HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	ジャンプ型空間非一様性媒質における進行パルスダイナミックス
Author(s)	大山, 義仁; 上田, 肇一; 西浦, 廉政
Relation	非線形現象のモデル化とその数理解析 = Mathematical modeling and analysis for nonlinear phenomena
Citation	数理解析研究所講究録, 1522, 153-165
Issue Date	2006-10
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40005
Type	journal article
File Information	nishiura-18.pdf



Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

数理解析研究所講究録
1522 巻 2006 年 153-165

ジャンプ型空間非一様性媒質における進行パルスダイナミックス

Dynamics of traveling pulses in heterogeneous media of jump type

大山義仁* 上田肇一† 西浦廉政‡
Yoshihito Oyama, Kei-Ichi Ueda, Yasumasa Nishiura

Abstract

本研究では, 空間1次元の反応拡散系に現れる安定なパルスに注目し, パラメータが空間非一様な場合のトラベリングパルスの振舞いを考察する. 空間非一様性はジャンプ型として解析を行なった結果, 安定なトラベリングパルスはパラメータの非一様性により3つの反応を示すことが分かった. 非一様性による影響が小さい場合はその影響を受けずトラベリング (Traveling) を続け, 影響が大きい場合はパルスの進行方向が当初の方向と反対に進行する反転現象 (Rebound) が生じる. さらに, 適度な大きさの非一様性があると安定なトラベリングパルスは分裂 (Splitting) する.

1 はじめに

反応拡散方程式は, 自然界のパターン形成や化学反応系の現象を記述する有効な手段の一つである. 同方程式に関する数多くの研究が行なわれており, 様々な現象が報告されている [1, 2, 3, 4, 8, 9]. それらの例としては, トラベリングパルスやスタンディングパルス, 自己分裂するパルスが存在すること等がある. さらに, 興味深い現象として, 二つのパルスが衝突すると消滅することや分裂を起こす現象などが知られている [5]. これらの現象の起源に関連した研究も行われており, サドルノード分岐に起源を持つことや分水嶺解が存在すること等が知られている [6, 7, 20].

このような数多くの研究が行われているにもかかわらず, 空間非一様な媒質中でのパルスの振舞いに関してはあまり知られていない. そこで, 本研究では, 空間1次元の反応拡散系に現れる安定なパルスに注目し, パラメータが空間非一様な場合のトラベリングパルスの振舞いを考察する (Fig. 1 参照).

本研究ではパルスの振舞いが比較的よく知られている Gray-Scott model を用いて空間非一様な媒質中でのパルスの振舞いを数値実験とパルスダイナミックスによる解析手法を用いて調べる. 解析を単純にするためパラメータの空間非一様性はジャンプ型とする.

本論文の以下の構成は以下の通りである. 2章でモデルの説明を行ない, 3章では数値実験結果を示す. 4章ではパルスダイナミックスによる常微分方程式への縮約に関して述べる. 5章では縮約した方程式の解析について述べる. 最後に 6章で本論文のまとめを行なう.

*筑波大学システム情報工学研究科, Email: oyama@risk.tsukuba.ac.jp
†京都大学数理解析研究所
‡北海道大学電子科学研究所

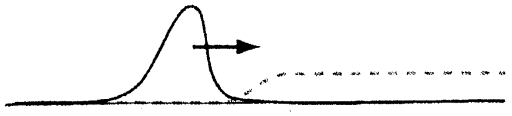


Figure 1: The solid line shows a profile traveling pulse schematically. The dotted line stands for the typical distribution of parameter k in our model system. Traveling pulses meet the heterogeneity point. For the Gray-Scott model we observe three different responses shown in Fig. 3

2 モデル

本研究では, パルスの性質が比較的良く知られている Gray-Scott モデル [10, 18] を用いる. Gray-Scott モデルは, gel reactor 中の化学反応系 $U + 2V \to 3V$ と $V \to P$ を記述したものである.

変数 $u = u(t,x)$ と $v = v(t,x)$ は時間 t と空間 x に依存し, $f > 0$ と $k > 0$ はパラメータ, $D_u > 0$, $D_v > 0$ と τ は定数とする. このとき, Gray-Scott モデルは次のように記述される.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D_u \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - uv^2 + f(1-u), \\ \tau \dfrac{\partial v}{\partial t} = D_v \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + uv^2 - (f + k(x))v, \end{cases} \qquad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

ここで, k は空間 x に依存した関数: $k(x) = k + \epsilon\chi(x)$ とする. χ は $\chi(x) = 1/(1 + \exp(-\gamma x))$ with $\gamma > 0$ として与える (Fig. 6). パラメータ ϵ はジャンプの高さを制御し, γ は非一様性の傾きを制御する. $\epsilon > 0$ のときはジャンプアップ, $\epsilon < 0$ のときはジャンプダウン, $\epsilon = 0$ のときは空間一様な場合にそれぞれ対応する.

以下, パルス解を扱うことにするため, ヌルクラインは一点 $(u,v) = (1,0)$ でのみ交わるようにパラメータの値を変化させる (Fig. 2).

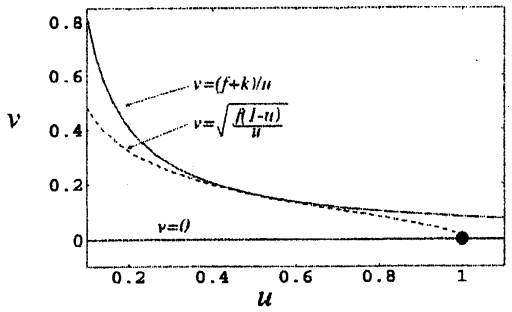


Figure 2: The nullclines of (1) for $\epsilon = 0$ intersect at only one point $(u,v) = (1,0)$; $v = (f+k)/u$ and $v = \sqrt{f(1-u)/u}$ do not intersect.

3 数値実験

3.1 Homogeneous case

はじめに, パラメータの値が空間一様な場合, すなわち式 (1) において $\epsilon = 0$ の場合を考える. 数値実験では, $D_u = 5.0 \times 10^{-1}$, $D_v = 2.5 \times 10^{-1}$, $\tau = 1.007734$, 時間刻み $\Delta t = 0.05$ として Neumann 境界条件とする. 計算スキームは Crank-Nicolson 法を用いる.

パラメータ f を固定し, k のみを変化させてみると 3 つのクラスの安定パルスが観察できる. $k = 0.0550$ のときは分裂解 (Fig. 3(a)), $k = 0.0560$ のときはトラベリングパルス (Fig. 3(b)) が, $k = 0.0570$ のときはスタンディングパルス (Fig. 3(c)) がそれぞれ観察される. パラメータ k と f を変化させたときの相図は Fig. 4 のようになる. Fig. 4 の SN-line はサドルノード分岐点を, DR-line はドリフト分岐点を表している. これらの分岐点はニュートン法を用いて数値計算により求めた. Fig. 4 の splitting 領域と traveling 領域の間にある点線は Hopf 分岐点である. SN-line と DR-line の交点は codim 2 であり, およそ $(k, f) \approx (0.057833, 0.0291)$ である.

$f = 0.026$ を固定すると, サドルノード分岐点は $k \approx 5.65092 \times 10^{-2}$, ドリフト分岐点は $k \approx 5.65746 \times 10^{-2}$ となる. $k \leq 0.05543$ では, パルスが分裂する. $k \approx 0.05543$ から $k \approx 0.05657$ では, トラベリングパルスが存在する. $k \approx 0.056509$ から $k \approx 0.05833$ では, スタンディングパルスが存在する. さらに $k > 0.05833$ では,$(1, 0)$ が唯一の解となる. 既存研究 [8, 18, 19] から, パラメータ f を変化させることに様々なダイナミックスが観察できることが知られている. 我々の数値実験は既存研究と同様の結果となっている.

Fig. 5 は $f = 0.026$ のときの安定なトラベリングパルスの伝搬スピードを表している. この図から伝搬スピードは k に対して単調減少することがわかる. $k \approx 0.056574$ にてドリフト分岐が生じてパルスが動き出す.

以下では安定なトラベリングパルスに注目するので, 安定なトラベリングパルスが存在するパラメータ領域, $f = 0.026$, $0.0555 \leq k \leq 0.0565$ として議論を進める.

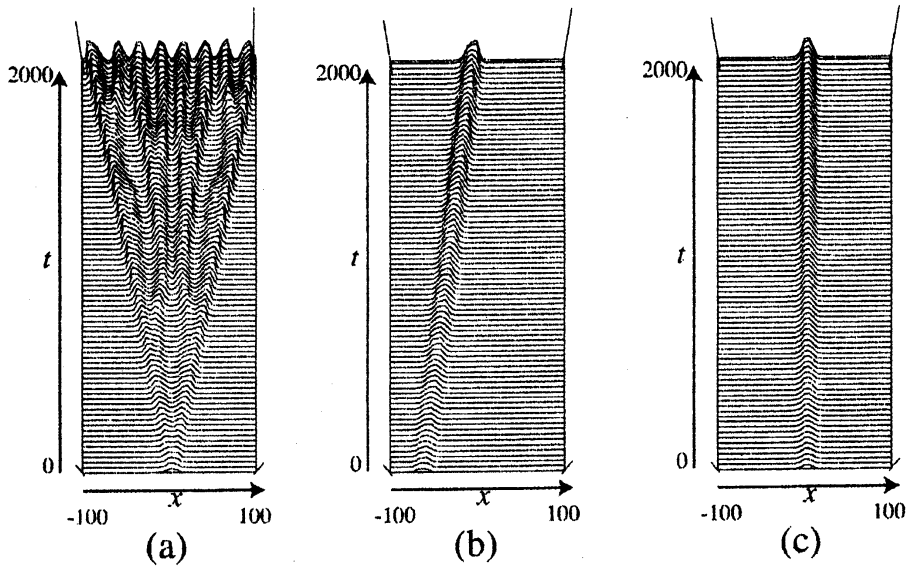


Figure 3: Dynamics of system (1) observed with numeric calculations for $f = 0.026$, $\epsilon = 0$, $\Delta t = 0.05$ and $\Delta x = 0.25$. (a) Splitting pulse ($k = 0.0550$), (b) Traveling pulse ($k = 0.0560$) and (c) Standing pulse ($k = 0.0570$)

3.2 Heterogeneous case

次に, 式 (1) において $\epsilon \neq 0$ の場合を考える. Homogeneous の場合と同様に, $D_u = 5.0 \times 10^{-1}, D_v = 2.5 \times 10^{-1}, \tau = 1.007734, \Delta t = 0.05$ として Crank-Nicholson 法を用いて数値計算を行う. $f = 0.026$ を固定して k を変化させてると, $0.0550 \leq k \leq 0.05650$ の範囲で安定なトラベリングパスルが存在する. ここで, $k(x)$ の傾きは γ により制御する. 以下の数値計算では, $\gamma = 5.0$ に固定する (Fig. 6).

k の大きさとジャンプの高さ ϵ によって, トラベリングパルスの反応は 3 つのクラスに分類できる. それらを, penetration, splitting, rebound と呼ぶことにする (Fig. 8).

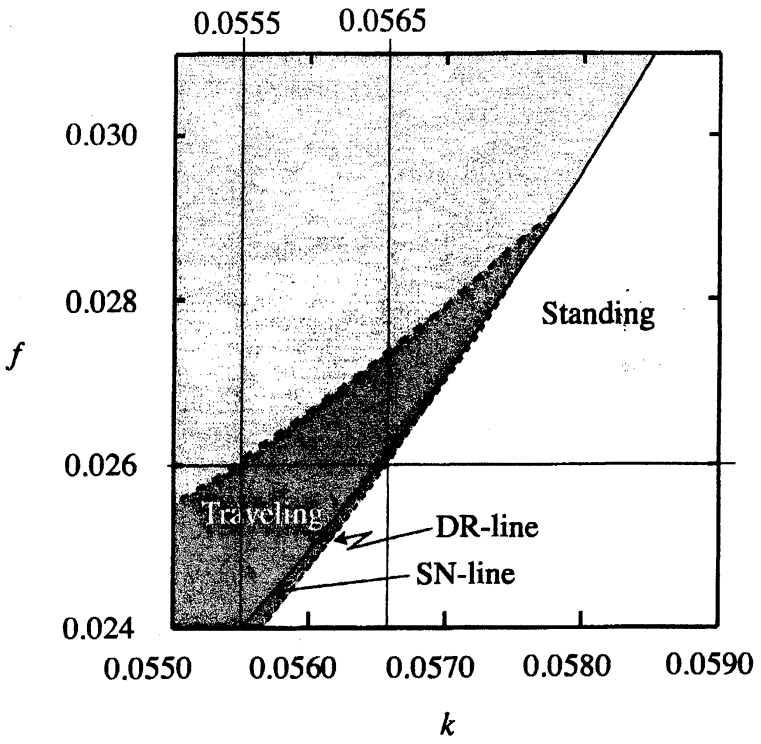


Figure 4: (k, f)-phase diagram. Here DR-line is the drift-bifurcation line, and SN-line is the saddle-node bifurcation line. The boundary between the splitting domain and the traveling domain is a Hopf bifurcation line. The cross point between DR-line and SN-line is the codim 2 point.

十分大きな $\epsilon > 0$ (jump-up) では rebound が現れ, 小さな $\epsilon > 0$ (jump-up) では penetration が現れる. Fig. 7 は ϵ を 2.0×10^{-4} から 1.2×10^{-3} まで変化させた時の反応を表している. Fig. 8 は k と ϵ をそれぞれ変化させたときの相図である. $\epsilon < 0$ (jump-down) では常に penetration が現れる. $\epsilon < 0$ を小さくしすぎると安定なトラベリングパルスが存在しないため, Fig. 8 において penetration 領域の下の領域は空白となっている.

4 常微分方程式への縮約

この章では空間非一様性媒質中でのトラベリングパルスの反応を調べる. 既存研究からサドルノード分岐がパルスの分裂に関連していることと, ドリフト分岐によりスタンディングパルスからトラベリングパルスへの起点になることが分かっている. そこでサドルノード分岐とドリフト分岐が同時に起きるパラメータ (codim 2) に注目して解析を進める.

一般の反応拡散方程式を以下のように定義する.

$$\boldsymbol{u}_t = D\boldsymbol{u}_{xx} + F(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{k}) =: \mathcal{A}(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{k}), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

ここで, $X := \{L^2(\mathbb{R})\}^N$, $\boldsymbol{u} = (u_1, \cdots, u_N)^T \in X$ は N 次元ベクトル, D 正値対角行列, $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ ベクトル値関数, $\boldsymbol{k} = (k_1 + \epsilon\chi(x),\ k_2)$ とする. ただし, k_1, k_2, $\epsilon \in \mathbb{R}$ and $\chi(x)$, C^1 関数とする. (2) に対して (S1) ~ (S4) を仮定する.

(S1) 定常パルス解が $S(x; \boldsymbol{k})$ が存在し, ある $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_c := (\bar{k}_1, \bar{k}_2) \in \mathbb{R}^2$ において $\mathcal{A}(S; \boldsymbol{k}_c) = 0$. を満たす.

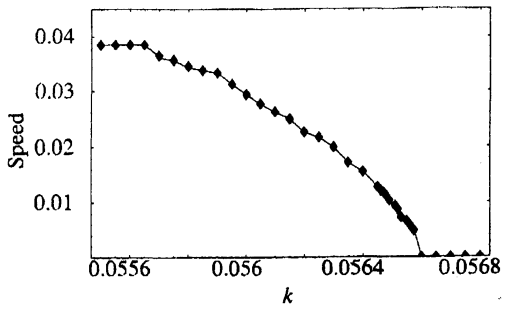


Figure 5: The propagating speed of the pulse of Gray-Scott system (1) for $f = 0.026$ and $\epsilon = 0$. The drift bifurcation occurs at $k = 0.056574$.

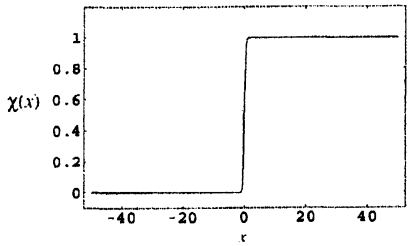


Figure 6: The profile of $\chi(x)$ for $\gamma = 5.0$.

(2) を $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k_c}$ 近傍で考えるため, パラメータ $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$ を用いて, $k_1 = \tilde{k}_1 + \eta_1$ and $k_2 = \tilde{k}_2 + \eta_2$ とする. すると, (2) は以下のように書き直せる.

$$\boldsymbol{u}_t = \mathcal{A}(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{k_c}) + (\eta_1 + \epsilon\chi(x))\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{u}) + \eta_2\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{u}), \tag{3}$$

ここで, $\boldsymbol{g}_1$ と $\boldsymbol{g}_2$ は N 次元ベクトル値関数である. L を $\boldsymbol{u} = S$, $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_c$ における $\mathcal{A}$ の線形化作用素とする.

(S2) L のスペクトルは 2 つの集合, $\sigma_1 = \{0\}$ と $\sigma_2 \subset \{\mu \in \boldsymbol{C};\ \mathrm{Re}(\mu) < -\gamma_0\}$ からなる. ただし, γ_0 は正の値.

(S3) L は $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k_c}$ において 3 つのゼロ固有値をもつ. それぞれに対応する固有関数 $\phi(x)$, $\psi(x)$, $\xi(x)$ は次の式を満たす:

$$L\phi = 0, \quad L\psi = -\phi, \quad L\xi = 0.$$

$\phi(x)$ と $\psi(x)$ は奇関数, $\xi(x)$ は偶関数である. ただし $\phi = \partial S/\partial x$.

L^* に関しても同様の性質を満たす. すなわち, 固有関数 ϕ^*, ξ^*, ψ^* は次の式を満たす:

$$L^*\phi = L^*\xi^* = 0, \quad L^*\psi^* = -\phi^*.$$

$\phi^*(x)$ と $\psi^*(x)$ は奇関数, $\xi^*(x)$ は偶関数である.

(S4) 固有関数 ϕ, ϕ^*, ψ, ψ^*, ξ, and ξ^* のそれぞれの要素は指数減衰する.

Gray-Scott モデルの場合, codim 2 における L^* の固有関数は Fig. 9 のようになる.

以上の仮定のもと, 形式的に (2) のパルス解を以下のように仮定する.

$$\boldsymbol{u} = S(x-p) + q\psi(x-p) + r\xi(x-p) + \zeta^\dagger(x-p) + \boldsymbol{w}, \tag{4}$$

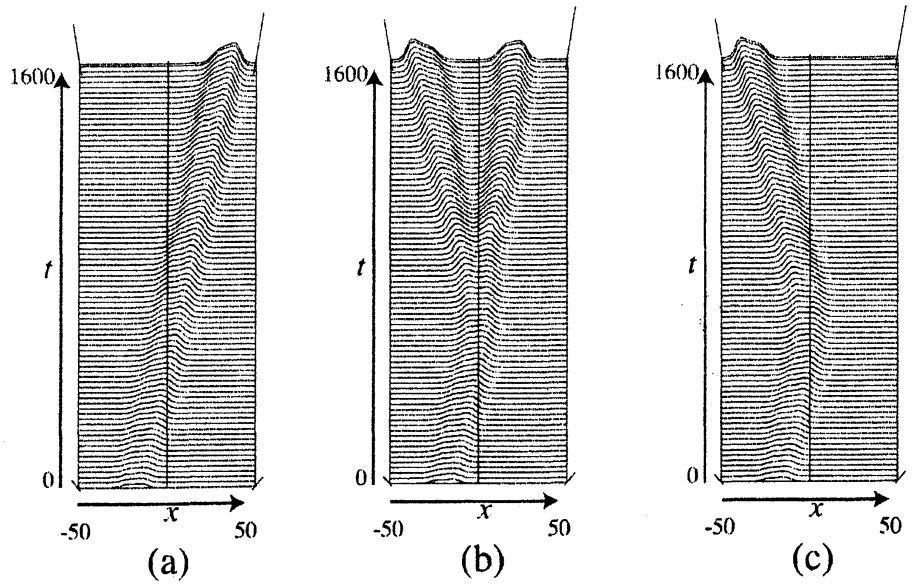


Figure 7: Heterogeneity causes a variety of pulse dynamics. (a) Penetration ($f = 0.026, k = 0.0557, \epsilon = 2.0 \times 10^{-4}$), (b) Splitting ($f = 0.026, k = 0.0557, \epsilon = 7.0 \times 10^{-4}$), (c) Rebound ($f = 0.026, k = 0.0557, \epsilon = 1.2 \times 10^{-3}$). The coefficient $k(x)$ for the Gray-Scott model (1) has a heterogeneity of jump type as in Fig. 1, which exists at the center of the interval. The integrations are carried out with $\Delta t = 0.05$, $-50 \leq x < 50$ and $\Delta x = 0.125$.

ここで, p, q, r は t のスカラー関数であり, $\zeta^\dagger = q^2\zeta_1 + r^2\zeta_2 + qr\zeta_3 + \eta_1\zeta_4 + \eta_2\zeta_5$. $\zeta_j \in E^\perp$ は次の関係式を満たす:

$$\begin{aligned}
L\zeta_1 + \frac{1}{2}F''(S)\psi^2 + \psi_x &= \alpha_1\xi, \\
L\zeta_2 + \frac{1}{2}F''(S)\xi^2 &= \alpha_2\xi, \\
L\zeta_3 + F''(S)\psi\cdot\xi + \xi_x &= \alpha_3\psi + \alpha_3'\phi, \\
L\zeta_4 + \boldsymbol{g}_1(S) &= \alpha_4\xi, \\
L\zeta_5 + \boldsymbol{g}_2(S) &= \alpha_5\xi.
\end{aligned}$$

ただし,α_j and α_j' は次の関係式を満たす:

$$\begin{aligned}
&\langle \frac{1}{2}F''(S)\psi^2 + \psi_x - \alpha_1\xi,\ \xi^*\rangle = 0,\ \langle \frac{1}{2}F''(S)\xi^2 - \alpha_2\xi,\ \xi^*\rangle = 0, \\
&\langle F''(S)\psi\cdot\xi + \xi_x - \alpha_3\psi,\ \phi^*\rangle = 0,\ \langle F''(S)\psi\cdot\xi + \xi_x - \alpha_3'\phi,\ \psi^*\rangle = 0, \\
&\langle \boldsymbol{g}_1(S) - \alpha_4\xi,\ \xi^*\rangle = 0,\ \langle \boldsymbol{g}_2(S) - \alpha_5\xi,\ \xi^*\rangle = 0.
\end{aligned}$$

(4) を (3) に代入し, 整理すると,

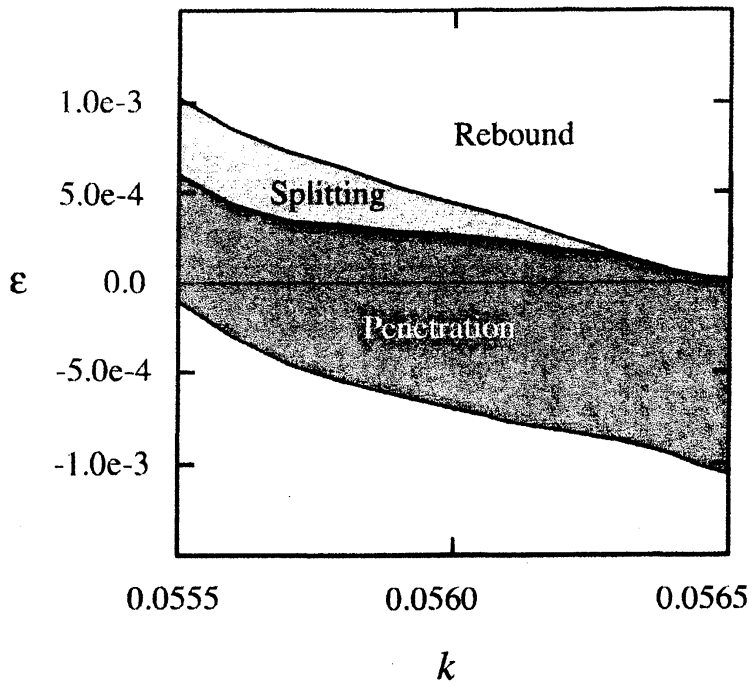


Figure 8: Response of the pulse in heterogeneous media for the Gray-Scott model with $k(x)$ given by (1) with respect to k and ϵ.

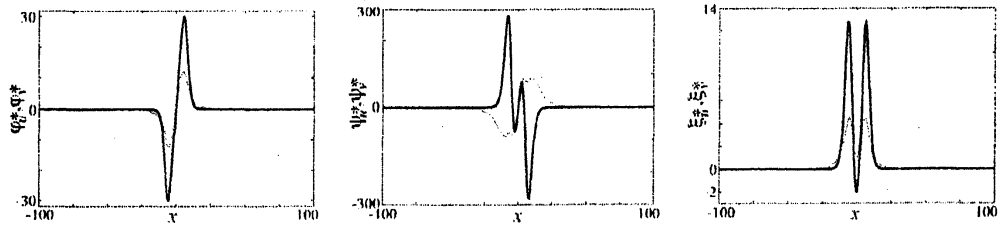


Figure 9: The profiles of the associated adjoint eigenfunctions at the codim 2 point for the Gray-Scott model. The black and gray line are for v-component and u-component respectively.

$$
\begin{cases}
\dot{p} = \dfrac{1}{C_2}\rho - \dfrac{K+e_1+\alpha_3'}{|C_1|}\rho\omega + \dfrac{|C_1|}{C_2^2}\epsilon\Gamma_0(p) \\
\quad + O\left(|\rho|^3 + |\omega|^3 + |\boldsymbol{\eta}|_2^{3/2} + |\epsilon|(|\rho| + |\omega| + |\boldsymbol{\eta}|_2 + |\epsilon|)\right), \\
\dot{\rho} = \rho(s\mu_1 + \theta_1\omega) + \epsilon\Gamma_1(p) \\
\quad + O\left(|\rho\omega^2| + (|\rho| + |\omega| + |\boldsymbol{\eta}|_2)(|\rho|^3 + |\omega|^3 + |\boldsymbol{\eta}|_2^{3/2}) + |\epsilon|(|\rho| + |\omega| + |\boldsymbol{\eta}|_2 + |\epsilon|)\right), \\
\dot{\omega} = \mu_2 + \omega^2 - \theta_2\rho^2 + \epsilon\Gamma_2(p) \\
\quad + O\left((|\rho| + |\omega| + |\boldsymbol{\eta}|_2)(|\rho|^3 + |\omega|^3 + |\boldsymbol{\eta}|_2^{3/2}) + |\epsilon|(|\rho| + |\omega| + |\boldsymbol{\eta}|_2 + |\epsilon|)\right),
\end{cases}
\tag{5}
$$

ここで, $s=\mathrm{sign}[C_1]=\pm 1$, C_1, C_2, C_3 は定数,

$$\Gamma_0(p)=\int_{-\infty}^{\infty}\chi(x)\boldsymbol{g}_1(S(x-p))\cdot\bar{\psi}^*(x-p)dx,$$

$$\Gamma_1(p)=\int_{-\infty}^{\infty}\chi(x)\boldsymbol{g}_1(S(x-p))\cdot\bar{\phi}^*(x-p)dx, \tag{6}$$

$$\Gamma_2(p)=\int_{-\infty}^{\infty}\chi(x)\boldsymbol{g}_1(S(x-p))\cdot\bar{\xi}^*(x-p)dx, \tag{7}$$

と書き下せる. 途中, q は ρ に, r は ω に, 変数変換を行った.

Fig. 9 において, $\theta_1\approx 0.93$, $\theta_2\approx 0.11$ となっているため次の仮定をおく.

(S5) $C_1\neq 0$ かつ, $C_2, \theta_1, \theta_2>0$ とする.

十分小さな μ_1 and take $\mu_2=O(|\mu_1|^{2-\nu})$ and $\epsilon=O(|\mu_1|^{2-\nu})$ を考えることにより, (5) の第一式は, $O(\rho)$ が主要部となるため, ρ の高次の項を無視する. 第二式と第三式に関しては, $\rho=O(|\mu_1|^{1-\nu})$ と $\omega=O(|\mu_1|^{1-\nu})$ を考えることにより, $|\mu_1|^2$ よりも高次の項を無視する. すると, (5) の主要部分は,

$$\begin{cases}\dot{p}=\rho/C_2,\\ \dot{\rho}=\rho(s\mu_1+\theta_1\omega)+\epsilon\Gamma_1(p),\\ \dot{\omega}=\mu_2+\omega^2-\theta_2\rho^2+\epsilon\Gamma_2(p),\end{cases} \tag{8}$$

となる.

p はパルスの位置に, ρ はパススのスピードに, ω は分裂の大きさにそれぞれ対応している. (6) と (7) が空間非一様性の影響が記述されている. さらに, (8) は一般系で記述されているためどのような形の空間非一様性に対しても解析可能である.

5 縮約方程式の解析

5.1 Homogeneous case

はじめに, パラメータが空間一様な場合を考える. $\epsilon=0$ であるので (8) は次のようになる.

$$\begin{cases}\dot{\rho}=\rho(s\mu_1+\theta_1\omega),\\ \dot{\omega}=\mu_2+\omega^2-\theta_2\rho^2.\end{cases} \tag{9}$$

$\rho=0$ は定常パルス解に対応し, $\rho\neq 0$ がトラベリングパルス解に対応する. (8) から, 不安定な定常パルス解は

$$E_1^+:(\rho,\ \omega)=(0,\ +\sqrt{-\mu_2}),$$

であり, 安定な定常パルス解は

$$E_1^-:(\rho,\ \omega)=(0,\ -\sqrt{-\mu_2}).$$

となることがわかる. これらはサドルノード分岐点 $\mu_2=0$ で交わる. トラベリングパルスに対応する解は

$$E_2^{\pm}:(\rho,\ \omega)=\left(\pm\sqrt{(\mu_2+\mu_1^2/\theta_1^2)/\theta_2},\ -s\mu_1/\theta_1\right) \tag{10}$$

となる. $\mu_2=-\mu_1^2/\theta_1^2$ にて, E_1^- はドリフト分岐を起こすことが分かる.

分岐図を模式的に書いてみると Fig. 10(a) のようになる. Fig. 10(b) は分岐図内の領域 I, II, III にそれぞれ対応するベクトル場の様子を表している.

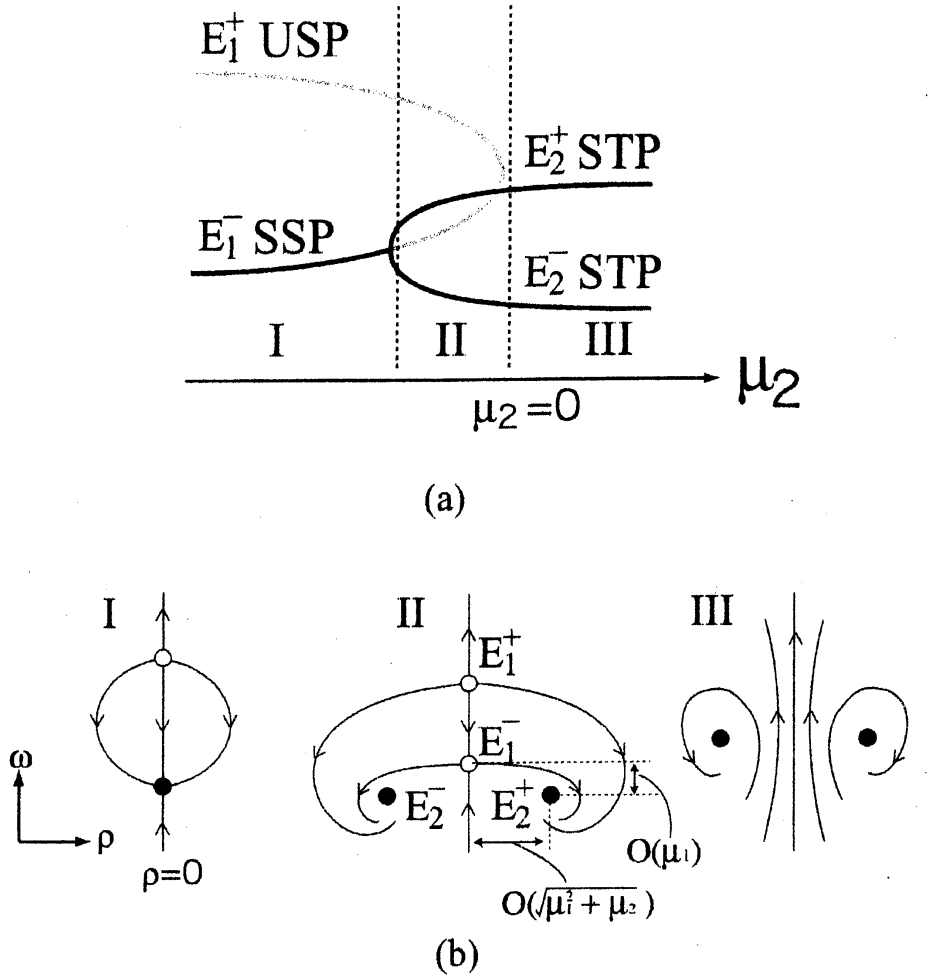


Figure 10: Schematic bifurcation diagram (Fig. a) and Phase portrait (Fig. b) for (9) with fixed $s\mu_1 > 0$. Here SSP and USP are stable and unstable standing pulse respectively. STP is stable traveling pulse. Gray line corresponds to existence region of STP, and dark gray line is for SSP. Black and white circles indicate stable and unstable solution respectively. In Region II, unstable manifolds emanating from $E_1^{\pm}$ connect to $E_2^{\pm}$.

5.2 Heterogeneous case

次に，空間非一様な場合を考える．この場合，$\Gamma_1(p)$ と $\Gamma_2(p)$ の影響を考慮する必要がある．数値実験から Γ_1 と Γ_2 の形は Fig. 11 となっていることが分かる．さらに $S(x)$ が偶関数，ϕ^* が奇関数，ξ^* が偶関数であることをふまえて，次の仮定を導入する．

(S6) $\Gamma_1(p)$ は非正値関数であり，$p \to \pm\infty$ にて 0 に収束し，する．かつ $p=0$ にて最小値をとる．$\Gamma_2(p)$ は非正値関数であり，$p \to -\infty$ にて 0 に収束し，$p \to +\infty$ にて負の値を持つ $\bar{\Gamma}_2$ に収束する．

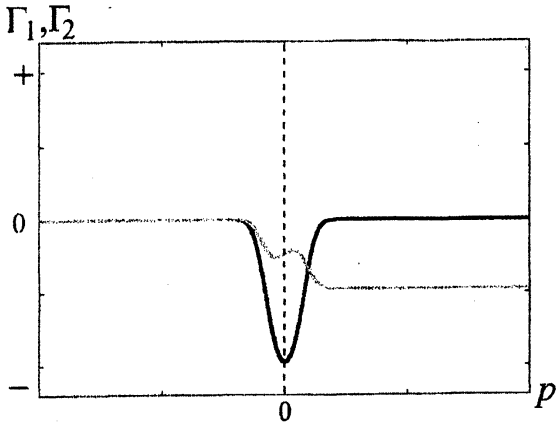


Figure 11: The profiles of the heterogeneous perturbations for jump type. Here black line is for Γ_1, and gray line is for Γ_2. This figure is obtained by numerical computation of the Gray-Scott model.

$\lim_{p\to+\infty}\Gamma_1(p)=0$ と $\lim_{p\to+\infty}\Gamma_2(p)=\bar{\Gamma}_2<0$ であることから平衡点は，

$$\tilde{E}_1^{\pm}:(\rho,\omega)=\left(0,\ \pm\sqrt{-\mu_2-\epsilon\bar{\Gamma}_2}\right),$$

$$\tilde{E}_2^{\pm}:(\rho,\omega)=\left(\pm\sqrt{(\mu_2+\epsilon\bar{\Gamma}_2+\mu_1^2/\theta_1^2)/\theta_2},\ -\mu_1/\theta_1\right).$$

となる．$p\to-\infty$ におけるトラベリングパルス解は $E_2^{\pm}$ に対応する．空間非一様性のため有限の p においてはこのような平衡点は存在しない．

以降，初期条件として $p(0)$ を十分大きな負値，$\rho(0)>0$, $\omega(0)<0$ とする．ここで，Penetration, splitting, rebound 定義する．

Definition 5.1 $t\to+\infty$ に対して (ρ,ω) が $\tilde{E}_2^{+}$ に収束するとき，*penetration* という．

Definition 5.2 ρ と ω が十分大きく $\omega\approx\rho>1$ となったとき，*splitting* という．

Definition 5.3 $t\to+\infty$ に対して，(ρ,ω) が E_2^{-} に収束するとき，*rebound* という．

Fig. 12 は (8) の相図である．Penetration, splitting, rebound 領域が存在し，splitting 領域が penetration 領域と rebound 領域の間に存在することが分かる．このことから (8) はもとの PDE (1) をうまく縮約していることがわかる．Fig. 13 は模式的に描いたフェーズの様子である．

これまでの数値実験では空間非一様性の大きさ ϵ を制御することによりパルスの反応をみてきた．(8) の解析から空間非一様性は $\epsilon\Gamma_1$ と $\epsilon\Gamma_2$ の項によって表されることがわかる．ϵ を変化させる代わりにジャンプ (空間非一様性) の傾きは関数 $\chi(x)$ の γ を変化させることでもこれまでと同様の反応をみることができる．Fig. 14 は (1) において ϵ を rebound が生じる値に固定しておいて γ を変化させた場合の反応である．γ を小さくすることで rebound から penetration へダイナミックスが変化することが分かる．

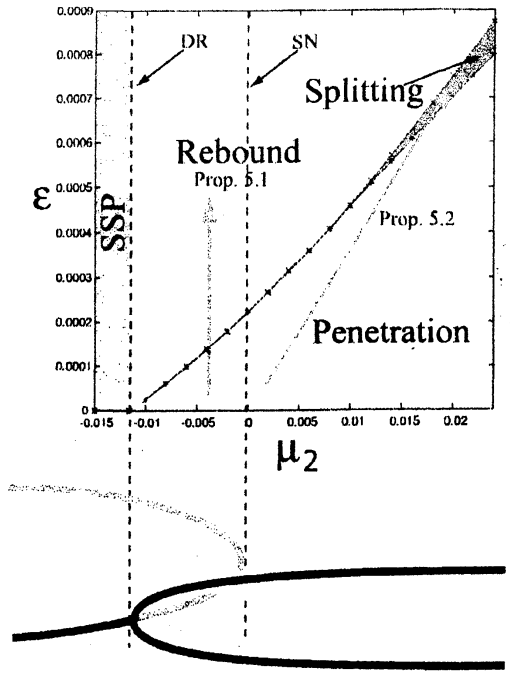


Figure 12: Phase diagram for (8) with parameter values corresponding to the Gray-Scott model. Here $\mu_1 = -0.1$, $s = -1$, $\theta_1 = 0.93$, $\theta_2 = 0.11$, $C_2 = 0.85$. SSP stands for stable standing pulse, DR means drift bifurcation, and SN presents saddle-node bifurcation.

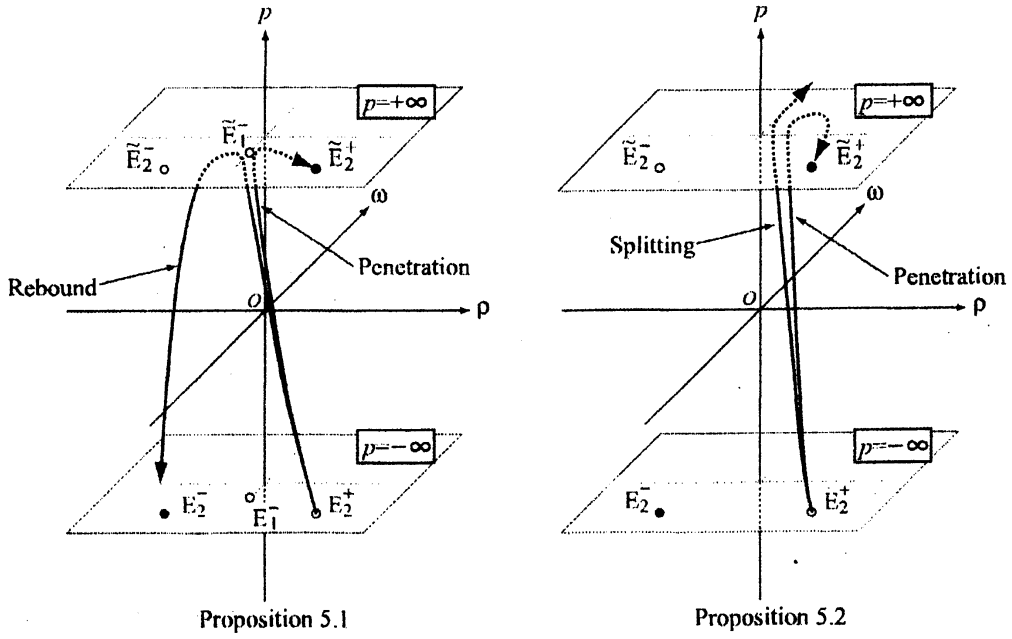


Figure 13: Schematic phase portrait for (8). Black and white circles indicate stable and unstable stationary solutions respectively.

6 まとめ

本研究では空間非一様媒質上のパルスの振舞いを調べた. 空間非一様性はジャンプ型を用いて数値実験を行なった. 数値実験とパルスダイナミックスによる解析から, パルスの反応は penetration, splitting, rebound の 3 つのクラスが存在することが分かった. パルスダイナミックスによる解析ではドリフト分岐とサドルノード分岐が同時に起きる codim 2 の近傍で展開し行なった. この解析では空間非一様性はどのような形で与えられてもかまわないため, 一般の空間非一様性媒質上で議論することができる.

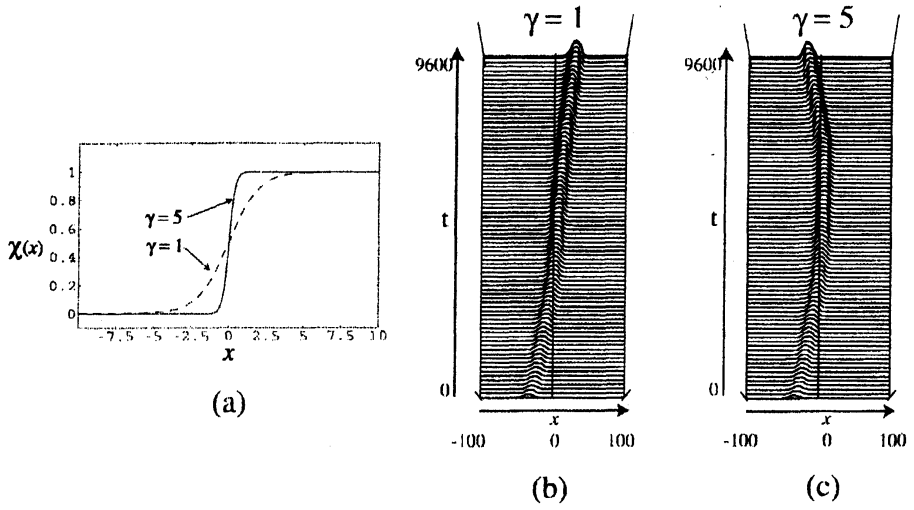


Figure 14: When the slope of heterogeneity becomes less steep, the pulse can penetrate. The profile of $\chi(x)$ is illustrated by (a). For $f = 0.026, k = 0.05652, \epsilon = 3.2 \times 10^{-5}$, the pulse penetrate when $\gamma = 1$ (see (b)), however it turns back when $\gamma = 5$ (see (c)).

References

[1] Yu. A. Astrov, H.-G. Purwins, *Plasma spots in a gas discharge system: Birth, scattering and formation of molecules*, Phys. Lett. A 283 (5-6), 3496–354.

[2] M. Argentina, P. Coullet and L. Mahadevan, *Colliding Waves in a Model Excitable Medium: Preservation, Annihilation, and Bifurcation*, Phys. Rev. Lett. 79 (1997), 2803–2806.

[3] M. Bär, M. Eiswirth, H. -H. Rotermund, and G. Ertl, *Solitary-wave phenomena in an excitable surface reaction*, Phys. Rev. Lett. 69 (1992), 945–948.

[4] M. Bode, A. W. Liehr, C. P. Schenk and H. -G. Purwins, *Interaction of dissipative solitons: particle-like behaviour of localized structures in a three-component reaction-diffusion system*, Physica D 161 (2002), 45–66.

[5] R. Kobayashi, T. Ohta, and Y. Hayase *Self-organized pulse generator in a reaction-diffusion system*, Phys. Rev. E 50 (1994), R3291-R3294.

[6] Y. Nishiura, T. Teramoto and K. -I. Ueda, *Scattering and separators in dissipative systems*, Phys. Rev. E 67 (2003), 056210-1–056210-7.

[7] Y. Nishiura, T. Teramoto and K. -I. Ueda, *Dynamic transitions through scattors in dissipative systems*, Chaos 13 (3) (2003), 962–972.

[8] Y. NISHIURA AND D. UEYAMA, *A skeleton structure of self-replicating dynamics*, Physica D 130 (1999), 73–104.

[9] S. -I. EI, *The motion of weakly interacting pulses in reaction diffusion systems*, J. Dyn. Diff. Eqs., 14 (1) (2002), 85–137.

[10] P. GRAY AND S. K. SCOTT, *Autocatalytic reactions in the isothermal, continuous stirred tank reactor - oscillations and instabilities in the system A + 2B → 3B; B → C*, Chem, Eng. Sci. 39 (1984), 1087–1097.

[11] M. GUTMAN, I. AVIRAM, AND A. RABINOVITCH, *Pseudoreflection from interface between two oscillatory media: Extended driver*, Phys. Rev. E 69 (2004), 016211-1–016211-8.

[12] M. GUTMAN, I. AVIRAM, AND A. RABINOVITCH, *Abnormal frequency locking and the function of the cardiac pacemaker*, Phys. Rev. E 70 (2004), 037202-1–037202-4.

[13] Y. HAYASE AND T OHTA, *Self-replicating pulses and Sierpinski gaskets in excitable media*, Phys. Rev. E 62 (2000), 5998–6003.

[14] A. VON OERTZEN, A. S. MIKHAILOV, H. H. ROTERMUND AND G. ERTL, *Subsurface Oxygen in the CO Oxidation Reaction on Pt(110): Experiments and Modeling of Pattern Formation*, J. Phys. Chem. B. 102 (25) (1998) , 4966–4981.

[15] T. OHTA, *Pulse dynamics in a reaction-diffusion system*, Physica D 151 (2001), 61–72.

[16] J.P. Pauwelussen, *Nerve impulse propagation in a branching nerve system: a simple model*, Physica D 4 (1981), 67–88.

[17] J.P. Pauwelussen, *One way traffic of pulses in a neuron*, J. Math. Biology 15 (1982), 151–171.

[18] J. E. PEARSON, *Complex patterns in a simple system*, Science 261 (1993), 189–192.

[19] V. PETROV, S. K. SCOTT, AND K. SHOWALTER, *Excitability, wave reflection, and wave splitting in a cubic autocatalysis reaction-diffusion system*, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., Series A 347 (1994), 631–642.

[20] T. TERAMOTO, K. -I. UEDA AND Y. NISHIURA, *Phase-dependent output of scattering process for traveling breathers*, Phys.Rev.E 69 (2004), 056224-1–056224-8.