HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	連續板の挫屈に關する實驗
Author(s)	倉田, 宗章
Citation	Memoirs of the Faculty of Engineering, Hokkaido University, 8(2), 133-146
Issue Date	1949-08-05
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/37750
Type	departmental bulletin paper
File Information	8(2)_133-146.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

連續板の挫屈に關する實驗

助教授　倉　田　宗　章

昭和23年12月10日

Some Experiments for Buckling Tests of Continuous Rectangular Plates.

Muneaki Kurata

Summery

Some experimental results for buckling tests of continuous rectangular plates are reported, which were obtained by the method R. V. Southwell proposed in 1931.

The experiments were worked out for the purpose of verifying the mathematical results by the auther's methods for determining the buckling loads of continuous rectangular plates.

Some ebonite plates were taken as specimens.

The plates were simply supported with a equal interval along the intermediate lines parallel to two opposite end sides and also simply supported along other two opposite sides, and compressed in its middle plane by forces uniformly distributed on the end sides.

內　　容

序　　言…… 133
1. 實驗方法…… 134
2. 實驗裝置及試片…… 136
3. 單一板の實驗…… 137
4. 連續板の實驗…… 139
結　　論…… 139

序　　言

前に誘導せる理論公式[1]を實證せんが爲に實驗を行つた。實驗は比較的試片の得易い連續板（中間を等間隔に單純支承された板）の二，三の場合[2]に就き實施し關聯せる諸公式の妥當性をも類推せしむる事にした。

1) 著者 "矩形組合板の挫屈理論" 雜誌建設工學連載中。

2) 同上 "第4章 §30 剛接接合剛支持の場合，中荷重 p のみが作用する場合"。

1. 實 驗 方 法

眞直なる柱又は平板の挫屈實驗は元撓 (initial deflection) なき試片の得難き事或は偏心なき載荷方法の困難等の爲元來困難なる實驗の一と認められて居た様である。即通常試片の元撓，荷重の偏心等の爲荷重が挫屈荷重に達する遙か以前より試片は撓曲を初め荷重が或程度以上大となると急激に撓度は增加して荷重-撓，曲線 (load-deflection-curve) は略々 Rectangular hyperbola の形狀を呈し，その直交する二つの漸近線中一つは挫屈荷重を他は撓＝0の位置を表わすと考へられた[1] 此は柱或は其の撓曲面が展開可能面 (developable surface) なる平板等に於ける場合であつて荷重が挫屈荷重に近付く時著しい撓度の增大を生じ急激な變化が認められ，比較的容易に挫屈荷重を推定する事が出來る。然し只今の場合の四邊に於いて支承された平板の如く其の撓曲面が非展開可能面 (non-developable surface) なる場合には撓は除々に進行し急激なる變化を認め難い[2] 即上記の方法に依つて挫屈荷重を推定する事は困難となる。然も撓度の增大と共に中立面內の伸びを伴ひ二次應力の發生を無視し得なくなり所謂 large deflection の平板として取扱わなければならなくなる。

1931年 R. V. Southwell は元撓を有する彈性柱の荷重-撓，曲線より其柱が完全に眞直なる場合の挫屈荷重を推定する極めて便利な方法を發表し[3] 此の方法に依る時は荷重の些少の偏心も元撓と同樣に處理出來る事が知られてゐる[4] 又同じ方法が板厚に比し微少なる元撓を有する四邊單純支承の單一板の實驗にも適用出來る事を S. Timoshenco も述べてゐる[5] 又 L. H. Donnell は板厚に比し元撓及挫屈撓の小なる限り中立面內の伸を伴う場合でも Southwell の方法が適用し得る事を論じてゐる[6]

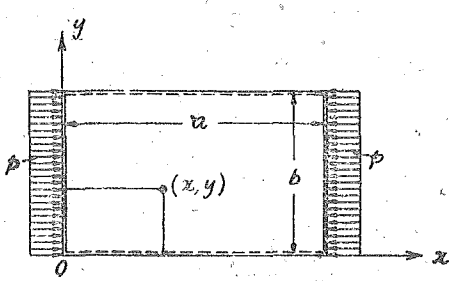


圖-1

扨只今の場合に就き元撓，挫屈撓共に板厚に比し小なるものとし中立面內の伸の影響を無視し得るものとして Southwell の方法を解說しよう。荷重方法及座標系は圖-1の如くとし，周邊條件は $y=0$, $y=b$ に於て單純に支承され $x=0$, $x=a$ に於て單純に支承乃至固定されてゐるものとすれば試片の元撓は次の如く表わす事が出來る。

1) S. Timoshenko "Theory of Elastic Staiblity" 1936. P. 177.
稻田隆 "彈橫性抵抗を受ける固定長柱の挫屈に關する實驗"
2) L. Schuman, G. Back "Strengh of Rectangular Flat Plates under Edge Cmpression VI-4" 航空關係外國文獻集 II. P. 99.
3) R. V. Southwell "On the Analysis of Experimental Observation in Problem of Elastic Stability" Proceedings of the Royal Society. Vol. 135A. 1932.
4) S. Timoshenko 前揭書 P. 177.
5) 同上 P. 319.
6) L. H. Donnell "On the Application of Southwell's method for the Analysis of Buckling teats" S. Timoshenko 60 th Anniversary Volume 1938. P. 27.

$$w' = \sum_n W'_n g(x) \sin n\pi\eta \qquad (\eta = y/b) \cdots\cdots (1)$$

又最小挫屈荷重に對する挫屈撓は各場合に就き W を比例常數として

$$w = Wf(x)\sin\pi\eta \cdots\cdots (2)$$

の如く表わされる[1] 扨 w' なる元撓を有する平板が中立面内の壓力 p を受けて w なる挫屈撓を追加せるものとする次に挫屈撓に微小假想撓を加へて其時の内働，外働の變量を夫々 ΔV, ΔT とすれば假想仕事の原理に依り

$$\Delta V = \Delta T \cdots\cdots (3)$$

但し

$$\Delta V = dW \frac{\partial}{\partial W} D\int_0^b\int_0^a \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] dxdy$$

$$\Delta T = p\int_0^b\int_0^a \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(w' + w + dWf(x)\sin\pi\eta\right)\right]^2 - \left[\frac{\partial}{\partial x}(w'+w)\right]^2\right\} dxdy$$

茲に $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$: 板の曲げ剛さ

h : 板厚

ν : ポアソン比

E : 彈性常數

(3) 式に (1), (2) 式を代入し W', W に比し dW を微小量として無視すれば計算の結果

$$p = \frac{WD\int_0^a \left\{\overset{2}{f''} + \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 \overset{2}{f} + 2\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\left(\overset{2}{f''} - \nu\frac{dff'}{dx}\right)\right\} dx}{W'\sum_{n=1}\int_0^a f'g'dx + W\int_0^a \overset{2}{f'}dx} \cdots\cdots (4)$$ [2]

を得る。今元撓 $w' = 0$ 或は $W'_n = 0$ とおけば上式は元撓なき平板の挫屈荷重 p_{cr} を與へる筈である。即

$$p_{cr} = D\frac{\int_0^a \left\{\overset{2}{f''} + \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 \overset{2}{f} + 2\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\left(\overset{2}{f''} - \nu\frac{dff'}{dx}\right)\right\} dx}{\int_0^a \overset{2}{f'}dx} \cdots\cdots (5)$$

實際 $f = \sin\pi\xi$ (但 $\xi = x/a$) とおけば (2) 式は周邊單純支承の單一板の最小挫屈に對する撓曲面を表わし，此時 (5) 式は

$$p_{cr} = \frac{\pi^2 D}{b^2}\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)$$

---

1) 前出脚註 1) 照參。

2) 式中 f', f'', g' 等は夫々 $\dfrac{df}{dx}$, $\dfrac{d^2f}{dx^2}$, $\dfrac{dg}{dx}$ を表わすものとする。

となる。此れは周知の公式に外ならない。

扨(5)の表式を用ひれば(4)式は次の如く書き換えられる。

$$p=\frac{p_{cr}}{\frac{W'_1}{W}C+1},\quad \text{但し}\quad C=\int_0^a\frac{g'}{f}dx=\text{常數}$$

上式の兩邊に邊長 b を乘ずれば p, p_{cr} は荷重全量 P, P_{cr} で置換えられる結局上式より

$$W'_1C=P_{cr}\left(\frac{W}{P}\right)-W \qquad \cdots\cdots(6)$$

W'_1C 及 P_{cr} は W, P に無關係なる常數であるから上式を W に就いて微分すれば

$$0=P_{cr}d\left(\frac{W}{P}\right)-dW$$

故に

$$P_{cr}=\frac{dW}{d\,(W/P)} \qquad \cdots\cdots(7)$$

今試片上の一點例ば $x=a/2$, $y=b/2$ に於ける挫屈撓を δ とせば(2)式より

$$\delta=[w]_{\substack{x=a/2\\y=b/2}}=Wf\left(\frac{a}{2}\right)$$

故に(7)式右邊の分子分母に $f\left(\frac{a}{2}\right)$ を乘ずれば

$$P_{cr}=\frac{d\delta}{d\,(\delta/P)} \qquad \cdots\cdots(8)$$

同樣に(6)式より

$$P_{cr}\left(\frac{\delta}{P}\right)-\delta=W_1'Cf\left(\frac{a}{2}\right)=\text{常數} \qquad \cdots\cdots(9)$$

(9)式は $\frac{\delta}{P}$, δ が直線的關係にある事を示し(8)式は其の直線の傾斜が平板が元撓を有せざる場合の挫屈荷重を與えるものとなる事を示してゐる。

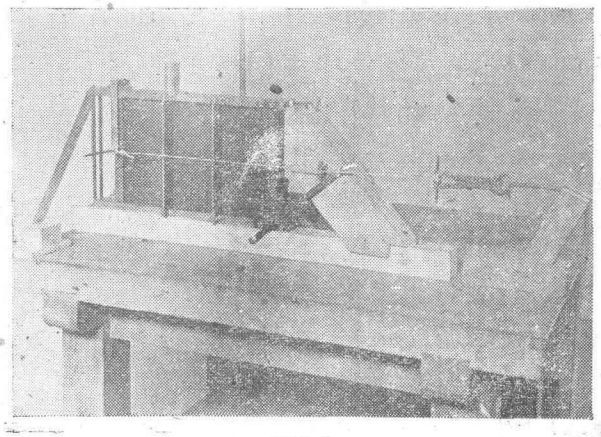
即實測に依り P–δ (荷重–撓) 曲線を求むれば其れより描かれる $\frac{\delta}{P}-\delta$ 線圖に於て直線を得る筈であつて其の直線の傾斜より P_{cr} を推定出來る譯である。

2. 實驗裝置及試片

實驗裝置は軟鋼鐵製の枠組とし 圖-2, 寫眞-1 に示す如き構造とした。上緣, 下緣は V 形の溝を穿つて單純支承の周邊條件を充さしめ[1] 載荷邊 (以後端邊と呼稱す) は V 形の溝を穿つたものとネヂにて締付け固定の條件を充さしむるものと二種製作し 此等は場合に應じて取替へ得る構造とし

1) 此際試片の方も鋭緣とした。

た。(圖-2は前者，寫眞-1は後者を裝備せる有樣を示す) 又中間支持邊は除去可能とし單一板の實驗をも可能ならしめた。荷重は鉛散彈を用ひ 1kg 乃至 500gr の間隔で荷重を增加し其際撓度の測定は板側面中央部に細長い紙片を板面に垂直に貼付し其の先端の示標の動きをComparatorで讀み取る事とした。(寫眞-2 參照)



寫眞-1

試片は輕易なる裝置に過大な荷重を負擔せしむる事を避ける爲曲げ剛さの小なる材料を必要とし只今の場合はエボナイト薄板を使用した。其の彈性常數はエボナイト板より切取つた幅 2cm，徑間 19 cm の單純梁の中央に集中荷重 1gr，2gr，5gr，10gr を繰返し載荷し其撓を Comparator で精確に測定して算出した。又ポアソン比は實際上測定困難なる爲總て 0.45 と假定した。

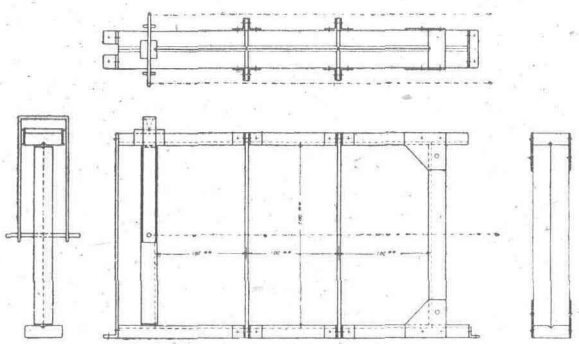
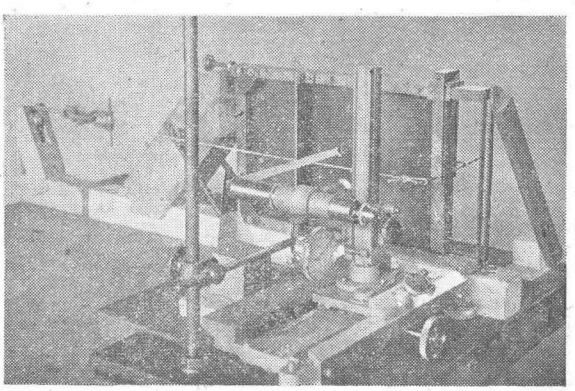


圖-2

試片は數回の使用に依り永久歪を生じ P-δ 曲線は不整となり 新しく取替える事を要した。實驗に用ひた試片の種類及び其性質は 表-1 に示す如きものである。

表-1

試片番號	板厚 h (mm)	彈性常數E (kg/cm²)	曲げ剛さ D (kg.cm²)
No. 1	1.69	25380	12.801
No. 2	1.54	33000	12.594
No. 3	1.48	33000	11.179

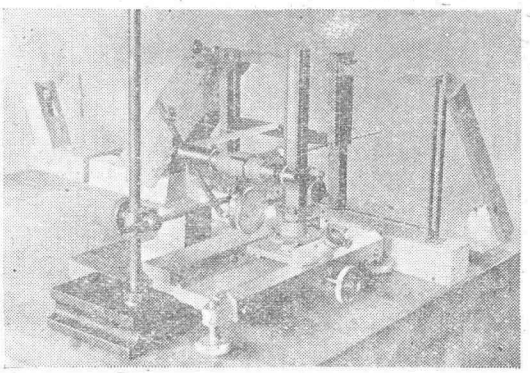


寫眞 2

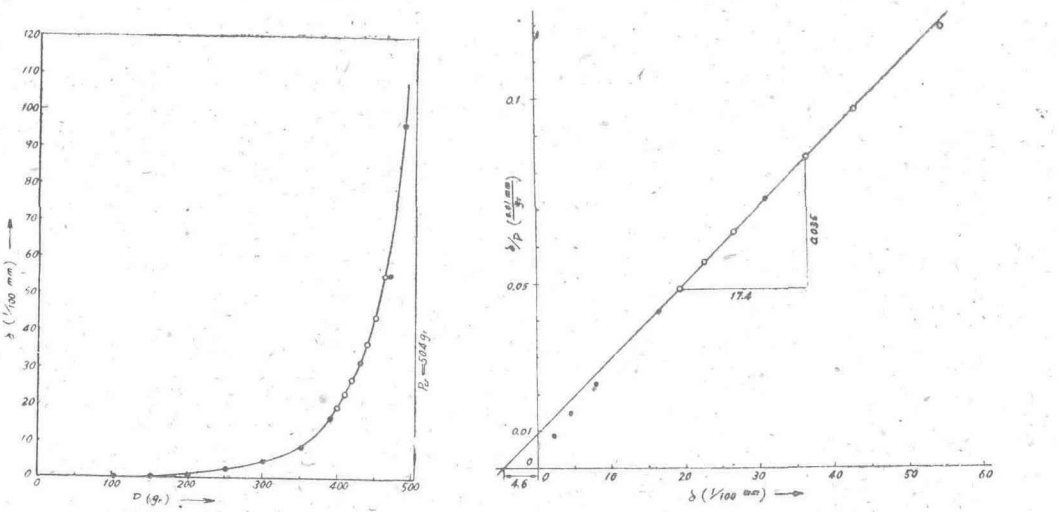
3. 單一板の實驗

先づ Southwell の方法の實驗に用ひ得べき事を檢する爲試片 No 1 より切取つた帶片 (190mm

×20mm×1.69mm) を兩端單純支承の柱として挫屈せしめた。(寫眞-3) 圖-3, a は其の P-δ 曲線を示し (圖中黑點は實測點) 旣述の如く其の漸近線より挫屈荷重を推定する事が出來る。一方此の曲線上に適當な點を選び (圖中白點を以て示す) 此等の點に就き $\frac{\delta}{P}$-δ 線圖を描けば圖-3.b に示す如く直線を得る故に此直線の傾斜 (圖に於ては Cotangent) より P_{cr} を算出すれば $P_{cr}=497$gr となる此場合の理論値は 504gr であるから約 1.4% の差となり可成良く一致する事が解る。



寫眞-3



a. b.

圖-3

次に平板の場合に就き更に Southwell の方法を檢討せんが爲理論の熟知なる單一板に就き其の邊比を變へて實驗を行つた。試片の種類, 邊比, 周邊條件, 挫屈荷重 P_{cr} の實驗値並びに理論値との比較等は 表-2 に示す如くであつて各場合に對する P-δ 曲線圖及 $\frac{\delta}{P}$-δ 線圖は 附圖-1～附圖-9 の如くである。但し P-δ 曲線圖中の點は總て實測點であつて特に白點は $\frac{\delta}{P}$-δ 線圖に於て直線上に並ぶ事を得た點なる事を示す。又 $\frac{\delta}{P}$-δ 線圖に於ける此直線の傾斜 (此場合 Cotangent) は便宜上直線上の兩外端點の座標値の差を以て計算した。(但し邊比 $a/b=0.5$ 兩端邊固定の場合 (附圖-7) は其の挫屈荷重 100kg 以上に達し固定邊に於て相當大なる Negative moment を保持せしむる事を要し裝置の能力を超える爲, P-δ 曲線を充分描寫する事が困難であつた。從て止むを得ず得られた曲線の斷片を圓骨に延長し其の延長曲線上に適當に數點を取り (附圖-7 a 中の×印) 此等の點を用

ひて $\frac{\delta}{P}-\delta$ 線圖を描き（附圖-7 b 中の×印）挫屈荷重を推定する事とした。

表-2 より解る如く Southwell の方法に依る挫屈荷重の實驗値は理論値と約 5 % 前後の差を以て比較的良く一致し平板の挫屈荷重の決定に有力なものである事を認め得た。又 $\frac{\delta}{P}-\delta$ 線圖に於て一直線上に並ぶ點は $P-\delta$ 曲線圖に於て只今の場合略々 $\delta=0.5$mm 附近に於て現われる部分なる事が認められる。此は主として挫屈撓發生の當初に於ては裝置の働の不安定なる事從て周邊條件の充分充されぬ事により又撓が可成大となるに及んでは中立面内の伸の影響を無視し得ざる事となり再び本方法の適用限界を遠ざかる事に因るものと考えられる。

4. 連續板の實驗（寫眞-1, 2 參照）

連續板の場合は各徑間部分に就き 1) に述べる如き關係が成立すると考えられるから同樣に Southwell の方法が用ひられる筈である。

實驗は二徑間，三徑間の等徑間の場合に就き行つた。各徑間長は 10cm であつて實驗結果及理論値との比較は 表-3 に示す如くであり各場合に對する $P-\delta$ 曲線圖及 $\frac{\delta}{P}-\delta$ 線圖は 附圖-10 ～附圖-15 の如くである。前同樣此等の圖中の點は總て實測點であつて白點は $\frac{\delta}{P}-\delta$ 線圖に於て一直線上に並び得た點である。

實驗は中間支承邊の存在の爲單一板の場合に比し概して周邊條件の實現が却て容易で元撓の減少を伴ひ挫屈荷重の實驗値と理論値とは可成良く一致する事が認められた。

結　　論

先づ Southwell の方法に依つて求めた平板の挫屈荷重の實驗値は理論値とも比較的合致し實際的方法として有力なものである事を確め得た。(表-2)

次いで同方法に依つて求めた連續板の挫屈荷重の實驗値は著者公式に依つて求めた理論値と良好なる一致を認め得て (表-3) 著者公式の妥當なる事を實驗的に確め得たものと考えられる。

最後に注意すべき事項としては $\frac{\delta}{P}-\delta$ 線圖に於て直線部分の前後は概して緩なる曲線をなし時としては直線部分の位置を錯誤する怖れなしとしない故に可能な限り $P-\delta$ 曲線圖に於ける實測點數を增加し其等の點より $P-\delta$ 曲線の形狀を正しく描寫し測定誤差の影響を除去し斯くて得た $P-\delta$ 曲線上に採つた無數の理想點より $\frac{\delta}{P}-\delta$ 線圖を作製して其の直線部分を確認する如くするならば一層適確であらう。

附記　本研究は井口鹿象教授御指導の下に文部省科學研究費の援助を受けたものである。尙實驗に際しては實驗室の使用を快諾された金教授初め多數の先輩同僚各位の御世話になつた茲に深謝申上げる。

表-2 單一板の實驗

邊比 a/b $b=20cm$	試片番號 *1	D (kg•cm²) *2	$x=0$ 或は a に於ける周邊條件	P-δ 曲線圖附圖番號	δ/P-δ 線圖附圖番號	挫屈荷重 P_{cr} 實驗値 kg
1.5	No. 1	12.801	兩端固定邊	附圖-1. a	同 1. b	32.4
			一端固定邊	附圖-2. a	同 2. b	27.3
			他端單純支承邊	附圖-3. a	同 3. b	28.1
1.0	No. 2	12.594	兩端固定邊	附圖-4. a	同 4. b	43.8
	No. 3	11.179	一端固定邊	附圖-5. a	同 5. b	25.2
			他端單純支承邊	附圖-6. a	同 6. b	22.2
0.5	No. 2	12.801	兩端固定邊	附圖-7. a	同 7. b	115.5 ($=P_{cr_0}$)
	No. 3	11.179	一端固定邊	附圖-8. a	同 8. b	58.1 ($=P_{cr_0}$)
	No. 1	12.801	他端單純支承邊	附圖-9. a	同 9. b	39.7 ($=P_{cr_0}$)

〔註〕 *1 表-1 參照。

*2 S. Timoshenko "Theory of Elastic Stability" 1936. P. 33. Table-31. Table-38. 參照。但し一端固定邊

*3 $P_{cr}=k\dfrac{D\pi^2}{b}$ に依つて算出。

*4 此場合は理論的には板は x 方向に一波長形に挫屈する場合の挫屈荷重（括内弧に示す値）が半波長形に

*5 只今の實驗に於てポアソン比 $\nu=0.45$ は全くの假定であるから此を避ける爲には邊比 a/b を異にする $k=\dfrac{f_{cr}b^2}{D\pi^2}=\dfrac{P_{cr}b}{D\pi^2}$, $k_0=\dfrac{f_{cr_0}b'^2}{D\pi^2}=\dfrac{P_{cr_0}b'}{D\pi^2}$, これより $k/k_0=P_{cr}/P_{cr_0}(b/b')$ なる關係を得て只今の $k/k_0=P_{cr}/P_{cr_0}$ となる。此より P_{cr}/P_{cr_0} の實驗値を理論値 k/k_0 と比較する事により E, ν, h の實測をられない。上表に於ては P_{cr_0}, k_0 として $a/b=0.5$ の場合のそれを採つた。

表-3 連續板の實驗

徑間數	試片番號 *1	D *1	兩端邊に於ける周邊條件	P-δ 曲線圖附圖番號	δ/P-δ 線圖附圖番號	挫屈荷重 P_{cr} 實驗値 kg
2	No. 2	12.594	兩端固定値	附圖-10. a	同 10. b	63.6
			一端固定邊	附圖-11. a	同 11. b	44.7
	No. 3	11.179	他端單純支承邊	附圖-12. a	同 12. b	34.8
3	No. 1	12.801	兩端固定値	附圖-13. a	同 13. b	52.4
			一端固定邊	附圖-14. a	同 14. b	43.7
			他端單純支承邊	附圖-15. a	同 15. b	38.6

〔註〕 *1 表-1 參照。

*2 著者 "矩形組合板の挫屈理論" 第4章連續板の公式中の理論値（未發表）

$P=\dfrac{f_{cr}a^2}{D\pi^2}$ より $k=\dfrac{f_{cr}b^2}{D\pi^2}=\dfrac{f_{cr}a^2}{D\pi^2}\left(\dfrac{b}{a}\right)=P\times 4$ なる關係に依り求む。

*3 $P_{cr}=k\dfrac{D\pi^2}{b}$ により計算する。

*4 表-2 註-*5 參照。但し本表に於ける P_{cr_0}, k_0 は表-2 に於けるものに同じ。

結果及理論値との比較

$k=\frac{P_{cr}b^2}{D\pi^2}$ *2 理論値	挫屈荷重理 *3 P_{cr} 論値理 kg	挫屈荷重の差		P_{cr}/P_{cr} *5 實驗値	k/k_0 *5 理論値	差 *5	
		差 kg	%			差	%
5.38	33.99	-1.6	-4.7	0.8161	0.8608	-0.0447	-5.2
4.496	28.40	-1.1	-3.9	0.6877	0.7194	-0.0317	-4.4
4.69 (4.34) *4	29.63 (27.42) *4	-1.5	-5.1	0.7078	0.7504	-0.0426	-5.7
6.74	41.89	1.9	4.5	0.3795	0.3705	0.009	2.4
4.847	26.74	-1.5	-5.6	0.4337	0.4667	-0.033	-7.1
4.00	22.06	0.1	0.5	0.3821	0.3851	-0.003	-0.8
18.19 $(=k_0)$	113.05	2.4	2.1	1	1	—	
10.386 $(=k_0)$	57.29	0.8	1.4	1	1	—	
6.25 $(=k_0)$	39.48	0.2	0.5	1	1	—	

他端單純支承邊の場合は著者算出。

挫屈する場合の値（括弧外に示す値）より小であるが實際では元撓其他の影響で半波長形挫屈をなした。

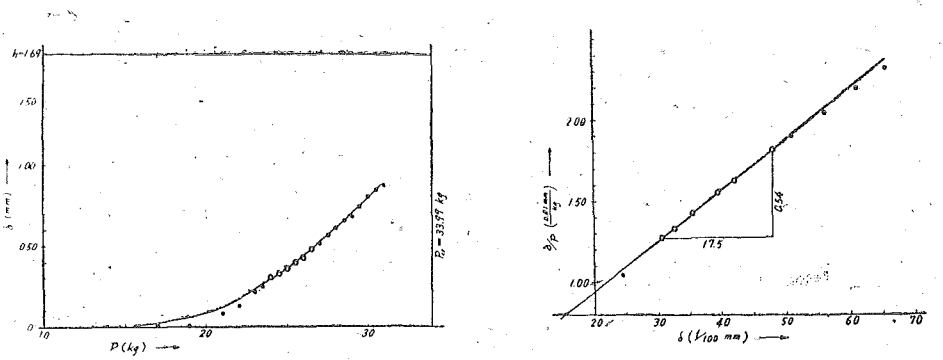
のみで D の値全く同一なる一供試片の挫屈荷重及挫屈係數を夫々 P_{cr0}, k_0 とすれば

場合 $b/b'=1$ なる故

省略出來る事が解る。但し此の方法は自由邊を有する平板の如く挫屈條件方程式中に ν の表われる場合には用ひ

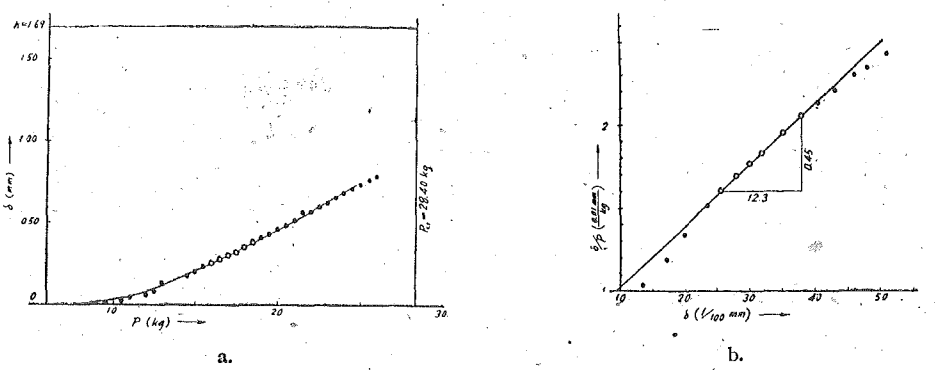
結果及理論との比較

$k=\frac{P_{cr}b^2}{D\pi^2}$ *2 理論値	挫屈荷重 *3 P_{cr} 理論値 kg	挫屈荷重の差		P_{cr}/P_{cr0} *4 實驗値	k/k_0 *4 理論値	差 *4	
		差kg	%			差	%
10.386	64.55	-1.0	-1.5	0.5511	0.5710	-0.0199	-3.5
7.412	46.07	-1.4	-3.0	0.3873	0.4075	-0.0202	-5.0
6.250	34.48	0.3	0.9	0.5990	0.6018	-0.0028	-0.5
8.248	52.10	0.3	0.6	1.3199	1.3197	0.0002	0.02
6.780	42.83	0.9	2.1	1.1008	1.0848	0.0160	1.5
6.250	39.48	-0.9	-2.3	0.9723	1.0000	-0.0277	-2.8



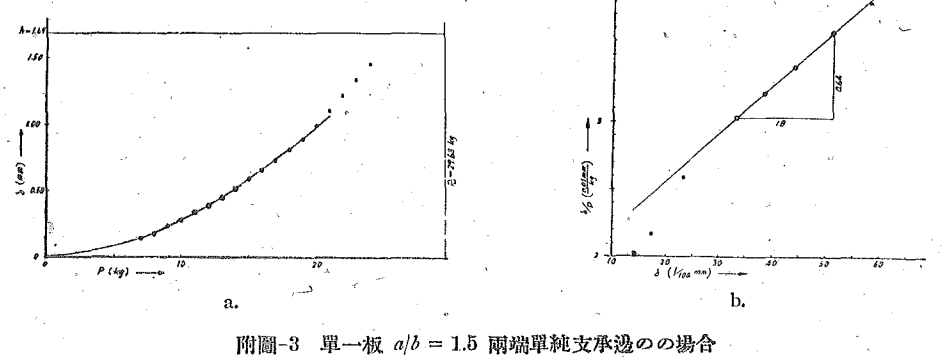
a. b.

附圖-1 單一板 $a/b = 1.5$ 兩端固定邊の場合



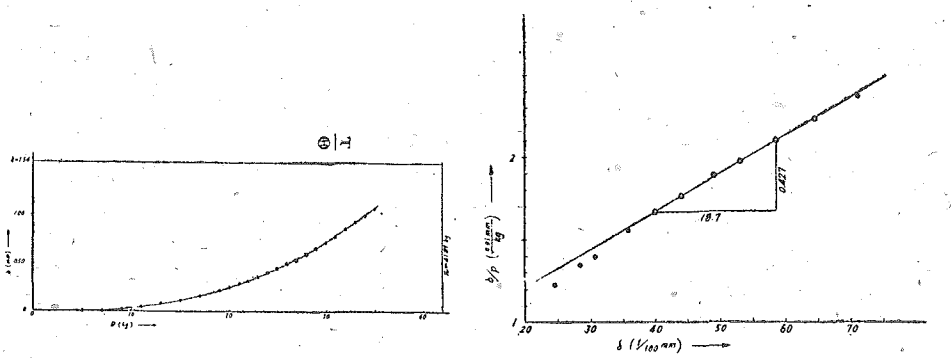
a. b.

附圖-2 單一板 $a/b = 1.5$ 一端固定邊他端單純支承邊の場合



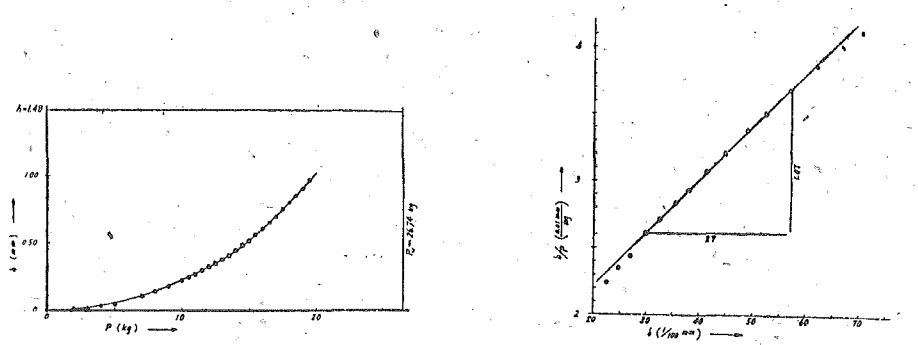
a. b.

附圖-3 單一板 $a/b = 1.5$ 兩端單純支承邊のの場合



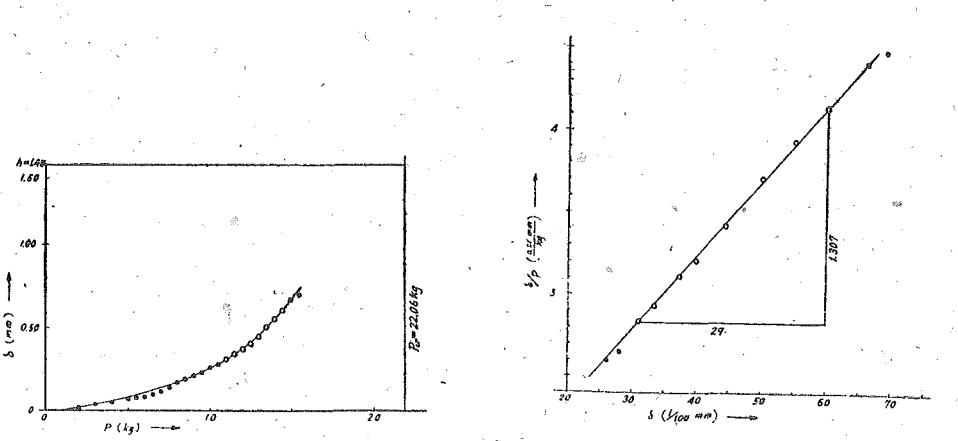
a. b.

附圖-4 單一板 $a/b = 1$ 兩端固定邊の場合



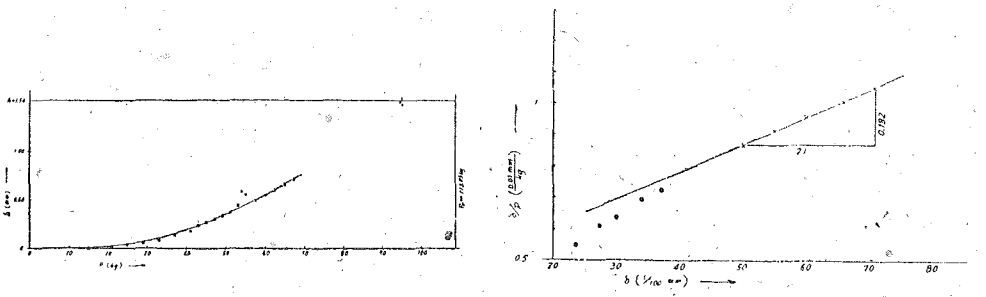
a. b.

附圖-5 單一板 $a/b = 1$ 一端固定邊他端單純支承邊の場合



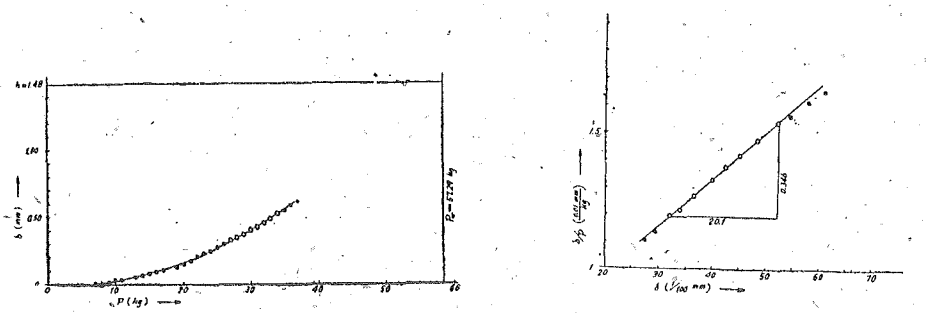
a. b

附圖-6 單一板 $a/b = 1$ 兩端單純支承邊の場合



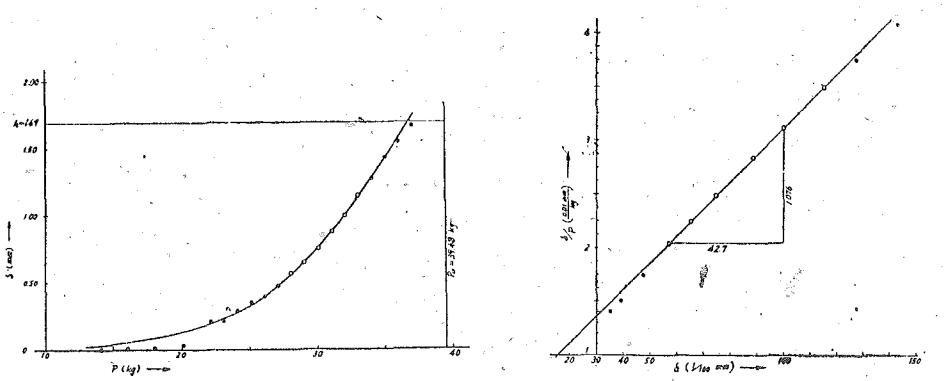
a. b.

附圖-7 單一板 $a/b = 0.5$ 兩端固定邊の場合



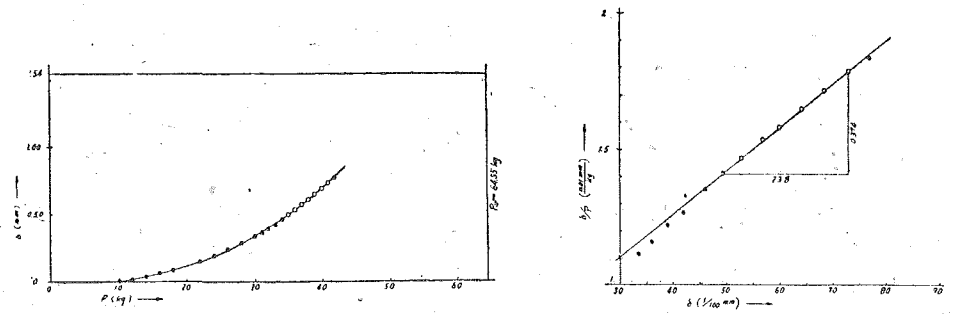
a. b.

附圖-8 單一板 $a/b = 0.5$ 一端固定邊他端單純支承邊の場合



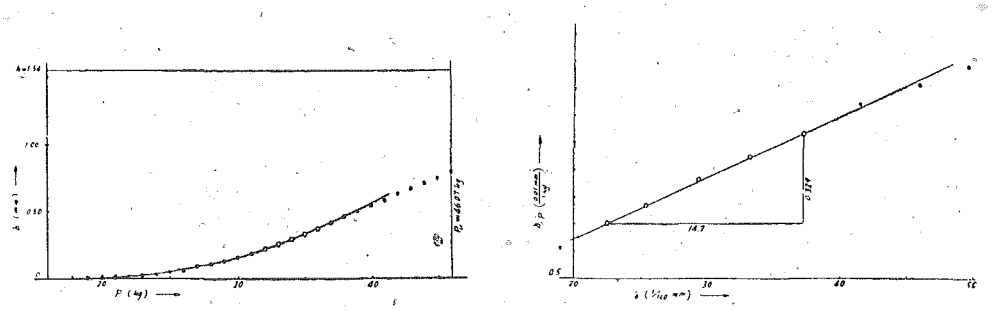
a. b.

附圖-9 單一板 $a/b = 0.5$ 兩端單純支承邊の場合



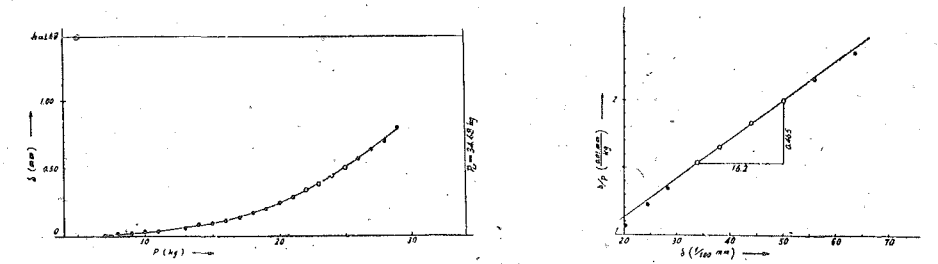
a. b.

附圖-10 連續板，2徑間，兩端固定邊の場合



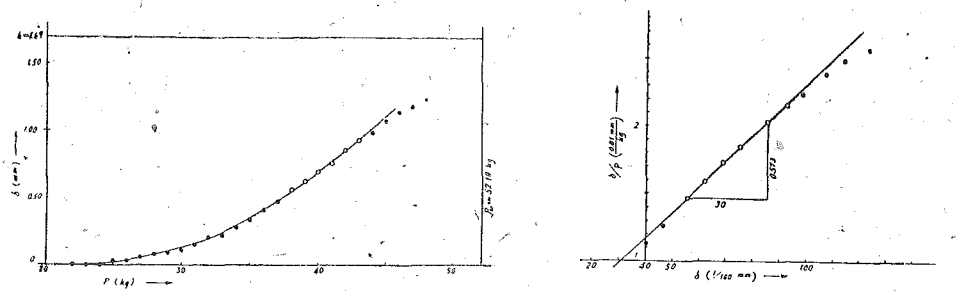
a. b.

附圖-11 連續板，2徑間，一端固定邊他端單純支承邊の場合



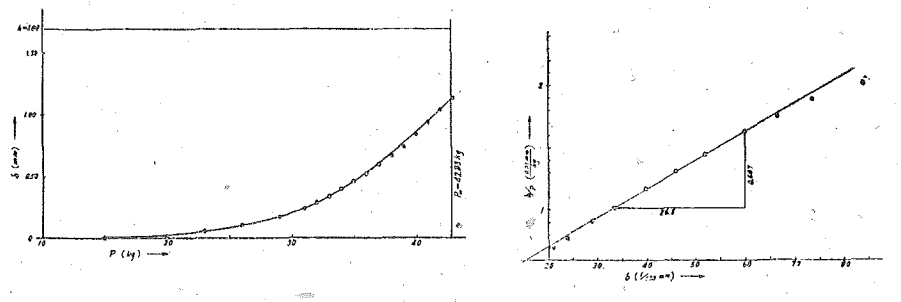
a. b.

附圖-12 連續板，2徑間，兩端單純支承邊の場合



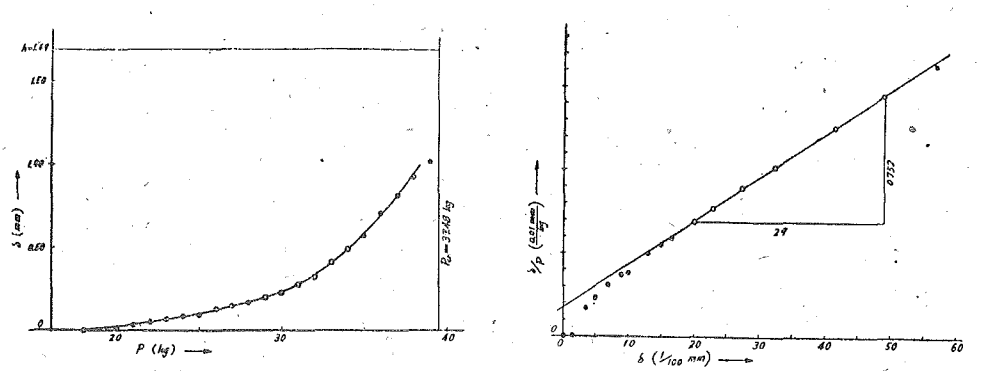
a. b.

附圖-13 連續板，3徑間，兩端固定邊の場合



a. b.

附圖-14 連續板，3徑間，一端固定邊他端單純支承邊の場合



a. b.

附圖-15 連續板，3徑間，兩端單純支承邊の場合