HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	2009年度 カオス・フラクタル 講義ノート
Author(s)	井上, 純一
Relation	2009年度前期に工学部情報工学コース3年生を対象に開講された講義「カオス・フラクタル」の講義資料
Issue Date	2009
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/38906
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	learning object
File Information	CF2009_12.pdf, 第12回講義ノート

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

カオス・フラクタル 講義ノート #12

担当： 井上 純一 (情報科学研究科棟 8-13)

URL : http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/˜j _inoue/index.html

平成 21 年 7 月 28 日 (最終回)

目 次

14 マルチフラクタル **86**

14.1 一般化次元の復習 86
14.2 パラメータ q で特徴つけられる「フィルタ」を介して図形を見る 87
14.3 二項分岐過程とそのマルチフラクタル次元 88
14.3.1 描画アルゴリズム 88
14.3.2 マルチフラクタル次元の計算 89
14.4 マルチフラクタル次元の一般論 91
14.4.1 特異性の強さと大域スペクトル 91
14.4.2 二項分岐過程再考 94

14 マルチフラクタル

最終回である今回の講義ではフラクタル図形をある種の「フィルタ」を介して見なおした場合に得られる「マルチフラクタル」という概念について学んでいく.

14.1 一般化次元の復習

第 8 回講義ノート ([カオス編] の最終回) では相関次元をパラメータ q を用いて一般化した. 具体的にそれを思い出してみると, 半径 ϵ の球内に時系列の点が存在する確率を p_i とし, 一般化された相関次元 D_q は

$$D_q \quad = \quad \frac{1}{q-1} \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log \sum_{i=1}^{n(\epsilon)} p_i^q}{\log \epsilon} \tag{202}$$

で定義された. この一般化された相関次元はフラクタル図形を特徴つける際にも用いることができる. 例えば, 対象となるフラクタル図形をメッシュに切り, 各セルを長さ ϵ の立方体で定義する. このとき, 各セル i に図形を構成する点が存在する確率を $p_i(\epsilon)$ と定める. このとき, 上記の相関次元は $q = 0$ の場合には簡単な計算から

$$D_{q=0} \quad = \quad - \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log \sum_{i=1}^{n(\epsilon)}}{\log(\epsilon)} = - \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log n(\epsilon)}{\log(\epsilon)} \tag{203}$$

となり, これは ϵ の立方体で対象図形を覆った場合 (図 58 参照), セルの一辺の長さ ϵ と, その長さを一辺とする立方体のセル群に含まれる点の総数 $n(\epsilon)$ の間の関係が

$$n(\epsilon) \quad \simeq \quad \epsilon^{-D_{q=0}} \tag{204}$$

であることを意味するので, この $D_{q=0}$ は対象図形のフラクタル次元 (容量次元, ボックスカウント次元) である. また, $q = 1$ のときには「情報次元」, $q = 2$ の場合には「相関次元」となったことを思い出そう.

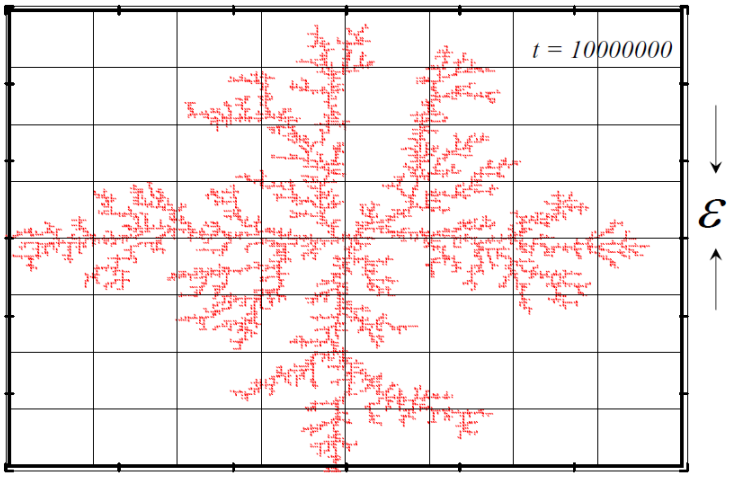


図 58: フラクタル図形をサイズ ϵ のセルで覆う.

14.2　パラメータ q で特徴つけられる「フィルタ」を介して図形を見る

ここで一般化次元の定義式 (202) から, $q > 1$ ならば点が存在する確率が比較的大きなセル i ほど, その確率は (202) 式の和の中で相対的に大きく寄与することになる. 従って, このようにフラクタル次元をパラメータ q を介して一般化することで, 対象とする図形の点の存在確率が大きいところと小さいところをそれぞれ強調してフラクタル次元を測りなおすことができることになる. つまり, q を大きくすることで, 点の存在確率が大きいところを強調し, 逆に q を小さくすることで点の存在確率が小さいところを強調してフラクタル性の度合いが測れることになる. フラクタル図形が複雑になればなるほど $q = 0$ で定義される次元ではなく, より広い q の値である種の「フィルタ」をかけて図形を捉え, その次元を考えた方が適切な場合が多い (単一の q では捉えられないほど複雑な図形) [1] . このようにパラメータ q を用いて一般化されたフラクタル次元 (202) を**マルチフラクタル次元**と呼び, そのような尺度で測られたフラクタルを**マルチフラクタル**と呼ぶ. 一方, ここで定義されたマルチフラクタル次元が用いたフィルタに依らない, つまり, パラメータ q の値に依存しない図形もあり, それを単にフラクタル, あるいは「モノフラクタル」と呼ぶ場合がある. ここで学ぶマルチフラクタルは自然現象のみならず, 株や為替の時系列などのデータ解析にも用いられる重要な概念となってきている.

[1] 信号処理や応用数学で学んだかもしれないが, 周波数を制限して画像や音声を切り出す「低周波通過フィルタ」「高周波通過フィルタ」などを思い出す (比較してみる) と良い.

14.3　二項分岐過程とそのマルチフラクタル次元

ここではマルチフラクタルの概念とマルチフラクタル次元の計算方法に慣れるために, **二項分岐過程**と呼ばれる単純なプロセスに従って描かれる自己相似図形を考えよう.

14.3.1　描画アルゴリズム

このプロセスは図 59 のように一次元の数直線上 $[0,1]$ に確率を割り当てる. この割り当て方は, まず, この線分を 2 分割し, その左側に p, 右側に $1-p$ を割り当てる. 次いで, この左側の $[0,0.5]$ をさらに 2 分割し, や

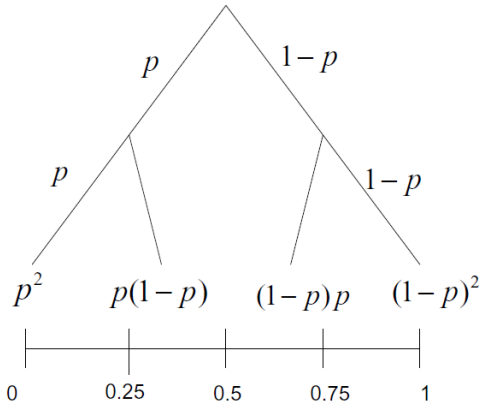


図 59: 二項分岐過程. $n=2$ の場合.

はり, 左側に p, 右側に $1-p$ を割り当て, 1 回目の分割でできた $[0,5,1]$ の区間についても同様に右側に p を, 左側に $1-p$ を割り当てる. このような割り振りでできる「2 分木」の末端にはそれぞれの経路 (「枝」) に割り振られた確率の積が与えられる. 従って, 2 回目の分割では区間 $[0,0.25]$, $[0.25,0.5]$, $[0.5,0.75]$, $[0.75,1]$ の 4 区間にそれぞれ $p^2, p(1-p), (1-p)p, (1-p)^2$ が割り振られることになる (図 59 参照).

このプロセスを n 回繰り返すと線分 $[0,1]$ は 2^n 等分され, その中で確率 $p^k(1-p)^{n-k}$ が割り振られている小区間は ${}_nC_k$ 個となる. このようにしてできる小区間を横軸, 各小区間に割り当てられた確率を縦軸にプロットすると図 60 のようになる. この図中の組み込み図には区間 $[0,0.1]$ を拡大した部分が載せてある. この図からわかるように, この図形は「自己相似性」を持つ.

従って, 具体的に計算機で実行するためのコーディングの際には「0」で 2 分岐の左側を「1」で右側を表すことに約束すると, n ステップ後の 2 分木の末端 (いわゆる「葉」) は $(000\cdots000)_2$, $(000\cdots001)_2$, $\cdots$, $(111\cdots111)_2$ 等と 2 進数でコードされる. よって, n 個の 0,1 の並びのうち k 個の 1 を含む葉には確率 $p^k(1-p)^{N-k}$ を割り当てることにし, この葉の位置する $[0,1]$ 区間の値はこの葉の 2 進数 $(x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0)_2$, ($x_i=1$ の個数が k 個) を 10 進数表示したものを 2^n でスケールしなおせばよい. すなわち, この葉の $[0,1]$ 区間内の位置 X は

$$X \quad = \quad \frac{\sum_{i=0}^{n-1} x_i 2^i}{2^n} \tag{205}$$

で与えられる. まとめると

$$(x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0)_2 = \underbrace{(0110\cdots01)_2}_{k\text{ 個の「1」},\ n-k\text{ 個の「0」}} \quad \rightarrow \quad X = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n-1} x_i\, 2^i \tag{206}$$

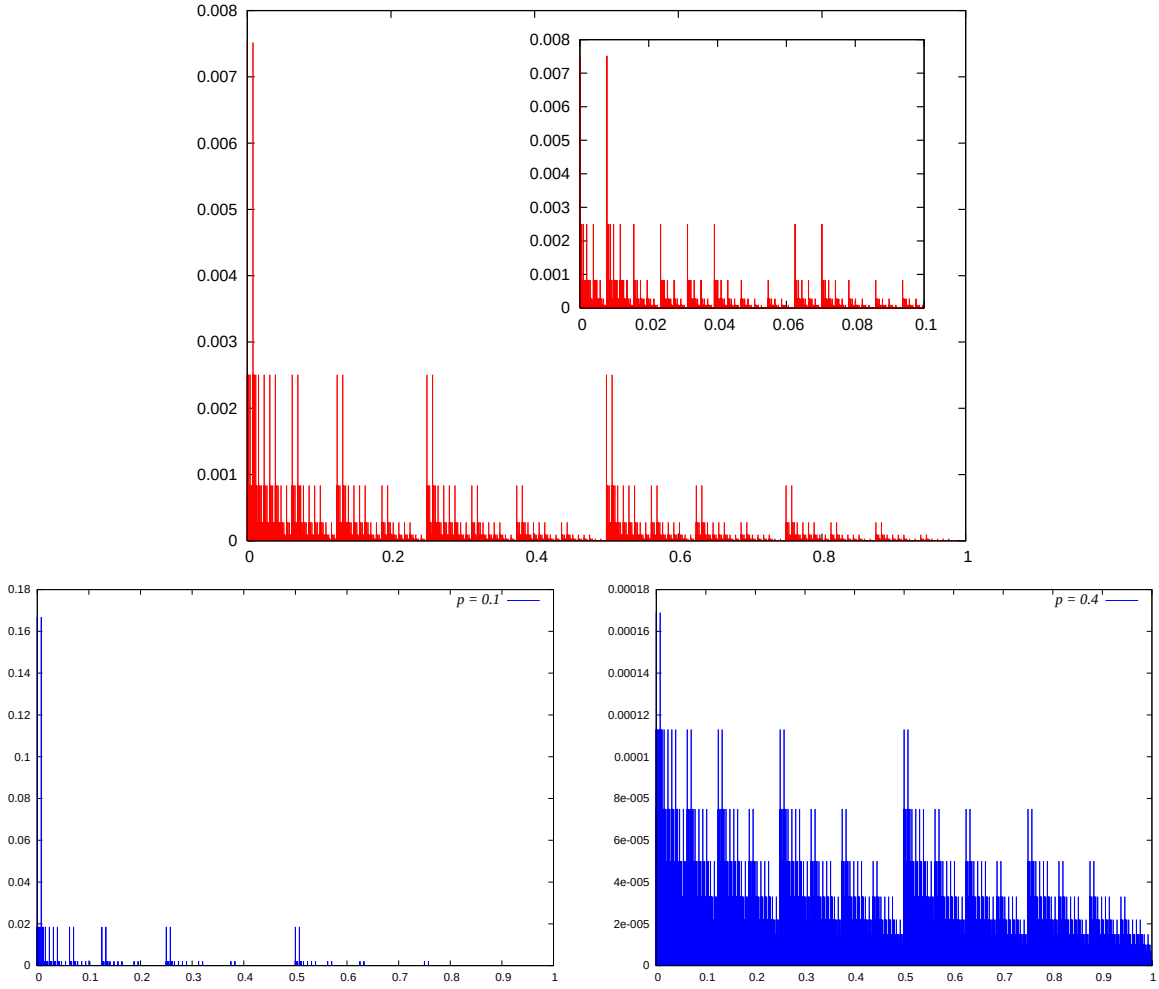


図 60: 二項分岐過程の密度分布．上図では $p = 0.25$ と選んである．上図の組み込み図は同図のスケールを変えてプロットしたもの．下図はそれぞれ $p = 0.1, 0.4$ の場合の二項分岐過程の密度分布．$n = 18$ と選んでいる．

$$\rightarrow \quad Y = p^k (1-p)^{n-k} \tag{207}$$

となる．この (X, Y) をプロットしたものが図 60 である[2] ．

14.3.2　マルチフラクタル次元の計算

このようにしてできる図形のマルチフラクタル次元を議論するために, D_q が次の**分配関数**:

$$Z_q(\epsilon) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n(\epsilon)} [p_i(\epsilon)]^q \tag{208}$$

を用いて

$$D_q \quad = \quad \frac{1}{q-1} \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log Z_q(\epsilon)}{\log \epsilon} \tag{209}$$

[2] 数直線上には同じ Y を持つ X が ${}_nC_k$ 個あることに注意．また, n の選び方には注意が必要である．担当者のパソコンでは $n = 18$ 程度までが我慢できるくらいの計算時間であり, また, これを超えると出来上がる図形の容量も大きくなる．

のように書き直せることに注意しておこう[3]．ここで, $n(\epsilon)$ のセルのうち p の確率を持つものの個数を $\rho(p)$ とすると, 上記の分配関数は次のように書き直すことができる．

$$Z_q \quad = \quad \sum_p \rho(p) p^q \tag{210}$$

つまり, ここで定義した $\rho(p)$ は確率 p の「縮退度」を表す．この分配関数を今考えている二項分岐過程に対して計算すると, $p \to p^k(1-p)^{n-k}$, $\rho(p) \to {}_nC_k$ なる対応関係があることに注意して

$$\begin{aligned} Z_q &= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k [p^k (1-p)^{n-k}]^q \\ &= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k p^{qk} (1-p)^{q(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (p^q)^k \{(1-p)^q\}^{n-k} = [p^q + (1-p)^q]^n \end{aligned} \tag{211}$$

となる．よって今の場合, 一つのセルサイズは $\epsilon = 2^{-n}$ であるから, 二項分岐過程のマルチフラクタル次元は

$$D_q \quad = \quad \frac{1}{q-1} \frac{\log[p^q + (1-p)^q]^n}{\log 2^{-n}} = \frac{1}{q-1} \frac{\log[p^q + (1-p)^q]}{\log(1/2)} \tag{212}$$

で与えられる．いくつかの p に対して D_q の振る舞いをプロットすると図 61 のようになる．この図からわ

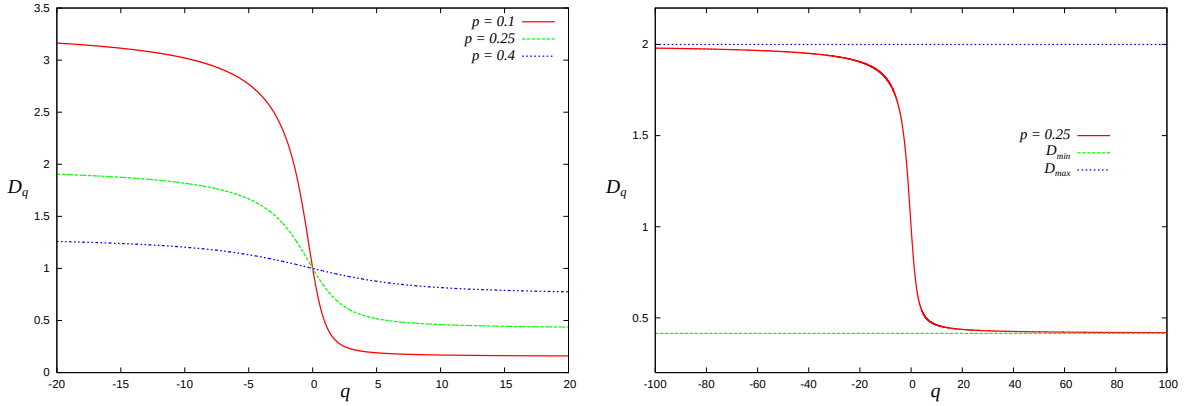


図 61: 二項分岐過程におけるマルチフラクタル次元 D_q．p の値は $p = 0.1, 0.25, 0.4$ に選んでいる．右図は $p = 0.25$ の場合についての D_q の $q \to \pm\infty$ での振舞い．それぞれ, 一定値: $D_{\max} = \log p / \log(1/2)$, $D_{\min} = \log(1-p)/\log(1/2)$ に漸近していく．

かるように, q の値を -20 から $+20$ 程度のレンジで振ると, マルチフラクタル次元 D_q の値は「両端」でそれぞれある一定値に近づいて行き, 結局, $[D_{q=+\infty}, D_{q=-\infty}]$ の有限範囲に収まることがわかる．この有限値は (212) 式から次のように評価することができる．まず, $p < 1/2$ ならば $q \to +\infty$ の場合, (212) 式右辺対数の 2 項のうち $(1-p)^q$ が支配的になるので

$$D_{q=+\infty} \quad \simeq \quad \frac{q}{q-1} \frac{\log(1-p)}{\log(1/2)} = \frac{\log(1-p)}{\log(1/2)} \tag{213}$$

[3] ここで言う「分配関数」とは統計力学と呼ばれる方法論で用いられる用語である．パラメータ q を温度 T の逆数 $\beta = T^{-1}$, セル i に粒子が存在する確率をセル i のもつエネルギーを E_i として $p_i = \mathrm{e}^{-E_i}$ とすると, $Z_\beta = \sum_i [p_i]^\beta = \sum_i \mathrm{e}^{-\beta E_i}$ がその分配関数であり, ここで議論するマルチフラクタルの一般論は統計力学との形式的類似点を持つ．

であり, 逆に $q \to -\infty$ の場合, (212) 式右辺対数の 2 項のうち p^q が支配的になるので

$$D_{q=-\infty} \simeq \frac{q}{q-1}\frac{\log p}{\log(1/2)} = \frac{\log p}{\log(1/2)} \tag{214}$$

である. これは図 61(右) で数値的にも確認できる.

この二項分岐過程で描かれるフラクタル次元は $q=-\infty$ で小さな確率で現れる点を強調して次元を測ることで大きくなり, 逆に, $q=+\infty$ で大きな確率で現れる点を強調して次元を測ると, フラクタル次元は小さくなる. これは大きな確率で得られる部分だけを描画すると, 図形は「線状」あるいは「点」のみが強調された画像となるので, その次元は 0-1 間の「低次元」な画像になることから容易に予想できる結果である.

14.4 マルチフラクタル次元の一般論

前節で求めた二項分岐過程から得られるフラクタル図形に対するマルチフラクタル解析は, より一般的な形式で議論することができる. また, 既に脚注で述べたようにパラメータ q を「逆温度」とみなした場合, ここでの一般論は「統計力学」と呼ばれる方法論と類似した数理構造を持っている[4]. ここではそれについて簡単にみておこう.

14.4.1 特異性の強さと大域スペクトル

まず, 長さ ϵ を持つセル i の中にフラクタル図形を構成する点が含まれる確率は ϵ の関数として

$$p_i(\epsilon) \propto \epsilon^{\alpha_i} \tag{215}$$

のようにセルサイズの減少: $\epsilon \to 0$ とともに減少していくことが予想される. ここで, その「減少の速さ」を表す α_i はセルごとに異なるが, ある密度を持って分布することになる. 具体的には $[\alpha, \alpha+d\alpha]$ の区間に α が存在する確率が

$$\rho(\alpha)\,\epsilon^{-f(\alpha)}d\alpha \tag{216}$$

で与えられるものとする. ここで, このパラメータ α を**特異性の強さ**, 関数 $f(\alpha)$ を**大域スペクトル**と呼ぶ. このとき $\alpha \geq 0$ に注意すると, この系の分配関数は

$$Z_q = \int_0^\infty \rho(\alpha)\,\epsilon^{-f(\alpha)}\,[\epsilon^\alpha]^q d\alpha = \int_0^\infty \rho(\alpha)\,\epsilon^{-f(\alpha)+q\alpha}d\alpha \tag{217}$$

で与えられる. ここで, この (217) 式が分配関数の定義 (208) に則っているかを確認するためには

$$\rho(\alpha)\,\epsilon^{-f(\alpha)} = \sum_{i=1}^{n(\epsilon)}\delta(\alpha-\alpha_i) \tag{218}$$

を上式に代入すればよい. するとデルタ関数の性質に注意して直ちに

$$Z_q = \int_0^\infty \sum_{i=1}^{n(\epsilon)}\delta(\alpha-\alpha_i)\,\epsilon^{q\alpha}d\alpha = \sum_{i=1}^{n(\epsilon)}\epsilon^{q\alpha_i} = \sum_{i=1}^{n(\epsilon)}[p_i(\epsilon)]^q \tag{219}$$

が得られる. これは我々の分配関数の定義 (208) である.

さて, ここからマルチフラクタル次元を求めるためには, 具体的に Z_q に含まれる α の積分を実行しなければならないが, セルのサイズが $\epsilon \to 0$ となる極限では被積分関数のうちの $\epsilon^{-f(\alpha)+q\alpha}$ 肩の極小値で積分

[4] ただし, この講義では統計力学, および, それとの関係に関しては触れない.

の値が支配されることに注意すればこの積分を精度よく実行することができる (鞍点近似). この極小値を与える α を $\alpha(q)$ とおくと, 極値条件より

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\{-f(\alpha)+q\alpha\}\Big|_{\alpha=\alpha(q)} = 0 \tag{220}$$

すなわち

$$q = \frac{\partial f(\alpha)}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=\alpha(q)} \tag{221}$$

が成り立つ. 従って, この条件の下で $-f(\alpha)+q\alpha$ は

$$-f(\alpha)+q\alpha \simeq -f(\alpha(q))+q\alpha(q)+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f(\alpha)}{\partial\alpha^2}\Big|_{\alpha=\alpha(q)}(\alpha-\alpha(q))^2 \tag{222}$$

と展開されるので (ここに, 積分を有限値にするため $\partial^2 f(\alpha)/\partial\alpha^2|_{\alpha=\alpha(q)} < 0$ であることに注意), ここでの分配関数を

$$Z_q = \rho(\alpha(q))\epsilon^{-f(\alpha(q))+q\alpha(q)}\int_0^\infty \epsilon^{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(\alpha)}{\partial\alpha^2}|_{\alpha=\alpha(q)}(\alpha-\alpha(q))^2}d\alpha \tag{223}$$

のように書き直すことができる. ここに

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \epsilon^{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(\alpha)}{\partial\alpha^2}|_{\alpha=\alpha(q)}(\alpha-\alpha(q))^2}d\alpha &= \int_0^\infty \exp\left[\frac{1}{2}\log\epsilon\frac{\partial^2 f(\alpha)}{\partial\alpha^2}\Big|_{\alpha=\alpha(q)}(\alpha-\alpha(q))^2\right]d\alpha \\ &= \sqrt{-\frac{\pi}{2(\log\epsilon)\frac{\partial^2 f(\alpha)}{\partial\alpha^2}|_{\alpha=\alpha(q)}}}\end{aligned} \tag{224}$$

であることに注意すると[5], マルチフラクタル次元 D_q は

$$\begin{aligned}(q-1)D_q &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\log Z_q}{\log\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\log\rho(\alpha(q))}{\log\epsilon} - f(\alpha(q))+q\alpha(q)+\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\sqrt{-\frac{\pi}{2(\log\epsilon)\frac{\partial^2 f(\alpha)}{\partial\alpha^2}|_{\alpha=\alpha(q)}}}}{\log\epsilon} \\ &= -f(\alpha(q))+q\alpha(q)\end{aligned} \tag{225}$$

となる. ここで $\lim_{\epsilon\to 0}(\log\epsilon)^{-1}=0$, $\lim_{\epsilon\to 0}(\log\epsilon)^{-3/2}=0$ を用いたことに注意されたい.

そこで, 簡単のため

$$\tau(q) \equiv (q-1)D_q \tag{226}$$

と定義すると

$$\tau(q) = -f(\alpha(q))+q\alpha(q) \tag{227}$$

が得られる. 従って

$$f(\alpha(q)) = q\alpha(q)-\tau(q) \tag{228}$$

[5] ここで

$$\int_0^\infty \epsilon^{-b\alpha^2}d\alpha = \int_0^\infty \mathrm{e}^{\log\epsilon^{-b\alpha^2}}d\alpha = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-b(\log\epsilon)\alpha^2}d\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{b\log\epsilon}}$$

を用いたことに注意.

であるから

$$\begin{aligned}\frac{d\tau}{dq} &= \frac{\partial\tau}{\partial q}+\left(\frac{\partial\tau}{\partial\alpha}\right)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial q}\right)\\ &= \alpha+\left\{q-\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right\}\frac{\partial\alpha}{\partial q}=\alpha\end{aligned} \tag{229}$$

が得られる. 従って, 以上をまとめると

$$f(\alpha(q)) = q\alpha(q)-\tau(q) \tag{230}$$

$$\frac{d\tau}{dq} = \alpha \tag{231}$$

が得られれる[6] . ここで, $\partial^2 f(\alpha)/\partial\alpha^2|_{\alpha=\alpha(q)} < 0$ であったから, 関数 $f(\alpha)$ は上に凸の関数である. また, $\alpha \geq 0$ と (231) 式から関数 τ は q の増加関数であるので (230) 式から

$$f(q(\alpha)) = q\alpha(q)-\tau(q) \leq 0\cdot\alpha(0)-\tau(0) = -\tau(0) = D_{q=0} \tag{232}$$

が得られる. 従って, 関数 f は $q=0$ のときに最大値 $D_{q=0}$ をとる.

また, 関数 $f(\alpha)$ は上に凸の関数なので, (221) 式から $q\to+\infty$ のとき $\alpha=\alpha_{\min}$, $q\to-\infty$ のとき $\alpha=\alpha_{\max}$ である. 従って, $\tau(q)\simeq\alpha q$ として線形近似すると

$$\tau(q\to+\infty) \simeq \alpha_{\min}\cdot(+\infty) \tag{233}$$

$$\tau(q\to-\infty) \simeq \alpha_{\max}\cdot(-\infty) \tag{234}$$

に注意すると, $D_q=\tau(q)/(q-1)$ であるから $D_{\max}=D_{q\to-\infty}, D_{\min}=D_{q\to+\infty}$ であり, $\alpha_{\min},\alpha_{\max}$ の両端で大域スペクトル f の値は

$$\begin{aligned}f(\alpha_{\min}) &= (+\infty)\cdot\alpha_{\min}-\tau(q\to+\infty)\\ &= (+\infty)\cdot\alpha_{\min}-\alpha_{\min}\cdot(+\infty)=0\end{aligned} \tag{235}$$

$$\begin{aligned}f(\alpha_{\max}) &= (-\infty)\cdot\alpha_{\max}-\tau(q\to-\infty)\\ &= (-\infty)\cdot\alpha_{\max}-\alpha_{\max}\cdot(-\infty)=0\end{aligned} \tag{236}$$

となることがわかる.

さらに, (221)(230) 式から

$$\begin{aligned}f(q(\alpha)) &= q\alpha(q)-\tau(q)\\ &= \left(\left.\frac{\partial f(\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=\alpha(q)}\right)\alpha(q)-\tau(q)\end{aligned} \tag{237}$$

より, 原点を通り, 傾き:

$$q=\left(\left.\frac{\partial f(\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=\alpha(q)}\right) = 1 \tag{238}$$

[6] 応用数学で学習したと思うが, この関係 (230)(231) をもって「関数 f は関数 τ のルジャンドル変換である」という. また, $df/d\alpha=y$ とおくと

$$P(y)=\alpha y-f=\alpha\frac{df}{d\alpha}-f=\alpha q-f=\tau$$

であるから, 「関数 τ は関数 f のルジャンドル変換」でもある.

の直線: $f=\alpha$ と (230) 式の交点の α 座標を求めると, $(1-q)\alpha=-\tau(q)=(1-q)D_q$ より

$$\alpha = D_{q=1} \tag{239}$$

であり, このときの f は

$$f(\alpha(1)) = \alpha = D_{q=1} \tag{240}$$

である.

14.4.2 二項分岐過程再考

上で展開された一般論は当然, 個別の現象である二項分岐過程に対しても当てはまる. 具体的なケースを考えることで理解も深まるので, ここでは一般論をこの二項分岐過程に適用してみよう.

まずは (212) より, マルチフラクタル次元が

$$D_q = \frac{1}{q-1}\frac{p^q+(1-p)^q}{\log(1/2)} \tag{241}$$

で与えられたことを思い出すと, $\tau(q)$ は

$$\tau(q) = (q-1)D_q = \frac{p^q+(1-p)^q}{\log(1/2)} \tag{242}$$

である. 従って, (231) 式は

$$\alpha = \frac{d\tau}{dq} = \frac{1}{\log(1/2)}\left[\frac{p^q\log p+(1-p)^q\log(1-p)}{p^q+(1-p)^q}\right] \tag{243}$$

となる.

ここで簡単のため

$$\xi = \frac{p^q}{p^q+(1-p)^q} \tag{244}$$

とおくと

$$1-\xi = \frac{(1-p)^q}{p^q+(1-p)^q} \tag{245}$$

となることに気づけば (243) 式は

$$\alpha = \frac{1}{\log(1/2)}(\xi\log p+(1-\xi)\log(1-p)) \tag{246}$$

と書き直すことができ, 従って, (230) 式から大域スペクトルは

$$\begin{aligned} f &= \frac{q}{\log(1/2)}(\xi\log p+(1-\xi)\log(1-p)) - \frac{1}{\log(1/2)}\log(p^q+(1-p)^q) \\ &= \frac{1}{\log(1/2)}(\xi\log\xi+(1-\xi)\log(1-p)) \end{aligned} \tag{247}$$

として求めることができる. 以上をまとめると, 二項分岐過程の特異性の強さ α と大域スペクトルは

$$\alpha = \frac{1}{\log(1/2)}(\xi\log p+(1-\xi)\log(1-p)) \tag{248}$$

$$f = \frac{1}{\log(1/2)}(\xi\log\xi+(1-\xi)\log(1-\xi)) \tag{249}$$

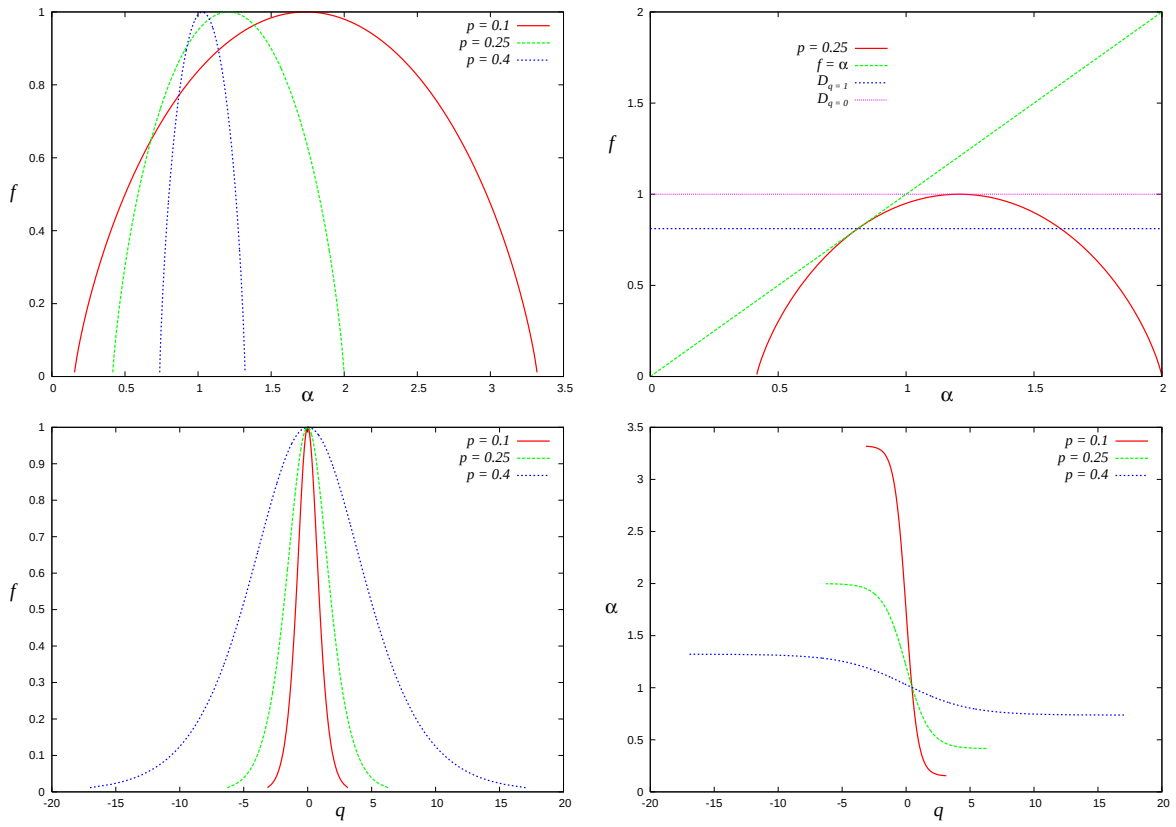


図 62: 二項分岐過程における f の α 依存性. p の値は $p = 0.1, 0.25, 0.4$ に選んでいる (左図). 右図は $p = 0.25$ に関し, f と $D_{q=0}, D_{q=1}$ の値の関係をプロットしてある. 下段は f の q 依存性 (左), および, α の q 依存性 (右).

である. ここに, $0 \leq \xi \leq 1$ に注意して, いくつかの確率 p に対して大域スペクトルをプロットすると図 62(左上) のようになる.

ところで, $D_{q=0}, D_{q=1}$ の値, および, そのときの特異性の強さ α は次のようにして陽に求めることができる. まずは (244)(245) 式を辺々割ると

$$\frac{\xi}{1-\xi} \quad = \quad \left(\frac{p}{1-p}\right)^q \tag{250}$$

が得られる. 従って, $q = 0$ の場合には, $\xi = 1/2$ であり, 従って, このときの f の値は (249) 式から $f = 1$ であり, これを与える α の値は (248) 式から

$$\alpha \quad = \quad \frac{\log p(1-p)}{2\log(1/2)} \tag{251}$$

で与えられる.

一方, $q = 1$ の場合には, (250) 式から $\xi = p$ であり, このときの大域スペクトル値, および, 特異性の強さは (249)(248) 式から

$$f \quad = \quad \alpha = \frac{p\log p + (1-p)\log(1-p)}{\log(1/2)} \tag{252}$$

で与えられる. この関係を $p = 0.25$ に対して図 62(右上) に載せた.

以上がマルチフラクタルとその次元の計算方法である. 興味のある者はこの講義で作図したいくつかのフラクタル図形に対し, マルチフラクタル次元を q の関数として数値計算してみると良いであろう.

レポート課題 12

本講義で学習したカオスやフラクタルが役に立つような事例があればそれを挙げ, A4 用紙数枚程度で説明せよ. なお, 役に立たないと思う場合にその理由を書いても良い.
全てのレポートの〆切: **平成 21 年 8 月 14 日 (金) 午後 5 時 (厳守)**, 提出先は情報科学研究科棟 8-13 のポストまで.

講義「カオス・フラクタル」はこれで終わりです. 時間的にこの講義で扱うことができなかった「イジング模型」などの臨界現象 (相転移) におけるフラクタル, 「砂山崩し模型」などによる自己組織臨界現象, パーコレーション, ブラウン運動などの関連する重要なトピックスに関しては後期の「情報工学演習 II」の時間にとりあげる予定です.

以下に本講義に関連する参考書を何点か挙げておきます.

参考文献

[1] 「カオス入門：現象の解析と数理」長島弘幸, 馬場良和 共著 培風館 (1992).

[2] *Fractals for the classroom*, by H. Peiger, H. Jurgen and D. Saupe, part I,II, Springer-Varlag (1993).

[3] *Modeling reality: How computer mirror life*, by Iwo Bialynicki-Birula and Iwona Bialynicka-Birula (2004).

[4] 「非線形力学とカオス: 技術者・科学者のための幾何学的手法」J.M.T. Thompson, H.B. Stewart 著, 武者利光, 橋口住久訳 オーム社 (1988).

[5] 「カオス時系列解析の基礎と応用」池口徹, 山田泰司, 小室元政 共著, 合原一幸編, 産業図書 (2000).

[6] 「フラクタル」　高安秀樹 著　朝倉書店 (1986).

[7] 「フラクタル科学」高安秀樹 編著 朝倉書店 (1987).

[8] 「フラクタル成長現象」タマス・ヴィチェック 著, 宮島佐介 訳, 朝倉書店 (1990).

[9] 「フラクタル」本田勝也 著 朝倉書店 (2002).

[10] 「フラクタルと数の世界」西沢清子 他著 海文堂 (1991).

[11] 「パーコレーションの科学」小田垣孝 著 嘗華房 (1993).

[12] *Introduction to percolation theory : revised 2nd edition*, by D. Stauffer and A. Aharonoy, (Tayler & Francis, 1994).

[13] 「パーコレーション：ちょっと変わった確率論入門」 樋口保成 著 遊星社 (1996).

[14] 「確率モデルって何だろう」今野紀雄 著 ダイヤモンド社 (1995).

[15] 「複雑系を解く確率モデル」香取真理 著 講談社ブルーバックス (1997).

[16] 「秩序・無秩序の世界」黒田耕嗣 著 丸善 (1987).