HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	2009年度 カオス・フラクタル 講義ノート
Author(s)	井上, 純一
Relation	2009年度前期に工学部情報工学コース3年生を対象に開講された講義「カオス・フラクタル」の講義資料
Issue Date	2009
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/38906
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	learning object
File Information	CF2009_7.pdf, 第7回講義ノート

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

カオス・フラクタル 講義ノート #7

担当：井上 純一 (情報科学研究科棟 8-13)
URL：http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/index.html

平成 21 年 6 月 9 日

目 次

8 非線形力学系とカオス **51**
8.1 レスラー方程式とその振る舞い 52
8.2 ポアンカレ断面 54

先週の復習かつレポート課題の解答として, 方程式:

$$\frac{dv}{dt} = \epsilon(1-x^2)v - x \tag{140}$$

$$\frac{dx}{dt} = v \tag{141}$$

の振る舞いを数値的に調べてみる．まず, パラメータ ϵ がゼロの場合, 方程式は単振動 (調和振動子) を表す．横軸を x, 縦軸を v とした場合の (位相空間内の) 軌道は (140) 式の両辺に $v = dx/dt$ をかけるとエネルギーの時間変化についての関係式がでるので, 実行すると

$$v\frac{dv}{dt} = -x\frac{dx}{dt} \tag{142}$$

すなわち

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{x^2}{2}\right) = 0 \tag{143}$$

となり, E を初期条件から決まる一定値とすると

$$v^2 + x^2 = (\sqrt{2E})^2 \tag{144}$$

となり, 半径が $\sqrt{2E} = \sqrt{v_0^2 + x_0^2}$ の円となる (x_0, v_0 は $t = 0$ のときの位置と速度)．実際に $\epsilon = 0$ の場合に (140)(141) 式を 4 次のルンゲ・クッタ法で数値的に解き, 軌道 (x, v) をプロットすると図 29 のようになる．これを計算するためのソースコードを次に載せる．

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
#define h 0.01
#define epsilon 0.0
```

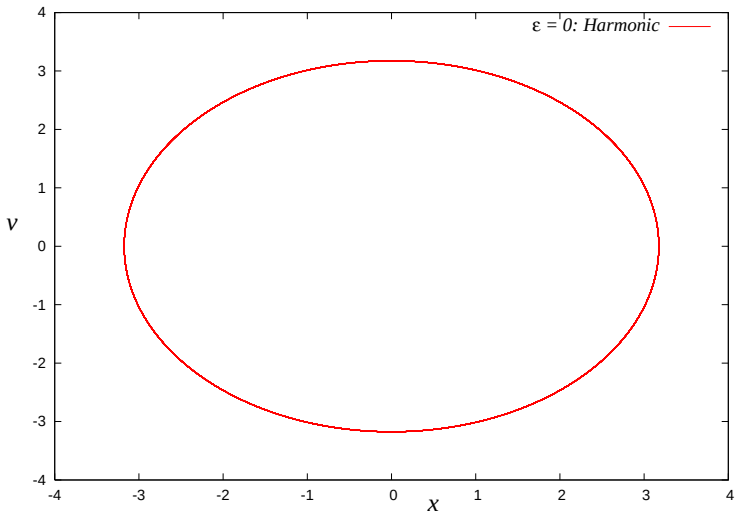

図 29: $\epsilon = 0$ の場合の軌道. 半径を $\sqrt{2E} = \sqrt{v_0^2 + x_0^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} = 3.16$ とした円になる. gnuplot によってプロットした図は縦軸と横軸のスケールが違っていることに注意.

```
double func1(x,y)
double x;
double y;
{return (y);}
double func2(x,y)
double x;
double y;
{return (epsilon*(1.0-x*x)*y-x);}
main()
{
    FILE *fpr;
    int i,imax=50000;
    double x,k1x,k2x,k3x,k4x,kx,y,k1y,k2y,k3y,k4y,ky,z,k1z,k2z,k3z,k4z,kz;
if((fpr = fopen("test0.dat", "wt")) !=NULL){
       for(i = 0,x=1.01,y=3.01; i <= imax; i++){
   k1x = h*func1(x,y);
   k1y = h*func2(x,y);
          k2x = h*func1(x+0.5*k1x,y+0.5*k1y);
          k2y = h*func2(x+0.5*k1x,y+0.5*k1y);
            k3x = h*func1(x+0.5*k2x,y+0.5*k2y);
            k3y = h*func2(x+0.5*k2x,y+0.5*k2y);
                 k4x = h*func1(x+k3x,y+k3y);
                 k4y = h*func2(x+k3x,y+k3y);
             kx = (k1x+2.0*k2x+2.0*k3x+k4x)/6.0;
             ky = (k1y+2.0*k2y+2.0*k3y+k4y)/6.0;
          x = x + kx;
```

```
        y = y + ky;
                fprintf(fpr,"%lf %lf %lf\n",i*h,x,y);
    }
}
    fclose(fpr);
}
```

いくつかの有限の ϵ に対する位相空間内の軌道を求めてみると図のようになる. 図 30 (上, および左下) は

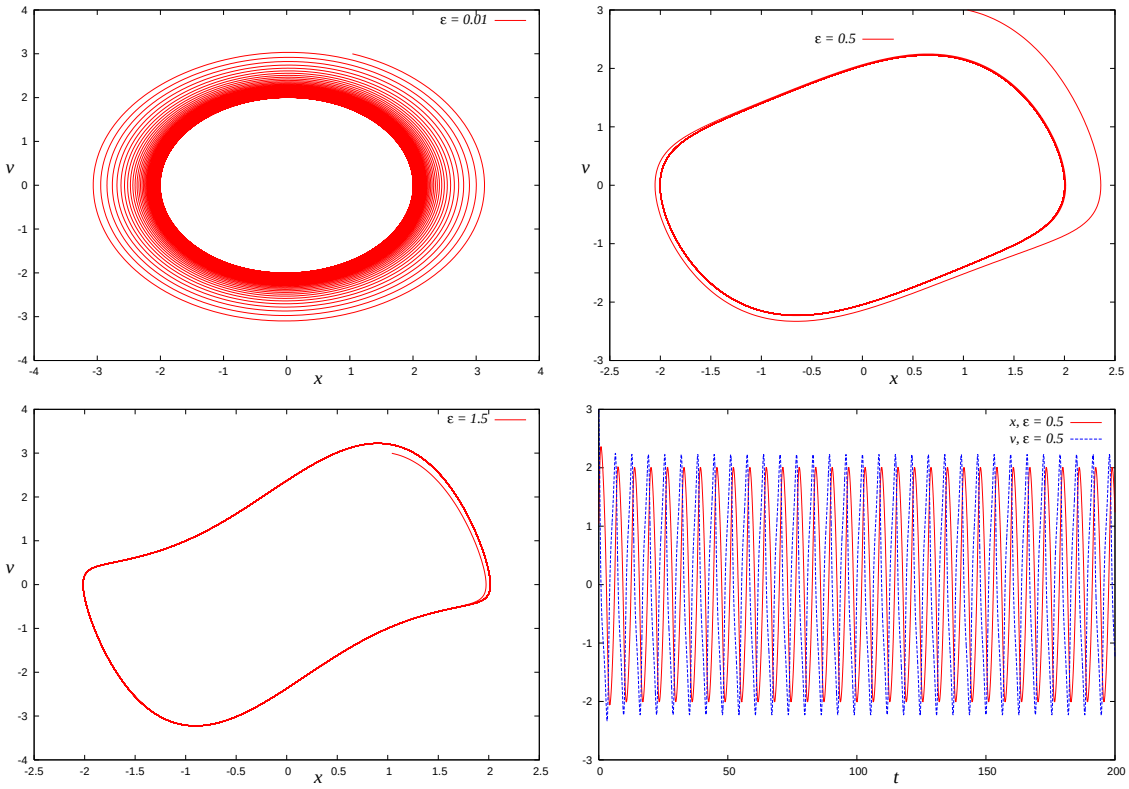

図 30: 有限の ϵ の場合のアトラクタの様子と $\epsilon = 0.5$ の場合の時間変化 (右).

$\epsilon = 0.01$, および $\epsilon = 0.5, 1.5$ の場合の軌道をそれぞれプロットした. また, 右下は $\epsilon = 0.5$ の場合の位置 x, 速度 v の時間変化である. これらの図より, 時間の経過とともに, 軌道はある閉曲線に収束することがわかる. このような軌道の収束する点, もしくは曲線を**アトラクタ**と呼ぶ.

8 非線形力学系とカオス

今回の講義では, 前回学んだレスラー方程式の振る舞いを方程式の形から定性的に説明するとともに, アトラクタを可視化するためのポアンカレ断面について詳しくみていく.

8.1 レスラー方程式とその振る舞い

前回みたように, レスラー方程式:

$$\frac{dx}{dt} = -y - z \tag{145}$$
$$\frac{dy}{dt} = x + ay \tag{146}$$
$$\frac{dz}{dt} = b + z(x - c) \tag{147}$$

をルンゲ・クッタ法を用いて数値的に解き, その軌道を 3 次元に描画すると図 31 のようになる. この図を

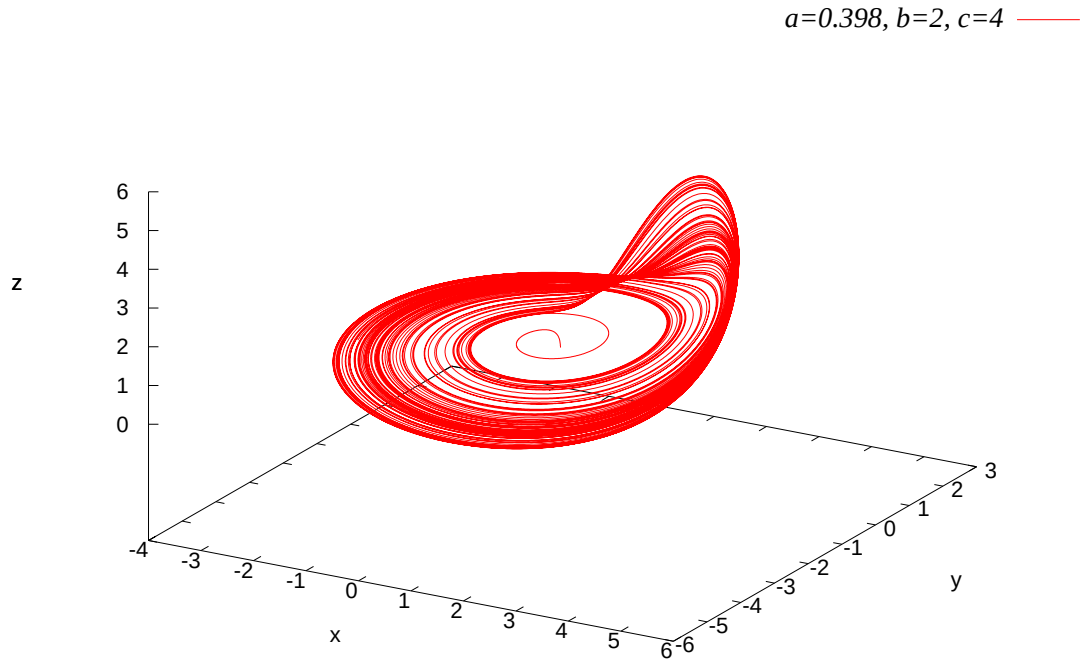

図 31: レスラー方程式の数値解から得られる軌道の様子. パラメータは $a = 0.398, b = 2, c = 4$ に選んである.

描画するのに, 方程式の初期値は原点近傍 $(x, y, z) = (0.01, 0.01, 0.01)$ に選んである. この図をみるからに複雑なアトラクタであることがわかるが, この振る舞いを方程式の形からある程度説明することができる.

まず, この図 31 から, 軌道がスタートしてからしばらくは x-y 平面内に停滞していることがわかる. そこで, 方程式 (145)(146)(147) において, x-y 平面内近傍での初期の振舞いがどうであるかを調べるために, $z \simeq 0$ とおいてみると, (145)(146) 式から

$$\frac{dx}{dt} = -y \tag{148}$$
$$\frac{dy}{dt} = x + ay \tag{149}$$

が得られる. (148) 式の両辺をを時間で微分し, それに (149) 式を代入すると, 次の x に関する 2 階の線形

微分方程式が得られる.

$$\frac{d^2x}{dt^2} - a\frac{dx}{dt} + x = 0 \tag{150}$$

そこで, これに $x = \mathrm{e}^{pt}$ を代入すると, 特性方程式は $p^2 - ap + 1 = 0$ となるので, この 2 次方程式の解は

$$p = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2} \tag{151}$$

であり, $0 < a < 2$ のときに $\sqrt{4 - a^2}/2 \equiv \omega$ とおけば, この微分方程式 (150) の解は

$$x = \mathrm{e}^{at/2}\left\{\alpha \mathrm{e}^{i\omega t} + \beta \mathrm{e}^{-i\omega t}\right\} = \mathrm{e}^{at/2}\left\{A\cos\omega t + B\sin\omega t\right\} \tag{152}$$

となる. 従って, y は (149) 式から

$$y = -\frac{dx}{dt} = -\mathrm{e}^{at/2}\left\{\left(\frac{aA}{2} + B\omega\right)\cos\omega t + \left(\frac{aB}{2} - A\omega\right)\sin\omega t\right\} \tag{153}$$

である (A, B は初期条件により決まる積分定数). 従って, x-y 平面内での軌道はその「半径」が時間とともに $\mathrm{e}^{at/2}$ で大きくなって行くような円運動 (らせん運動) を行う.

ここで, z の寄与が何も無ければ, らせん運動の半径は時間の経過とともに指数関数的な速さで無限大に達するはずであるが, 図 31 からわかるように, そうはなっていない. 従って, 時間の経過とともに z からの寄与が効いてきているはずなので, それを調べるため, (147) 式を見てみる. この式より, x の値が c 以下であれば, $dz/dt = 0$ となる点: $z = -b/(x - c) > 0$ へ収束する. しかし, 既にみたように, x の絶対値は時間とともに大きくなるのであるから, らせん軌道上で $x > c$ となる点で $dz/dt = b + z(x - x) > 0$ となり ($b > 0$ と選んでいるので (図 31 では $b = 2$)), z はこの点で急激な増加に転じる (この増加の「急激さ」は b が大きいほど大きい). 実際に図 32 を見ると, 確かに x の大きさがある値を超えた瞬間に z 方向への軌道

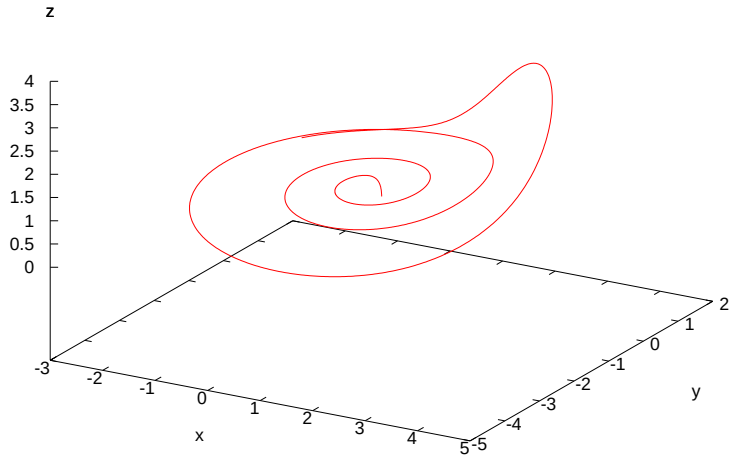

図 32: 図 31 の軌道のうち, ルンゲ・クッタ法でのステップを途中で打ち切って z が急激に増加する部分だけを抜き出したもの. $x > c$ となる時点で z 方向への急激な増加が始まる.

の急激な増加が見られる.

しかし, 同時にこの図 32 より, この z の方向の増加は長続きせず, 軌道は x-y 平面に引き戻されている. これは方程式からも見て取れる. つまり, z が大きくなると (145) 式から dx/dt の符号が負に傾き始め, 従って, x が減少し始める. すると, z が増加するための条件であった $x > c$ が崩れ始め, やがて $x < c$ となり, $dz/dt = b + z(x - c) < 0$ へと転じることから z が減少しはじめ, やがて, x-y 平面に引きつけられることになる. 上記の一連の挙動を繰り返すことで図 31 が得られることになる.

8.2　ポアンカレ断面

前節では数値実験によって得られた「奇妙な」アトラクタ (実際に**奇妙なアトラクタ**, あるいは**ストレンジ・アトラクタ**と呼ばれる) が, その方程式の振る舞いからある程度までは定性的に説明できることを見た. 図 31 に示した奇妙なアトラクタは 3 次元空間内の軌道であるので, 角度を変えてみることを繰り返すことにより, その構造を視覚的に観察することが重要である. 例えば, gnuplot では

```
gnuplot> set view 60,15
```

で見る角度を指定することができる (60,15 などの数値を適時変える. これは後の演習の時間に詳しく説明する).

しかし, ここでは, 軌道をある平面で切った切り口を考えてみる. 3 次元軌道を平面で切ったの断面なので, 得られるものは 2 次元像である. そこで, x-y 面内における x 軸からのなす角度 θ を用いて $y\cos\theta - x\sin\theta = 0$ とし, この平面と z 軸で囲まれた「半平面」でこの軌道を切ってみる. その結果を図 33 に載せよう. この

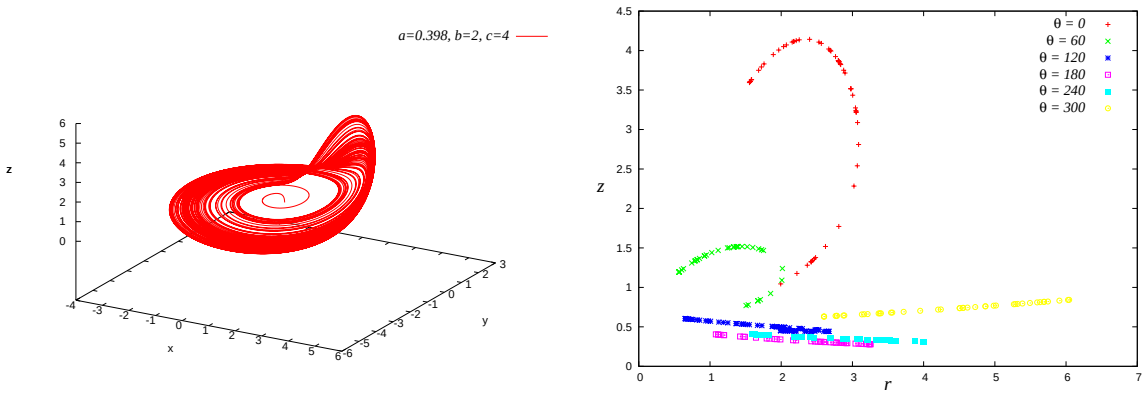

図 33: 左図の軌道を $y\cos\theta - x\sin\theta = 0$ と z 軸で囲まれる半平面で切った断面が右図.

図 33 (図 31 と同じ図) に示した軌道を $y\cos\theta - x\sin\theta = 0$ と z 軸で囲まれる半平面で切った断面が右図である. この図より, 角度 θ を $\theta = 0$ から $\theta = 300^{\circ}$ へ増やすにつれて, **軌道の断面を表す「線分」が「折りたたまれ」, 次いで「引き伸ばされる」様子が見て取れる**.

このように, 奇妙なアトラクタをある半平面で切り取った断面を**ポアンカレ断面**と呼ぶ. 後の演習の時間で実際に求めてもらうが, このポアンカレ断面を通過する点列を (x_t, x_{t+1}) としてプロットすることで, この力学系を表す実質的な「写像」を取り出すことができる[1].

さて, 上に述べた奇妙なアトラクタを示す力学系 (微分方程式) はレスラー方程式だけではない. 例えば, 次のようなローレンツ方程式:

$$\frac{dx}{dt} = -ax + ay \tag{154}$$

[1] 「リターンマップ」と呼ばれる.

$$\frac{dy}{dt} = cx - y - xz \tag{155}$$

$$\frac{dz}{dt} = -bz + xy \tag{156}$$

もパラメータ a, b, c の選び方によっては奇妙なアトラクタを持つ．その結果の一例を図 34 に載せる．講義

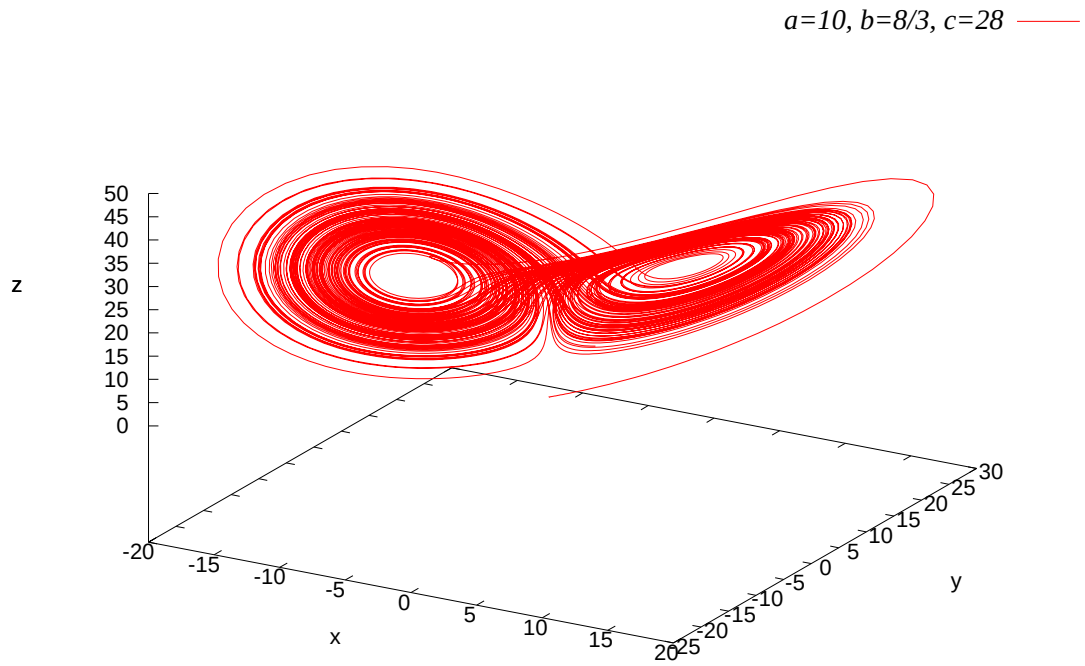

図 34: ローレンツ方程式 (154)(155)(156) から得られる奇妙なアトラクタ．$a = 10, b = 8/3, c = 28$ に選んである．

ではこのローレンツアトラクタの動画デモを見せる予定である．

レポート課題 7

ローレンツ方程式を $a = 10, b = 8/3, c = 30$ に対して数値的に解き，平面 $z = 20, 30, 40$ で切り取ったポアンカレ断面を求めるプログラムを作成し，描画ソフトが使えるものはそれをプロットせよ (その手のソフトが使えない者は後の演習の時間に説明するので，現段階ではソースコードのみで良い)．