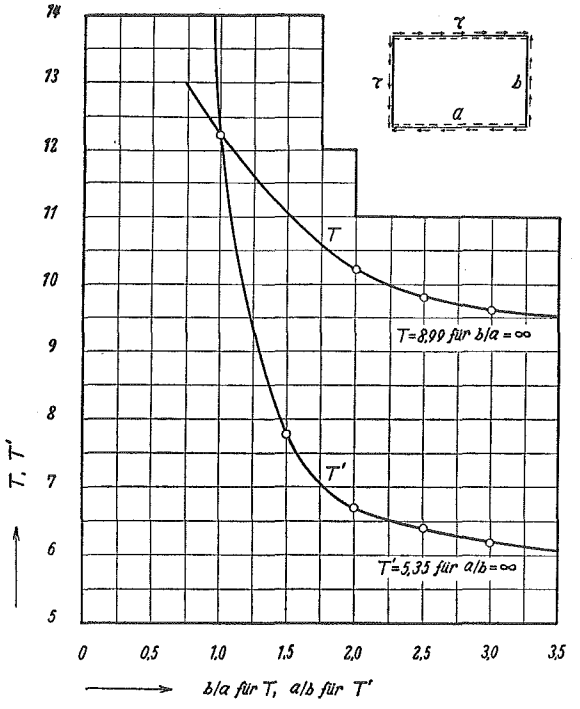


Abb. 18. Werte von T bzw. T' abhängig von b/a bzw. a/b.

Weiter wollen wir uns jetzt mit dem Falle beschäftigen, dass die Platte sich mit konstanter Seitenlänge b in der x-Richtung allmählich ausdehnt. Da man hierfür zweckmässig den Wert von

$$T' = \frac{\tau b^2}{N\pi^2}$$

anstatt von $T\left(\frac{\tau a^2}{N\pi^2}\right)$ berechnet, so formt man die Formeln (99a) und (99b) in

$$\alpha'_{mn}A_{mn} + \sum_r \beta'_{mnr}A_{rn} + T'\sum_r\sum_s K_{mnrs}A_{rs} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (101a)$$

um mit

$$\left.\begin{aligned} \alpha'_{mn} &= \frac{b^2}{a^2}\alpha_{mn} = \frac{\pi^2 a}{8b}\left(\frac{b^2}{a^2}m^2+n^2\right)^2, \\ \beta'_{mnr} &= \frac{b^2}{a^2}\beta_{mnr} = -n^2\left(\frac{2b}{a}+\frac{an^2}{bm^2}\right)(2+(-1)^r) \quad (m+r \text{ gerade}), \\ K_{mnrs} &\text{ als demselben Ausdrucke wie in (99b).} \end{aligned}\right\} \quad (101b)$$

Daraus lassen sich die niedrigsten Werte von T' in ähnlicher Weise berechnen wie vorhin. Tabelle 17 und Abb. 18 zeigen die Ergebnisse.

Tabelle 17. Die den Werten von a/b entsprechenden Werte von T'.

a/b	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	∞
T'	12,28	7,78	6,70	6,40	6,17	5,35

Selbstverständlich muss für die quadratische Platte, d.h. für $a = b$

$$T = T' = 12{,}28$$

sein (s. Tabelle 16). Ferner überzeugt man sich leicht, dass für $a/b = \infty$, also für den Plattenstreifen mit konstanter Breite b im Einklag mit **Southwell**

$$T = 5{,}35$$

ist.

4. Die vierseitig eingespannte Platte (Abb. 2 VI). Durch Einführung der den betreffenden Randbedingungen entsprechenden Werte von c_m, c'_m, d_n und d'_n (5f) in (97a) und (97b) erhält man

$$\alpha_{mn}A_{mn}+\sum_r \beta_{mnr}A_{rn}+\sum_s \gamma_{mns}A_{ms}+\sum_r\sum_s \delta_{mnrs}A_{rs}+\sum_r\sum_s K_{mnrs}A_{rs} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (102a)$$

mit

$$
\left.
\begin{aligned}
\alpha_{mn} &= \frac{\pi^2 b}{8a}\left(m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\right)^2, \\
\beta_{mnr} &= -n^2\left(\frac{2a}{b}+\frac{a^3n^2}{b^3m^2}\right)(2+(-1)^r) \qquad (m+r \text{ gerade}), \\
\gamma_{mns} &= -m^2\left(\frac{2a}{b}+\frac{bm^2}{an^2}\right)(2+(-1)^s) \qquad (n+s \text{ gerade}), \\
\delta_{mnrs} &= \frac{16a}{\pi^2 b}(2+(-1)^r)(2+(-1)^s) \qquad \left(\begin{matrix} m+r \\ n+s \end{matrix} \text{ gerade}\right), \\
K_{mnrs} &= \frac{4m^2n^2}{(m^2-r^2)(n^2-s^2)} \\
&\quad -4n^2\left[\frac{2+(-1)^m}{3}-2\frac{1-(-1)^m}{m^2\pi^2}\right]\frac{2+(-1)^r}{n^2-s^2} \\
&\quad -4m^2\left[\frac{2+(-1)^n}{3}-2\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}\right]\frac{2+(-1)^s}{m^2-r^2} \\
&\quad +4\left[\frac{2+(-1)^m}{3}-2\frac{1-(-1)^m}{m^2\pi^2}\right]\left[\frac{2+(-1)^n}{3}-2\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}\right]\times \\
&\quad \times(2+(-1)^r)(2+(-1)^s) \qquad \left(\begin{matrix} m+r \\ n+s \end{matrix} \text{ ungerade}\right).
\end{aligned}
\right\} \quad (102b)
$$

Ebenso wie im letzten Falle können die niedrigsten Werte von T aus diesen Formeln mit $m+n = 2, 4, 6 \ldots$ ermittelt werden. Man muss aber darauf gefasst sein, dass die wirklichen Rechnungen hier viel mühsamer sind als vorhin; denn kein unbekannter Beiwert A_{mn} in den aus (102a) hervorgehenden Gleichungen hat Nullkoeffizient. Mit Unterdrückung der Einzelrechnungen sind die Ergebnisse in folgender Tabelle zusammengestellt.

Tabelle 18. Die den Werten von b/a entsprechenden Werte von T.

b/a	1,0	1,5	2,0	2,5	∞
T	14,58	11,40	10,96	10,85	8,99

Die Grösse $T = 8{,}99$ für $b/a = \infty$, d.h. für den Plattenstreifen mit konstanter Breite a ist natürlich gleich derjenigen für den entsprechenden Fall in Ziff. 3 dieses Abschnittes. Aus Abb. 19 sieht man, wie sich die Grösse von T mit b/a ändert.

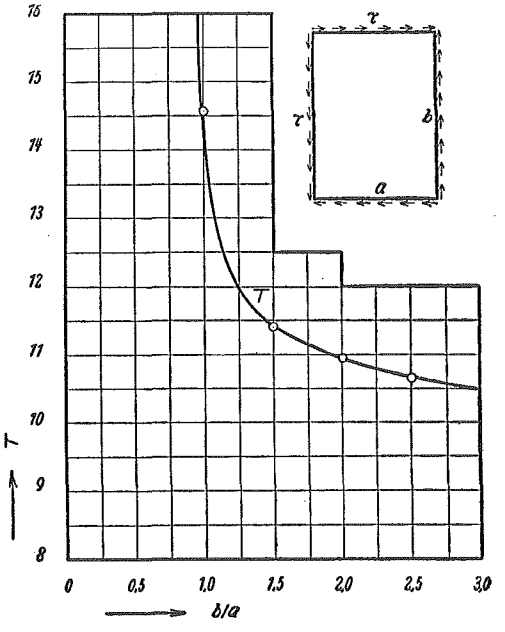


Abb. 19. Werte T abhängig von b/a.

5. Die vierseitig eingespannte Rechteckplatte unter Zusammenwirkung von Druck- und Schubkräften. Die Gleichung der unbekannten Beiwerte A_{mn} für diesen Fall kann leicht aus (6) mit $\mu = 0$ und den den gegebenen Randbedingungen entsprechenden Werten von c_r, c'_r, d_s und d'_s ermittelt werden. So lautet

$$a_{mn}A_{mn}+\sum_r \beta_{mnr}A_{rn}+\sum_s \gamma_{mns}A_{ms}+\sum_r\sum_s \delta_{mnrs}A_{rs}+T\sum_r\sum_s K_{mnrs}A_{rs}=0 \qquad \text{(103a)}$$

mit

$$a_{mn} = \frac{\pi^2 b}{8a}\left[\left(m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\right)^2 - m^2P - \frac{a^4}{b^4}n^2Q\right],$$

$$\beta_{mnr} = -\left[n^2\left(\frac{2a}{b}+\frac{a^3n^2}{b^3m^2}\right)-\frac{b}{a}\left(P+\frac{a^4n^2}{b^4m^2}Q\right)\right](2+(-1)^r)$$

$$(m+r \text{ gerade}),$$

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{mns} &= -\left[m^2\left(\frac{2a}{b}+\frac{bm^2}{an^2}\right)-\frac{b}{a}\left(\frac{m^2}{n^2}P+\frac{a^4}{b^4}Q\right)\right](2+(-1)^s) \\
&\qquad (n+s \text{ gerade}), \\
\delta_{mnrs} &= \frac{8}{\pi^2}\left[\frac{2a}{b}-\frac{b}{a}\left(\frac{P}{n^2}+\frac{a^4}{b^4m^2}Q\right)\right](2+(-1)^r)(2+(-1)^s) \\
&\qquad \binom{m+r}{n+s} \text{ gerade}), \\
K_{mnrs} &\text{ als demselben Ausdrucke wie in (102b).}
\end{aligned}\right\} \quad (103b)$$

Nunmehr sind allgemein drei Unbekannte P, Q und T vorhanden. Um eine von ihnen zu ermitteln, ist es daher notwendig, dass die übrigen zwei gegeben sind. Setzt man also

$$\kappa = \frac{p}{\tau} = \frac{P}{T},$$

so ergibt sich insbesondere für die quadratische Platte unter der Wirkung der äusseren Kräfte τ und $q = p$

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{mn} &= \frac{\pi^2}{8}\left[(m^2+n^2)^2-\kappa T(m^2+n^2)\right], \\
\beta_{mnr} &= -\left[n^2\left(2+\frac{n^2}{m^2}\right)-\kappa T\left(1+\frac{n^2}{m^2}\right)\right](2+(-1)^r) \quad (m+r \text{ gerade}), \\
\gamma_{mns} &= -\left[m^2\left(2+\frac{m^2}{n^2}\right)-\kappa T\left(1+\frac{m^2}{n^2}\right)\right](2+(-1)^s) \quad (n+s \text{ gerade}), \\
\delta_{mnrs} &= \frac{8}{\pi^2}\left[2-\kappa T\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)\right](2+(-1)^r)(2+(-1)^s) \\
&\qquad \binom{m+r}{n+s} \text{ gerade}).
\end{aligned}\right\} \quad (104)$$

Selbstverständlich ist K_{mnrs} wieder der gleiche Ausdruck wie in (102b).

Wenn man nun alle A_{mn} ausser den ersten neun (nämlich A_{11}, A_{22}, A_{13}, A_{31}, A_{15}, A_{51}, A_{24}, A_{42} und A_{33}) vernachlässigt und die Symmetrierelationen

$$\alpha_{mn} = \alpha_{nm}, \qquad \beta_{mnr} = \gamma_{nmr}, \qquad \beta_{nms} = \gamma_{mns}, \qquad \delta_{mnrs} = \delta_{nmsr}$$

berücksichtigt, so erhält man aus (103a) und (104) folgendes System von linearen Gleichungen:

A_{11}	A_{22}	$A_{13}+A_{31}$
$0{,}55594-0{,}08854\,\kappa\,T$	$0{,}05521\;T$	$-\;1{,}37886+0{,}37886\,\kappa\,T$
$0{,}44444\;T$	$21{,}54709-1{,}51717\,\kappa\,T$	$-2{,}40000\;T$
$-0{,}97994+0{,}42096\,\kappa\,T$	$-0{,}87883\;T$	$25{,}50122-3{,}02716\,\kappa\,T$
$-0{,}83772+0{,}39402\,\kappa\,T$	$3{,}06098\;T$	$1{,}20228-0{,}64598\,\kappa\,T$
$0{,}17778\;T$	$-24{,}81950+2{,}94055\,\kappa\,T$	$1{,}23429\;T$
$1{,}62114-0{,}18013\,\kappa\,T$	$3{,}49761\;T$	$-25{,}37886+1{,}81987\,\kappa\,T$

$A_{15}+A_{51}$	$A_{24}+A_{42}$	A_{33}	
$-\;1{,}37886+0{,}37886\,\kappa\,T$	$-\;0{,}07011\;T$	$1{,}62114-\;1{,}62114\,\kappa\,T$	$=0$
$-1{,}58730\;T$	$-21{,}40975+\;2{,}35244\,\kappa\,T$	$12{,}96000\;T$	$=0$
$1{,}13117-0{,}69015\,\kappa\,T$	$1{,}56863\;T$	$-194{,}75772+18{,}19873\,\kappa\,T$	$=0$
$160{,}18385-6{,}72220\,\kappa\,T$	$2{,}57013\;T$	$4{,}24228-\;1{,}68598\,\kappa\,T$	$=0$
$-4{,}02116\;T$	$207{,}66072-10{,}48346\,\kappa\,T$	$-18{,}51429\;T$	$=0$
$1{,}62114-0{,}18013\,\kappa\,T$	$-\;8{,}04413\;T$	$347{,}34012-18{,}38674\,\kappa\,T$	$=0.$

Durch Elimination von A_{mn} in diesen Gleichungen kommt eine algebraische Gleichung für T, deren Auflösung folgende Ergebnisse liefert:

Tabelle 19. Die den Werten von κ entsprechenden Werte von T, P und $T+P$.

$\kappa=\frac{P}{T}$	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	∞
T	14,58	7,09	4,50	3,24	2,51	2,04	1,72	0
P	0	3,55	4,50	4,86	5,02	5,10	5,16	5,30
$T+P$	14,58	10,64	9,00	8,10	7,53	7,14	6,88	5,30

Den Zusammenhang zwischen diesen Grössen zeigt Abb. 20. Daraus sieht man, dass eine geringe Zunahme von P eine ziemlich grosse Abnahme von T hervorbringt, insbesondere wenn das Verhältnis P/T

klein ist. Man kann also sagen, dass die Platte sich leichter durch Drucklasten als durch Schublasten ausknickt, wie es auch allgemein für die Platten mit anderen Randbedingungen der Fall ist.

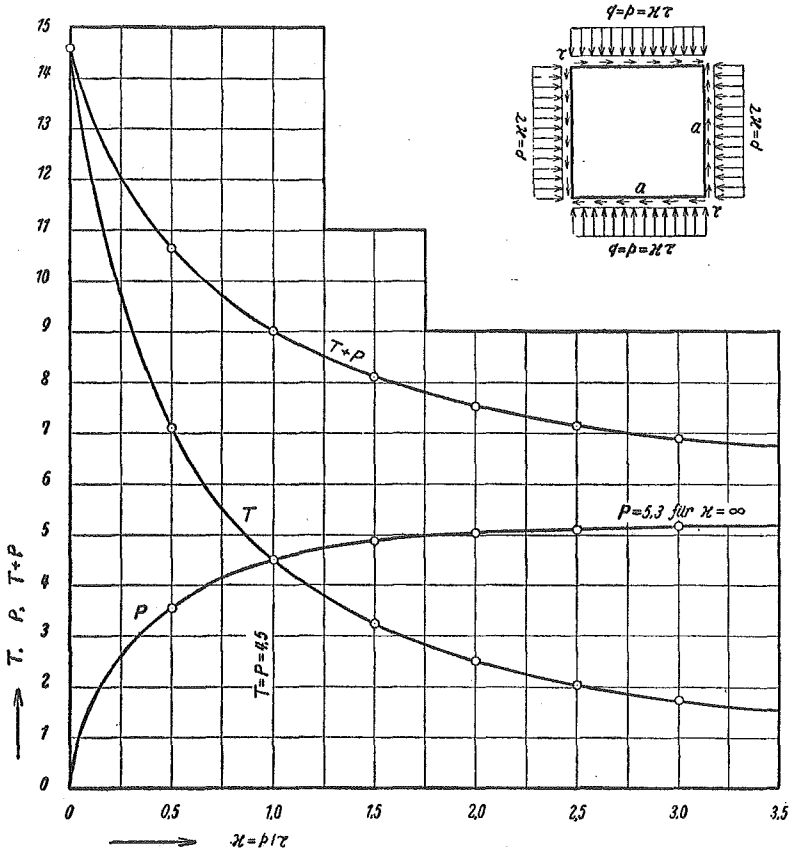
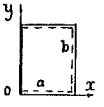


Abb. 20. Zusammenhang zwischen den Druck- und Schubknicklasten für die quadratische Platte.

Zusammenfassung

Zur bequemen Übersicht über die bisher ermittelten Rechenergebnisse sind die den verschiedenen Randbedingungen der Platte entsprechenden Werte von μ, μ', P, P', T und T' in folgenden Tabellen noch einmal zusammengestellt.

Tabelle 20. Werte von $\mu\left(=\frac{\omega a^2}{\pi^2}\sqrt{\frac{\gamma h}{gN}}\right)$ und $\mu'\left(=\frac{\omega b^2}{\pi^2}\sqrt{\frac{\gamma h}{gN}}\right)$ für die schwingende Platte ohne äussere Druck- und Schublast.

Randbedingung	für den Grundton			für den Oberton der quadratische Platte			
	b/a f. μ. a/b f. μ'	μ.	μ'	Tonarten	μ.	m*	n**
	1,0	2,396	2,396	1. Oberton	5,236	1, 2, 3...	2
	1,5	1,915	1,578	2. Oberton	5,942	,,	1
	2,0	1,756	1,309	3. Oberton	8,727	,,	2
	2,5	1,685	1,191	4. Oberton	10,159	,,	3
	3,0	1,647	1,129	5. Oberton	11,472	,,	1
	∞	1,563	1,000	6. Oberton	13,556	,,	3
	1,0	2,933	2,933	1. Oberton	5,547	1, 3, 5...	2
	1,5	2,538	1,760	2. Oberton	7,024	2, 4, 6...	1
	2,0	2,413	1,387	3. Oberton	9,584	2, 4, 6...	2
	2,5	2,358	1,229	4. Oberton	10,357	1, 3, 5...	3
	3,0	2,329	1,151	5. Oberton	13,080	1, 3, 5...	1
	∞	2,267	1,000	6. Oberton	14,205	2, 4, 6...	3
	1,0	3,646	3,646	1. Oberton	7,437	1, 3, 5...	2, 4, 6...
	1,5	2,736	3,736	2. Oberton	10,965	2, 4, 6...	2, 4, 6...
	2,0	2,489	2,489	3. Oberton	13,393	1, 3, 5...	1, 3, 5...
	2,5	2,408	2,408	4. Oberton	16,71 7	1, 3, 5...	2, 4, 6...
	3,0	2,350	2,350	5. Oberton	24,631	2, 4, 6...	2, 4, 6...
	∞	2,267	2,267	—	—	—	—

* Der Zahlenfolge 1, 2, 3 ..., 1, 3, 5 ... bzw. 2, 4, 6 ... von m entspricht die unsymmetrische, symmetrische bzw. ungerade symmetrische Schwingung in der x-Richtung.

** Den ungeraden bzw. geraden Zahlen von n entspricht die symmetrische bzw. ungerade symmetrische Schwingung in der y-Richtung.

Die den in obiger Tabelle angeschriebenen Werten von μ entsprechenden Knotenlinien der vierseitig eingespannten quadratischen Platte werden schematisch wie folgt gezeichnet.

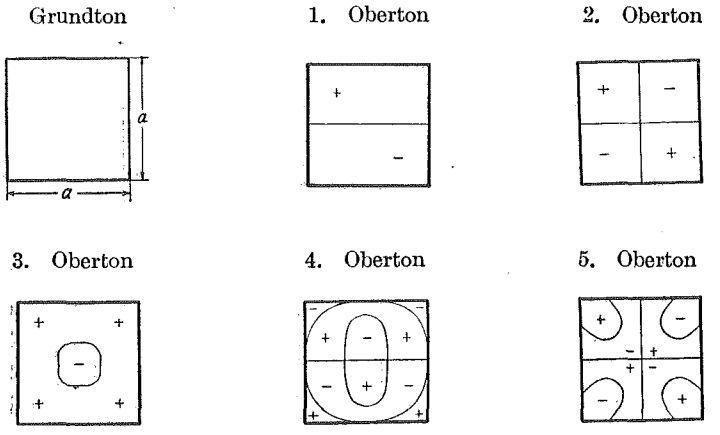
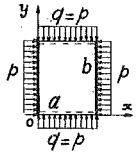
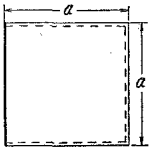


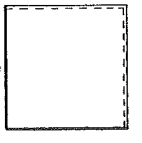
Tabelle 21. Niedrigste Werte von $P\left(=\frac{pa^2}{N\pi^2}\right)$ und $P'\left(=\frac{pb^2}{N\pi^2}\right)$ für die schwingungsfreie Platte ohne äussere Schublast.

Randbedingung	b/a f. P a/b f. P'	$q=p$		Randbedingung	b/a	P	
		P	P'			$q=p$	$q=0$
	1/2	5,924	15,299		1/2	15,548	91,296
	2/3	—	—		2/3	9,266	31,930
	1,0	3,830	3,830		1,0	5,304	10,074
	1,5	3,768	2,010		1,5	4,118	—
	2,0	3,825	1,481		2,0	3,887	4,835
	2,5	3,872	1,273		2,5	3,885	—
	3,0	3,905	1,174		3,0	3,895	4,282
	∞	4,000	1,000		∞	4,000	4,000

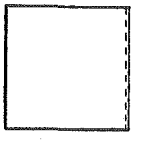
Die Werte von P für die durch gleiche Randdrucke $q=p$ belasteten quadratischen Platten mit anderen Randbedingungen lauten wie folgt:



$P=2{,}663,$

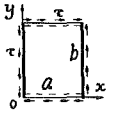


$P=3{,}232,$



$P=4{,}314.$

Tabelle 22. Niedrigste Werte von $T\left(=\frac{\tau a^2}{N\pi^2}\right)$ und $T'\left(=\frac{\tau b^2}{N\pi^2}\right)$ für die schwingungsfreie Platte.

Randbedingung	$p=q=0$			Randbedingung	$p=q=0$		$a=b$ $p=q=\kappa\tau$		
	b/a für T a/b für T'	T	T'		b/a	T	κ	T	P
	0,0	∞	∞		0,0	∞	0,0	14,58	0,00
	0,5	—	—		0,5	—	0,5	7,09	3,55
	1,0	12,28	12,28		1,0	14,58	1,0	4,50	4,50
	1,5	11,12	7,78		1,5	11,40	1,5	3,24	4,86
	2,0	10,21	6,70		2,0	10,96	2,0	2,51	5,02
	2,5	9,81	6,40		2,5	10,85	2,5	2,04	5,10
	3,0	9,61	6,17		3,0	—	3,0	1,72	5,16
	∞	8,99	5,35		∞	8,99	∞	0,00	5,30

Für die vierseitig frei gestützte Platte sind die von **Timoshenko** ausgerechneten Werte von T in Tabelle 15 (S. 54) zusammengestellt.

Im Vorangehenden sind die Eigenwertprobleme für die Rechteckplatten mit vier vor und auch nach der elastischen Deformation geradlinigen Rändern ausführlich untersucht worden. Aber es ist nicht so schwer, diese Behandlung noch so zu erweitern, dass die allgemeinen Formeln auch für die Platten mit elastisch biegsamen Rändern, d. h. für die Platten mit vollständig f r e i e n Rändern gelten. Dies könnte schon durch Hinzufügung eines konstanten Gliedes in jeder Funktion X_m und Y_n gelingen. Einige Beispiele für die reinen Biegungszustände derartiger Platten sind in meiner früheren Arbeiten* angegeben, aber ich unterdrücke hier die weiteren Untersuchungen dieser Fälle.

Zum Schlusse sei betont, dass der Verfasser dem bekannten Tafelwerke von **K. Hayashi** sehr viel für die Ausführung der numerischen Rechnungen verdankt. Herrn **T. Kishimoto, S. Sawada** und **S. Ono** haben bei der Herstellung dieser Arbeit wertvolle Hilfe geleistet.

Sapporo, im März 1938.
S. Iguchi.

---

* **S. Iguchi,** Eine Lösung für die Berechnung der biegsamen rechteckigen Platte. Berlin 1933; **S. Iguchi,** J. Civ. Eng. Soc. Tokyo **16** (1930) S. 663 bis 725.