



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	クーン・タッカーアプローチに基づく厚生経済学の基本定理について：古典的有限次元財空間経済モデルのケース
Author(s)	久保田，肇
Citation	経済學研究, 59(3), 117-135
Issue Date	2009-12-10
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40123
Type	departmental bulletin paper
File Information	ES59-3_012.pdf



クーン・タッカーアプローチに基づく 厚生経済学の基本定理について

——古典的有限次元財空間経済モデルのケース——

久保田 肇

1. はじめに

ビューレーはその著書（2007）において、有限次元財空間経済モデルにおける厚生経済学の基本定理、競争均衡の存在、不確実性下の競争均衡、更には、離散無限期間経済モデルにおけるサムエルソン型 OLG モデル、ダイヤモンド型 OLG モデル、そしてラムゼー型最適成長モデルを、一般均衡論の視点から体系的に解説している¹⁾。本稿では、その中から l 次元ユークリッド空間における凹計画法の基本定理であるクーン・タッカー定理に基づいて厚生経済学の基本定理を議論した部分を取り上げて、解説する²⁾。消費者の選好が効用関数で表現されていると、競争均衡では消費者による予算制約下の効用最大化や企業による利潤最大化といった制約条件付最適問題が、また、厚生経済学の基本定理ではパレート最適性という資源制約の下での社会厚生関数の最大化という制約条件付最適問題が、それぞれ存在している。どちらの問題も、凹計画法の基本定理であるクーン・タッカー定理から、統一的に議論する事が出来る。最大値関数の劣微分の性質より、それぞれの問題におけるラグランジュ乗数と呼ばれる変数に対して、その経済学的な解釈が得られる。所得移転を伴った競争均衡がパレート最適な配分になるという厚生経済学の第一基本定理やパレート最適な配分が所得移転を伴った競争均衡になるという厚生経済学の第二基本定理のどちらにおいても、財の市場価格がその財の限界社会厚生になっていて、更に、パレート最適な配分において線形の社会厚生関数が最大化されて、その係数がこの均衡における各消費者の所得/貨幣の限界効用の逆数になっている³⁾。

さて、本稿の構成は以下の通りである。まず次節では制約条件付最大化問題における凹計画法の基本定理であるクーン・タッカー定理を確立し、そこで得られるラグランジュ乗数が制約条件付最大化問題の最大値関数の劣微分である事を示す。第3節では、第2節で得られたクーン・タッカー定理を用いて、厚生経済学の基本定理を再定式化する。最大化された線形の社会厚生関数の係数が

-
- 1) ビューレー（2007）では、厚生経済学の基本定理は第2, 3, 5, 6章、競争均衡の存在は第4, 5章、不確実性下の競争均衡は第7, 8章、サムエルソン型 OLG モデルは第9章、ダイヤモンド型 OLG モデルやラムゼー型最適成長モデルは第10章で、それぞれ分析されている。
 - 2) ビューレー（2007, 第6章）参照。
 - 3) これらの付加的な情報は、ドブリュー（1959, 第6章）や福岡（1979, 第8章）等で示されている通常の厚生経済学の基本定理では、与えられていない。なお、ビューレー（2007, 第8, 9章）では、サムエルソン型 OLG モデル、ダイヤモンド型 OLG モデル、そして、ラムゼー型最適成長モデルといった無限期間経済モデルにおける厚生経済学の基本定理を、 l 次元ユークリッド空間のクーン・タッカー定理を通時的に繰り返し用いて確立していて、無限期間の最適問題におけるクーン・タッカー定理に対応する結果を確立してそれを適用する、という方向では行っていない。

消費者の所得/貨幣の限界効用の逆数である事や市場価格がその財の限界社会厚生である事を示す。最後に第4節において、今後の課題について述べる。

2. 凹計画法のクーン・タッカー定理： l 次元ユークリッド空間のケース

本節では、 l 次元ユークリッド空間における凹計画法の基本定理であるクーン・タッカー定理を示し、その問題におけるラグランジュ乗数と呼ばれる変数に対して経済学的な解釈を与える。そして、消費者の選好関係を効用関数で表現できるとして、消費者による予算制約下の効用最大化や企業による利潤最大化といった形で定式化される制約条件付最適問題、更には、パレート最適性という資源制約の下での社会厚生関数の最大化という形で定式化される制約条件付最適問題にこの結果を適用して、それぞれの問題におけるラグランジュ乗数に対して経済学的な解釈を与える。

l 次元ユークリッド空間における一般的な制約条件付最適化（最大化）問題では、 $X(\subset R^l)$ を変数 $\mathbf{x}$ が属する集合として、 K 個の制約条件式 $g_k(\mathbf{x}) \leq a_k (\geq 0)$ の下で目的関数 $f(\mathbf{x})$ を最大化する事が想定されていて、以下のように定式化される：

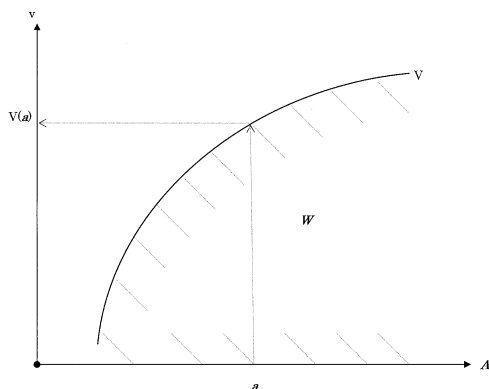
$$\max_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) \text{ s.t. } g_k(\mathbf{x}) \leq a_k, k = 1, \dots, K \quad (CMP)$$

もちろん、 $g(\mathbf{x})$ や $\mathbf{a}(\geq 0)$ を $g_k(\mathbf{x})$ や a_k を成分とする K 次元ベクトルとすれば、 K 個の制約条件式 $g_k(\mathbf{x}) \leq a_k$ は $g(\mathbf{x}) \leq \mathbf{a}$ という1つの表現式となる。この時の解を $\mathbf{x}(\mathbf{a})$ とすれば、言うまでもなく $\mathbf{x}(\mathbf{a})$ は X の部分集合である。

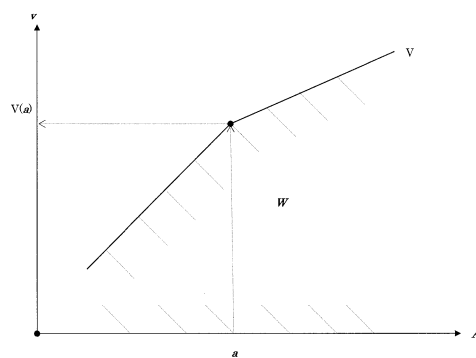
今、 $A(\subset R^K) = \{\mathbf{a} \in R_+^K : \exists \mathbf{x} \in X, g(\mathbf{x}) \leq \mathbf{a}\}$ とする。不等号の性質より、 A は上方包含的($\mathbf{a} \in A, \mathbf{a} \leq \mathbf{a}' \Rightarrow \mathbf{a}' \in A$)である。ここでは $\mathbf{x}(\mathbf{a}) \neq \emptyset \forall \mathbf{a} \in A$ として、最大値関数 $V: A \rightarrow R$ を $V(\mathbf{a}) = \max\{f(\mathbf{x}) : g(\mathbf{x}) \leq \mathbf{a}\}$ として定義する⁴⁾。この時、 f が凹関数で g_k が凸関数であれば V も凹関数となる⁵⁾。まず A が凸となる事を示す。 $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in A, \alpha \in (0, 1)$ に対して $g(\mathbf{x}) \leq \mathbf{a}, g(\mathbf{x}') \leq \mathbf{a}' \exists \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in X$ となっているが、 X の凸性より $\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{x}' \in X$ であり、 g の凸性より $g(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{x}') \leq \alpha g(\mathbf{x}) + (1-\alpha)g(\mathbf{x}') \leq \alpha\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{a}'$ となるので、 $\alpha\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{a}' \in A$ となる。 $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in A, \alpha \in (0, 1)$ として $g(\mathbf{x}^a) \leq \mathbf{a}, g(\mathbf{x}^{a'}) \leq \mathbf{a}'$ に対して $V(\mathbf{a}) = f(\mathbf{x}^a), V(\mathbf{a}') = f(\mathbf{x}^{a'})$ とすると、 g の凸性と A の凸性より、 $g(\alpha\mathbf{x}^a + (1-\alpha)\mathbf{x}^{a'}) \leq \alpha g(\mathbf{x}^a) + (1-\alpha)g(\mathbf{x}^{a'}) \leq \alpha\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{a}'$ となるので、 V の定義と f の凹性より、 $V(\alpha\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{a}') \geq f(\alpha\mathbf{x}^a + (1-\alpha)\mathbf{x}^{a'}) \geq \alpha f(\mathbf{x}^a) + (1-\alpha)f(\mathbf{x}^{a'}) = \alpha V(\mathbf{x}^a) + (1-\alpha)V(\mathbf{x}^{a'})$ となって V も凹関数となる。したがって、

4) より一般的には、最大値関数 $V: A \rightarrow R$ を $V(\mathbf{a}) = \sup\{f(\mathbf{x}) : g(\mathbf{x}) \leq \mathbf{a}\}$ として定義する。ここでは $\mathbf{x}(\mathbf{a}) = \emptyset$ としているので、 $\sup$ は $\max$ に置き換えられている。

5) X を凸集合として、 $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in X, \alpha \in (0, 1) \Rightarrow \alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{x}' \in X$ となる時に、 $f: X \rightarrow R$ が凹関数とは、 $f(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{x}') \geq \alpha f(\mathbf{x}) + (1-\alpha)f(\mathbf{x}')$ となる事である。 $f: X \rightarrow R$ が凸関数とは $-f: X \rightarrow R$ が凹関数となる事である。そして、 $f: X \rightarrow R$ が凹関数 $\Leftrightarrow \text{Sub}(f) = \{(\mathbf{x}, \beta) \in X \times R : \beta \leq f(\mathbf{x})\}$ が凸集合となる。実際、 $f: X \rightarrow R$ が凹とすると、 $(\mathbf{x}, \beta), (\mathbf{x}', \beta') \in \text{Sub}(f), \alpha \in (0, 1)$ に対して $\alpha(\mathbf{x}, \beta) + (1-\alpha)(\mathbf{x}', \beta') = (\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{x}', \alpha\beta + (1-\alpha)\beta')$ となるので、 f の凹性から $f(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{x}') \geq \alpha f(\mathbf{x}) + (1-\alpha)f(\mathbf{x}') \geq \alpha\beta + (1-\alpha)\beta'$ となって、 $(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{x}', \alpha\beta + (1-\alpha)\beta') \in \text{Sub}(f)$ となる。一方、 $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})), (\mathbf{x}', f(\mathbf{x}')) \in \text{Sub}(f)$ とすると $\text{Sub}(f)$ が凸集合であれば、 $\alpha \in (0, 1)$ に対して $\alpha(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) + (1-\alpha)(\mathbf{x}', f(\mathbf{x}')) = (\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{x}', \alpha f(\mathbf{x}) + (1-\alpha)f(\mathbf{x}')) \in \text{Sub}(f)$ となるので、 $\text{Sub}(f)$ の定義より $f(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{x}') \geq \alpha f(\mathbf{x}) + (1-\alpha)f(\mathbf{x}')$ となって f は凹関数である。



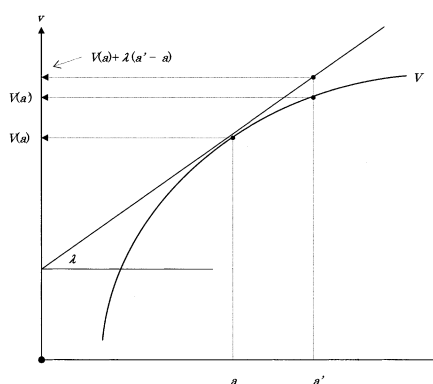
第1-1図：WとVの関係



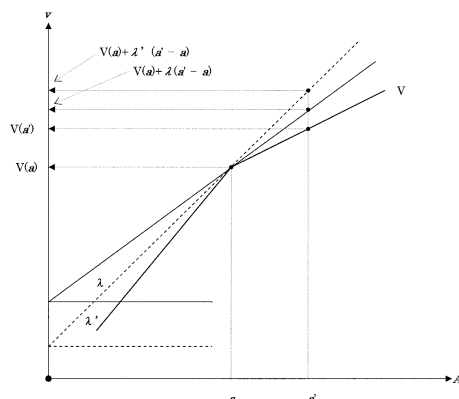
第1-2図：WとVの関係

$W = \text{Sub}(V) = \{(a, v) \in A \times R : v \leq V(a)\}$ は凸集合になる⁶⁾。

$V: A \rightarrow R$ とする時に、 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_K) \in R^K$ が a における V の劣微分である事を、 $V(a') \leq V(a) + \lambda \cdot (a' - a) \forall a' \in A$ となる事として定義する。この時、 $V(a') - \lambda \cdot a' \leq V(a) - \lambda \cdot a \forall a' \in A$ または $(1, -\lambda) \cdot (V(a'), a') \leq (1, -\lambda) \cdot (V(a), a) \forall a' \in A$ と表す事も出来る。 λ は a を V の単位で評価できるように変換する作用を持つ。したがって、 a' を投入費用とみなすと $V(a') - \lambda \cdot a'$ はその費用も含めた純利得を表す事になり、 $a' = a$ においてこの純利得が最大になる。このような条件を満たす λ は、 a において一意的に定まる必要はない。 V の a における劣微分の集合を $V(a)$ と記す。凹関数 V が A 上で有限値を取れば、各 $a \in \text{int}(A)$ における V の劣微分が存在して、 $V(a) \neq \emptyset$ となる事が知られている⁷⁾。 $a' = a - e^k, a'' = a + e^k \in A$ とすると、 a における V の劣微分 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_K)$ の定義より $V(a') - V(a) \leq -\lambda_k, V(a'') - V(a) \leq \lambda_k$ となって $[V$



第2-1図：Vの劣微分—微分可能なVのケース



第2-2図：Vの劣微分—微分不可能なVのケース

6) 前脚注参照。

7) Rockafellar (1970, 定理 23.4, p.217) 参照。ここでは $x(a) \neq \emptyset \forall a \in A$ としているので、 V は A 上で有限値である。

8) もちろん、 $e^k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ で k -成分が1でそれ以外が0のベクトルである。

$(\mathbf{a}'') - V(\mathbf{a})] \leq \lambda_k \leq [V(\mathbf{a}) - V(\mathbf{a}')]]$ となる⁹⁾。これより、 V の劣微分 λ の第 k 成分 λ_k は第 k 制約条件の外生変数 a_k が 1 単位増減した時の目的関数の値の変化を表す事になる。

凹関数 V が $\mathbf{a} \in \text{int}(A)$ において偏微分可能として、 $\varepsilon > 0$ に対して $\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \varepsilon \mathbf{e}^k = (a_1, a_2, \dots, a_k - \varepsilon, \dots, a_K)$, $\mathbf{a}'' = \mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{e}^k = (a_1, a_2, \dots, a_k + \varepsilon, \dots, a_K)$, とすると、 $\mathbf{a}$ における V の劣微分 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_K)$ の定義より $V(\mathbf{a}') - V(\mathbf{a}) \leq -\lambda_k \varepsilon$, $V(\mathbf{a}'') - V(\mathbf{a}) \leq \lambda_k \varepsilon$ となって $[V(\mathbf{a}'') - V(\mathbf{a})]/\varepsilon \leq \lambda_k \leq [V(\mathbf{a}') - V(\mathbf{a})]/(-\varepsilon)$ となるが、 V の $\mathbf{a}$ における偏微分可能性から $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると $[V(\mathbf{a}'') - V(\mathbf{a})]/\varepsilon \rightarrow D_k V(\mathbf{a})$, $[V(\mathbf{a}') - V(\mathbf{a})]/(-\varepsilon) \rightarrow D_k V(\mathbf{a})$ となって $\lambda_k = D_k V(\mathbf{a})$ となる。これより $\lambda = DV(\mathbf{a})$ となり、 V が $\mathbf{a}$ で偏微分可能ならば $\mathbf{a}$ における V の劣微分はその偏微分係数になる。 $\mathbf{a}$ における V の劣微分は、 V が $\mathbf{a}$ で偏微分可能でない時にその偏微分係数の代わりの役割を果たす。

ここで次の制約条件無最適化（最大化）問題を考える：

$$\max_{\mathbf{x} \in X} \left[f(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^K \lambda_k g_k(\mathbf{x}) \right] \exists \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_K) \geq 0 \quad (LMP)$$

この時、 $f(\mathbf{x}) - \lambda \cdot g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^K \lambda_k g_k(\mathbf{x})$ をラグランジュ関数と呼び、係数 λ_k をラグランジュ乗数またはクーン・タッカー係数と呼ぶ⁹⁾。(CMP) と (LMP) との関係に関する最初の結果は次である。

命題 1 $g(\bar{\mathbf{x}}) \leq \mathbf{a}$ を満たす $\bar{\mathbf{x}} \in X$ が (LMP) の解で、ある $\bar{\lambda} \geq 0$ に対するラグランジュ関数 $f(\mathbf{x}) - \bar{\lambda} \cdot g(\mathbf{x})$ を X 上で最大化していて、更に $g_k(\bar{\mathbf{x}}) < a_k \Rightarrow \bar{\lambda}_k = 0$ となっていれば、 $\bar{\mathbf{x}}$ は (CMP) の解である。

証明. $g(\mathbf{x}) \leq \mathbf{a}$ を満たす $\mathbf{x} \in X$ は $\bar{\lambda} \geq 0$ より $\bar{\lambda} \cdot g(\mathbf{x}) \leq \bar{\lambda} \cdot \mathbf{a}$ であるが、 $\bar{\mathbf{x}}$ に対しては $g_k(\bar{\mathbf{x}}) < a_k \Rightarrow \bar{\lambda}_k = 0$ より $\bar{\lambda} \cdot g(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\lambda} \cdot \mathbf{a}$ となる。仮定より $\bar{\mathbf{x}}$ が X 上で $f(\mathbf{x}) - \bar{\lambda} \cdot g(\mathbf{x})$ を最大にしている事を考慮すると、 $f(\mathbf{x}) - \bar{\lambda} \cdot \mathbf{a} \leq f(\mathbf{x}) - \bar{\lambda} \cdot g(\mathbf{x}) \leq f(\bar{\mathbf{x}}) - \bar{\lambda} \cdot g(\bar{\mathbf{x}}) = f(\bar{\mathbf{x}}) - \bar{\lambda} \cdot \mathbf{a}$ となって、 $g(\mathbf{x}) \leq \mathbf{a}$ を満たす $\mathbf{x} (\in X)$ に対して $f(\mathbf{x}) \leq f(\bar{\mathbf{x}})$ となり、 $\bar{\mathbf{x}}$ は (CMP) の解である。□

ここでは、 X の凸性や f や $-g_k$ の凹性は何ら利用していない事に注意する。また、 $g_k(\bar{\mathbf{x}}) < a_k \Rightarrow \bar{\lambda}_k = 0$ という部分は相補条件と呼ばれていて、制約条件が拘束的でなければ対応するラグランジュ乗数（クーン・タッカー係数）がゼロになる事を述べている。

命題 1 は (LMP) $\Rightarrow$ (CMP) という方向に関する結果であるが、次に逆方向の (CMP) $\Rightarrow$ (LMP) という結果を導出する。まず、 $\bar{\mathbf{x}}$ が $\mathbf{a}$ に対応する (CMP) の解の時に、 $\bar{\mathbf{x}}$ が相補条件の成り立つようなある $\bar{\lambda} \geq 0$ に対して (LMP) の解となる事を、 $\bar{\lambda}$ が $\mathbf{a}$ における V の劣微分となる事によって特徴付ける。

9) 通常はラグランジュ関数を $f(\mathbf{x}) - \lambda \cdot (g(\mathbf{x}) - \mathbf{a}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^K \lambda_k (g_k(\mathbf{x}) - a_k)$ として制約条件内のパラメーター a_k も同時に含めるが、ビューレー (2007) では含めていない。本稿ではビューレー (2007) の定式化に従ったが、以下の定理 1 の系でパラメーター $\mathbf{a}$ も含めた形での定式化も述べておいた。ビューレー (2007) ではこの λ_k をクーン・タッカー係数と呼んでいる。

命題2 $\bar{x}$ が (CMP) の解とする。この時、 $\bar{x} \in X$ が (LMP) の解で、ある $\bar{\lambda} \geq 0$ によって与えられるラグランジュ関数 $f(\bar{x}) - \bar{\lambda} \cdot g(\bar{x})$ を X 上で最大化して $g_k(\bar{x}) < a_k \Rightarrow \bar{\lambda}_k = 0$ となる事と、 $\bar{\lambda}$ が a における V の劣微分となる事とは、同値である。

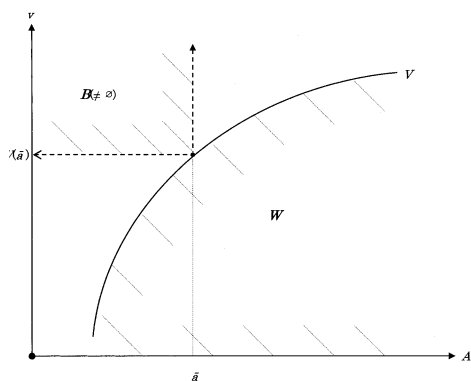
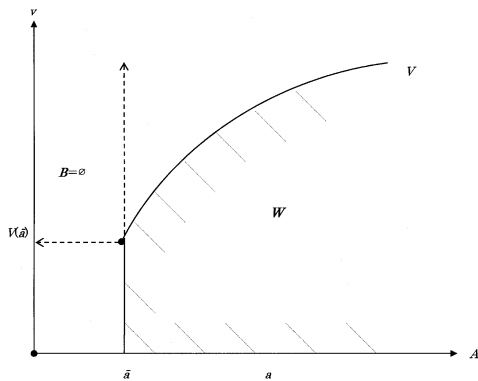
証明. $\Rightarrow$ $\bar{x}$ が (CMP) の解なので $V(a) = f(\bar{x})$ である。 $g(x) \leq a$ を満たす $x \in X$ は $\bar{\lambda} \geq 0$ より $\bar{\lambda} \cdot g(x) \leq \bar{\lambda} \cdot a$ であり、 $\bar{x}$ に対しては $g_k(\bar{x}) < a_k \Rightarrow \bar{\lambda}_k = 0$ より $\bar{\lambda} \cdot g(\bar{x}) = \bar{\lambda} \cdot a$ なので、 $\bar{\lambda} \cdot g(x) \leq \bar{\lambda} \cdot a = \bar{\lambda} \cdot g(\bar{x})$ となる。また、同様に、 $g(x') \leq a'$ を満たす $x' \in X$ に対しても $\bar{\lambda} \geq 0$ より $\bar{\lambda} \cdot g(x') \leq \bar{\lambda} \cdot a'$ である。仮定より $\bar{x}$ が X 上で $f(x) - \bar{\lambda} \cdot g(x)$ を最大にしている、 $a' \in A$ ならば $g(x') \leq a'$ となる $x' \in X$ が存在して、 $V(a) - \bar{\lambda} \cdot a = f(\bar{x}) - \bar{\lambda} \cdot a = f(\bar{x}) - \bar{\lambda} \cdot g(\bar{x}) \geq f(x') - \bar{\lambda} \cdot g(x') \geq f(x') - \bar{\lambda} \cdot a'$ となるが、これが $g(x') \leq a'$ となる任意の $x' \in X$ に対して成立する。そして、 $g(x') \leq a'$ となる $x' \in X$ に関する右辺の最大値が $V(a') - \bar{\lambda} \cdot a'$ なので、結局 $V(a) - \bar{\lambda} \cdot a \geq V(a') - \bar{\lambda} \cdot a', \forall a' \in A$ となって $\bar{\lambda} \geq 0$ が V の a における劣微分となる。

$\Leftarrow$ 最初に $\bar{\lambda} \geq 0$ を示す。 $V(a) = f(\bar{x})$ として $a \leq a'$ とすると $g(\bar{x}) \leq a \leq a'$ より $V(a) = f(\bar{x}) \leq V(a')$ となるので V は単調非減少的である。すると、 $V(a) - \bar{\lambda} \cdot a \geq V(a') - \bar{\lambda} \cdot a'$ において $a' = a + e^i$ とすれば、 V の単調増加性より $0 \leq V(a + e^i) - V(a) = V(a') - V(a) \leq \bar{\lambda} \cdot (a' - a) = \bar{\lambda} \cdot e^i = \bar{\lambda}_i$ が各 i について成り立つので $\bar{\lambda} \geq 0$ となる。 $\bar{x}$ が (CMP) の解なので $g(\bar{x}) \leq a$ を満たすが、更に、 $g_k(\bar{x}) < a_k \Rightarrow \bar{\lambda}_k = 0$ が成立する。実際、十分に小さい $\varepsilon > 0$ に対して $g_k(\bar{x}) < a_k - \varepsilon$ となるが、 $g_j(\bar{x}) \leq a_j, \forall j \neq k$ となるので、 $a' = a - \varepsilon e^k$ とすれば $g_k(\bar{x}) \leq a'_k, \forall k = 1, \dots, K$ となって $g(\bar{x}) \leq a'$ となり、 $a' \in A$ である。すると $V(a) = f(\bar{x}) \leq V(a')$ となるが、 V の単調性から $V(a') \leq V(a)$ なので $V(a') = V(a)$ となり、 $\bar{\lambda} (\geq 0)$ が a における V の劣微分である事から $0 = V(a') - V(a) \leq \bar{\lambda} \cdot (a' - a) = -\bar{\lambda} \cdot \varepsilon e^k = -\varepsilon \bar{\lambda}_k \leq 0$ となって $\bar{\lambda}_k = 0$ となる。これより相補条件が成立する。任意の $x' \in X$ に対して $a' = g(x')$ とすれば $a' \in A$ となって $f(x') \leq V(a')$ となる。相補条件より $\bar{\lambda} \cdot a = \bar{\lambda} \cdot g(\bar{x})$ なので、 $\bar{\lambda} (\geq 0)$ が a における V の劣微分である事、 $V(a) = f(\bar{x})$ 、そして $a' = g(x')$ より、 $f(\bar{x}) - \bar{\lambda} \cdot g(\bar{x}) = V(a) - \bar{\lambda} \cdot a \geq V(a') - \bar{\lambda} \cdot a' \geq f(x') - \bar{\lambda} \cdot g(x')$ となって、 $\bar{x}$ は X 上で $f(x) - \bar{\lambda} \cdot g(x)$ を最大化して (LMP) の解である。□

命題2より命題1の逆方向である、(CMP) の解 $\bar{x}$ が (LMP) の解となる事を示すためには、 $\bar{x}$ が a の時の (CMP) の解である時に a における V の(非負の)劣微分が存在する事を示せばよい。ただし、命題2では X の凸性や f や $-g_k$ の凹性を全く前提にしなかったが、 V の劣微分の存在を確立するためには、 X の凸性や f や $-g_k$ の凹性が必要となる。これは凸集合の分離定理を適用するからである。更に、この定理を適用して求めている帰結を得るためには、追加的な条件であるスレーター条件が必要である。 X の凸性、 f や $-g_k$ の凹性、更にはスレーター条件を前提として、 V の劣微分が存在する事を示す。

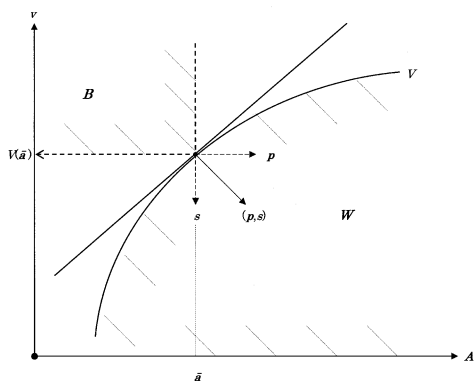
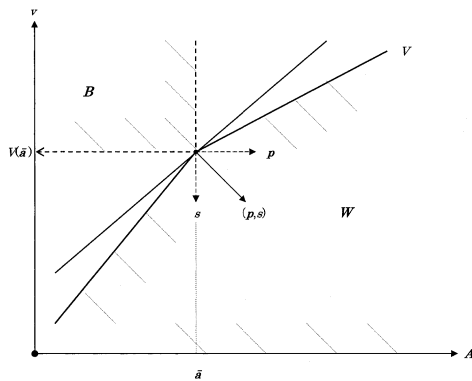
命題3 X を凸集合、 f と $-g_k$ を凹関数とする。 $\bar{x}$ が $a = \bar{a}$ の時の (CMP) の解として、更に、ある $\hat{x} \in X$ に対して $g(\hat{x}) < \bar{a}$ とする (スレーター条件)。すると、ある $\bar{\lambda} (\geq 0)$ が存在して $\bar{\lambda}$ が $\bar{a}$ における V の劣微分となる。

証明. まず、 f と $-g_k$ が凹関数なので $V: A \rightarrow R$ も凹関数になり、 $W = \text{Sub}(V) = \{(a, v) \in A \times R : v \leq V(a)\}$ が凸集合になる事に注意する。もちろん、 $(\bar{a}, V(\bar{a})) \in W$ より $W \neq \emptyset$ である。 $B = \{(b, t) \in A \times R : b < \bar{a}, t > V(\bar{a})\}$ とすると g_k の凸性に基づく A の凸性から B も凸集合で、

第3-1図：スレーター条件の成立と $B \neq \emptyset$ 第3-2図：スレーター条件の不成立と $B = \emptyset$

更に、 $b' = g(\tilde{x}) < \bar{a}$, $t' > V(\bar{a})$ とすれば $(b', t') \in B$ となって $B \neq \emptyset$ である。

また、 $(a', v') \in B$ とすると $a' < \bar{a}$, $v' > V(\bar{a})$ となるが、 V の単調性から $V(a') \leq V(\bar{a}) < v'$ となるので $(a', v') \notin W$ となり、 $W \cap B = \emptyset$ となる。そこで凸集合の分離定理を W と B に適用すれば、ある $(p, s) \in (R^K \times R) \setminus \{0\}$ が存在して $(p, s) \cdot (b, t) \leq (p, s) \cdot (a, v) \forall (b, t) \in B, (a, v) \in W$ となる。ここで $p \in R^K, s \in R$ である。

第4-1図： B と W の分離—微分可能な V のケース第4-2図： B と W の分離—微分不可能な V のケース

まず、 $p \geq 0$ を示す。 $a = \bar{a} + e^i$ とすると V の単調性から $V(\bar{a}) \leq V(a)$ となるので $(\bar{a} + e^i, V(\bar{a})) \in W$ となる。また、 $e = (1, \dots, 1)$ として $b = \bar{a} - \varepsilon e < \bar{a}$, $t = V(\bar{a}) + \varepsilon \forall \varepsilon > 0$, 十分に小さい、とすると $(b, t) \in B$ である。すると、 $(\bar{a} + e^i, V(\bar{a})) \in W$ と分離の条件より $(p, s) \cdot (\bar{a} - \varepsilon e, V(\bar{a}) + \varepsilon) \leq (p, s) \cdot (\bar{a} + e^i, V(\bar{a}))$ となるので、ここで $\varepsilon \downarrow 0$ とすれば $(p, s) \cdot (\bar{a}, V(\bar{a})) \leq (p, s) \cdot (\bar{a} + e^i, V(\bar{a})) = (p, s) \cdot (\bar{a}, V(\bar{a})) + p \cdot e^i = (p, s) \cdot (\bar{a}, V(\bar{a})) + p_i$ となって $p_i \geq 0$ となるが、この i は1から K までのどれでもいいので結局 $p \geq 0$ である。

次に、 $s < 0$ を示す。まず、 $s \leq 0$ を示す。 $(\bar{a} - \varepsilon e, V(\bar{a}) + 1) \in B \forall \varepsilon > 0$, 十分に小さい、なので、 $(\bar{a}, V(\bar{a})) \in W$ と分離の条件より $(p, s) \cdot (\bar{a} - \varepsilon e, V(\bar{a}) + 1) = (p, s) \cdot (\bar{a} - \varepsilon e, V(\bar{a})) + s \leq$

$(p, s) \cdot (\bar{a}, V(\bar{a}))$ となり, $\varepsilon \downarrow 0$ とすれば $(p, s) \cdot (\bar{a}, V(\bar{a})) + s \leq (p, s) \cdot (\bar{a}, V(\bar{a}))$ となって $s \leq 0$ となる。そこで今 $s = 0$ とする。 $(p, s) \neq 0$ より $p \neq 0$ なので $p \geq 0$ である。 $b' = g(\tilde{x}) < \bar{a}$ とすると $b' \in A$ であり, $\bar{a} - b' > 0$ である。 W の定義より $(b', V(b')) \in W$ であり, また, $(\bar{a} - \varepsilon e, V(\bar{a}) + 1) \in B \forall \varepsilon > 0$, 十分に小さい, なので, 分離の条件より $(p, s) \cdot (\bar{a} - \varepsilon e, V(\bar{a}) + 1) \leq (p, s) \cdot (b', V(b'))$ であるが, $s = 0$ なので $p \cdot (\bar{a} - \varepsilon e) \leq p \cdot b'$ となり, $\varepsilon \downarrow 0$ とすれば $p \cdot \bar{a} \leq p \cdot b'$ となって, $p \cdot (\bar{a} - b') \leq 0$ となる。しかし, $\bar{a} - b' > 0, p \geq 0$ なので $p \cdot (\bar{a} - b') > 0$ とならなくてはならず, 矛盾が起きる。故に, $s \neq 0$ で $s < 0$ となる。

そこで, 分離の条件式の両辺を $-s > 0$ で割り, $(p, s)/-s = (\bar{\lambda}, -1)$ とすれば, $\bar{\lambda} \geq 0$ で $(\bar{\lambda}, -1) \cdot (b, t) \leq (\bar{\lambda}, -1) \cdot (a, v) \forall (b, t) \in B, (a, v) \in W$ となる。すると, $(\bar{a} - \varepsilon e, V(\bar{a}) + \varepsilon) \in B, (a, V(a)) \in W \forall \varepsilon > 0$, 十分に小さい, $a \in A$ なので, $(\bar{\lambda}, -1) \cdot (\bar{a} - \varepsilon e, V(\bar{a}) + \varepsilon) \leq (\bar{\lambda}, -1) \cdot (a, V(a)) \forall \varepsilon > 0, a \in A$ となり, $\varepsilon \downarrow 0$ とすれば $(\bar{\lambda}, -1) \cdot (\bar{a}, V(\bar{a})) \leq (\bar{\lambda}, -1) \cdot (a, V(a)) \forall a \in A$ となって, $V(\bar{a}) - \bar{\lambda} \cdot \bar{a} \geq V(a) - \bar{\lambda} \cdot a \forall a \in A$ となり, $\bar{\lambda}$ は V の $\bar{a}$ における劣微分である。□

命題3の証明においては, $B \neq \emptyset$ と $s \neq 0$ の二つを保証するためにスレーター条件が用いられている事に注意する。

以上で得られたこれらの三つの命題を一つにまとめると, 求めている凹計画法の基本定理である以下のクーン・タッカー・宇沢の同値定理が得られる¹⁰⁾。

定理1 (クーン・タッカー・宇沢の同値定理) $g(\bar{x}) \leq a$ を満たす $\bar{x} \in X$ が (LMP) の解で, ある $\bar{\lambda} \geq 0$ によって与えられるラグランジュ関数 $f(x) - \bar{\lambda} \cdot g(x)$ を X 上で最大化していて, しかも $g_k(\bar{x}) < a_k \Rightarrow \bar{\lambda}_k = 0$ となっていれば, $\bar{x}$ は (CMP) の解で, $\bar{x}$ は $g(x) \leq a$ の下で $f(x)$ を最大化する。一方, X を凸集合, f と $-g_k$ を凹関数として, ある $\tilde{x} \in X$ に対して $g(\tilde{x}) < a$ となる時に, $\tilde{x}$ が (CMP) の解で, $\tilde{x}$ は $g(x) \leq a$ の下で $f(x)$ を最大化すれば, ある $\bar{\lambda} \geq 0$ が存在して $\bar{x} \in X$ が (LMP) の解で, $\bar{x}$ は X 上で $\bar{\lambda}$ によって与えられるラグランジュ関数 $f(x) - \bar{\lambda} \cdot g(x)$ を最大化し, しかも $g_k(\bar{x}) < a_k \Rightarrow \bar{\lambda}_k = 0$ となる。この時, どちらのケースでも $\bar{\lambda}$ は $\bar{a}$ における最大値関数 V の劣微分となる。

本稿が依拠しているビューレー (2007, 第6章) の凹計画法の基本定理であるクーン・タッカー定理では, ラグランジュ関数に付随するラグランジュ乗数 $\bar{\lambda}$ を最大値関数 V の劣微分として特徴付けている。通常の議論では, f や g_k に微分可能性を仮定して, 包絡線定理としてラグランジュ乗数 $\bar{\lambda}$ を最大値関数 V の偏微分係数として特徴付けるのであるが, ここでは f や g_k に微分可能性を仮定していないので最大値関数 V が微分可能とは限らず, ラグランジュ乗数 $\bar{\lambda}$ を最大値関数 V の劣微分として特徴付ける事は出来ないが, その代わりにラグランジュ乗数 $\bar{\lambda}$ を最大値関数 V の劣微分として特徴付けている¹¹⁾。

10) クーン・タッカー (1950) は f や $-g_k$ が微分可能な凹関数という条件の下で, 微分可能な凹関数の性質に基づいて, (CMP) の解 $(\bar{x})$ である事とある $\bar{\lambda} \geq 0$ に対して $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ が $f(x) - \bar{\lambda} \cdot (g(x) - a)$ の鞍点である事が, 同値である事を示した (p.487, 定理3)。宇沢 (1958) は, 微分可能性の代わりにスレーター条件を仮定して凸集合の分離定理を適用し, この同値関係を示した。

11) f や g_k に微分可能性を仮定して, 包絡線定理としてラグランジュ乗数 $\bar{\lambda}$ を最大値関数 V の偏微分として特徴付ける議論については, 例えば, 小山 (1995, 第7章) や神谷・浦井 (1996, 第7章) 等を参照。

なお、 $\bar{\lambda} \cdot a$ は一定数なので、 $\bar{x} \in X$ が X 上で $f(x) - \bar{\lambda} \cdot g(x)$ を最大化している事と X 上で $f(x) - \bar{\lambda} \cdot (g(x) - a)$ を最大化している事は同値である。したがって、定理 1 において $\bar{x} \in X$ が X 上で $f(x) - \bar{\lambda} \cdot g(x)$ を最大化しているという部分は、 $\bar{x} \in X$ が X 上で $f(x) - \bar{\lambda} \cdot (g(x) - a)$ を最大化していると変更できる。それに応じて、 $g_k(\bar{x}) < a_k \Rightarrow \bar{\lambda}_k = 0$ となる部分も $g_k(\bar{x}) - a_k < 0 \Rightarrow \bar{\lambda}_k = 0$ と表現し直せば、通常の次のような形になる¹²⁾。

系 $g(\bar{x}) - a \leq 0$ を満たす $\bar{x} \in X$ が、ある $\bar{\lambda} \geq 0$ に対するラグランジュ関数 $f(x) - \bar{\lambda} \cdot (g(x) - a)$ を X 上で最大化していて、しかも $g_k(\bar{x}) - a_k < 0 \Rightarrow \bar{\lambda}_k = 0$ となっていれば、 $\bar{x}$ は $g(x) - a \leq 0$ の下で $f(x)$ を最大化する。一方、 X を凸集合、 f と $-g_k$ を凹関数として、ある $\tilde{x} \in X$ が $g(\tilde{x}) - a < 0$ を満たす時に、 $\bar{x}$ が $g(x) - a \leq 0$ の下で $f(x)$ を最大化すれば、ある $\bar{\lambda} \geq 0$ が存在して、 $\bar{x}$ は X 上で $\bar{\lambda}$ に対応するラグランジュ関数 $f(x) - \bar{\lambda} \cdot (g(x) - a)$ を最大化し、しかも $g_k(\bar{x}) - a_k < 0 \Rightarrow \bar{\lambda}_k = 0$ となる。この時、どちらのケースでも $\bar{\lambda}$ は最大値関数 V の $\bar{a}$ における劣微分となる。

3 クーン・タッカー定理による厚生経済学の基本定理の再定式化

本節では、前節で示した凹計画法の基本定理であるクーン・タッカー定理（定理 1）を厚生経済学の基本定理に適用して、その再解釈を行う。そのために、 l 個の財・サービスが存在する経済を考えて、まず最初に、これらの財・サービスを消費する消費者の予算制約下の効用最大化問題を考える。この消費者の消費集合を R^l の非負象限 R^l_+ として、その上で定義された効用関数 $u: R^l_+ \rightarrow R$ は凹、強単調的 ($x' \geq x \Rightarrow u(x') \geq u(x)$) とする¹³⁾。また、価格ベクトル $p > 0$ 、所得 $I > 0$ とする¹⁴⁾。この時の消費者の予算制約下の効用最大化問題は $\max_{x \in R^l_+} u(x) \text{ s.t. } p \cdot x \leq I$ であり、定理 1 の (CMP) に対応する。また、対応する (LMP) は、ある $\bar{\lambda} \geq 0$ に対して $\max_{x \in R^l_+} [u(x) - \bar{\lambda} p \cdot x]$ という最大化問題である。そこで定理 1 を適用すると、 $\bar{x}$ に対して $[u(\bar{x}) - \bar{\lambda} p \cdot \bar{x}] = \max_{x \in R^l_+} [u(x) - \bar{\lambda} p \cdot x]$ となっていれば $u(\bar{x}) = \max_{x \in R^l_+} \{u(x) : p \cdot x \leq I\}$ となる。この時、 $\bar{\lambda} = 0$ とすると $\max_{x \in R^l_+} [u(x) - \bar{\lambda} p \cdot x] = \max_{x \in R^l_+} u(x)$ となるが、 u の強単調性から $u(x)$ には解が存在しないので $\bar{x}$ が解である事に矛盾し、故に、 $\bar{\lambda} > 0$ である。また、 $p \cdot 0 = 0 < I$ よりスレーター条件が成立するので、 $\bar{x}$ に対して $u(\bar{x}) = \max_{x \in R^l_+} u(x) \text{ s.t. } p \cdot x \leq I$ となっていれば、ある $\bar{\lambda} \geq 0$ に対して $u(\bar{x}) - \bar{\lambda} p \cdot \bar{x} = \max_{x \in R^l_+} [u(x) - \bar{\lambda} p \cdot x]$ となる。この時も、 $\bar{\lambda} = 0$ とすると $\max_{x \in R^l_+} [u(x) - \bar{\lambda} p \cdot x] = \max_{x \in R^l_+} u(x)$ となって、 u の強単調性より $u(x)$ に解が存在しないので、 $\bar{x}$ が解である事に矛盾し、故に、 $\bar{\lambda} > 0$ である。故に、以下の結果が得られる。

12) ただし、次節の厚生経済学の基本定理への適用で利用するクーン・タッカー定理は、ラグランジュ関数にパラメーター a_k を含まない定理 1 のクーン・タッカー定理である。

13) ここでは $u: R^l_+ \rightarrow R$ として、通常用いられる準凹性 $u: R^l_+ \rightarrow R (\Leftrightarrow u(\alpha x + (1-\alpha)x') \geq \min(u(x), u(x')) \forall \alpha \in (0, 1), x, x' \in X)$ よりも強い条件である凹性を利用している。もちろん、凹ならば準凹である。

14) 効用関数 $u: R^l_+ \rightarrow R$ の連続性の下では、所得 $I > 0$ 、そして価格ベクトル $p > 0$ より、予算制約下の効用最大化問題には必ず解が存在して需要点が存在する。もちろん、効用関数 $u: R^l_+ \rightarrow R$ の凹性より選好の弱凸性が成立するので、需要点集合は凸である。更に、効用関数 $u: R^l_+ \rightarrow R$ の強単調性より必ず需要点では予算制約式が等号で成立する。

命題4 非負象限 R_+^l を消費集合としてその上で定義された効用関数 $u: R_+^l \rightarrow R$ が凹, 強単調的とする。価格ベクトル $p > 0$, 所得 $I > 0$ とする。この時, ある $\bar{\lambda} > 0$ が存在して $\bar{x} \geq 0$ に対して $[u(\bar{x}) - \bar{\lambda} p \cdot \bar{x}] = \max_{x \in R_+^l} [u(x) - \bar{\lambda} p \cdot x]$ となっていれば $u(\bar{x}) = \max_{x \in R_+^l \{u(x) : p \cdot x \leq I\}}$ となる。また, $\bar{x}$ に対して $u(\bar{x}) = \max_{x \in R_+^l \{u(x) : p \cdot x \leq I\}}$ となっていれば, ある $\bar{\lambda} > 0$ に対して $u(\bar{x}) - \bar{\lambda} p \cdot \bar{x} = \max_{x \in R_+^l} [u(x) - \bar{\lambda} p \cdot x]$ となる。

今 $V(I) = \max \{u(x) : p \cdot x \leq I, x \geq 0\}$ を間接効用関数とすると, $\bar{\lambda}$ は V の I に関する劣微分で $\bar{\lambda} \in V(I)$ である。一般に最大値関数 V の劣微分の第 k 成分 λ_k は第 k 制約条件の外生変数 a_k が1単位増減した時の目的関数の値の変化を表すので, ここでの劣微分 $\bar{\lambda}$ は所得 I が1単位増減した時の効用の変化分である所得/貨幣の限界効用を表わす。すると, $u(x) - \bar{\lambda} p \cdot x$ は支出費用を考慮した純効用を表す。一方, $\bar{\lambda}^{-1}$ は効用1単位の所得/貨幣相当分を表すので, $\bar{\lambda}^{-1} u(x) - p \cdot x$ は支出費用を考慮した貨幣/所得表示の純効用となる。この時, u の強単調性から $\bar{\lambda} > 0$ なので, $u(\bar{x}) - \bar{\lambda} p \cdot \bar{x} = \max_{x \in R_+^l} [u(x) - \bar{\lambda} p \cdot x] \Leftrightarrow \bar{\lambda}^{-1} u(\bar{x}) - p \cdot \bar{x} = \max_{x \in R_+^l} [\bar{\lambda}^{-1} u(x) - p \cdot x]$ となる。すると, 所得/貨幣表示の支出費用を考慮した純効用を利用すれば, 共通の所得/貨幣表示単位で消費者の純効用が表されるので, 後に見るように, 異なる消費者の間での総和が可能となる。

次に, 経済全体を考えて, H 人の消費者と F 個の企業が存在する経済を考える。第 h 消費者は効用関数 $u_h: R_+^l \rightarrow R$ と初期保有点 $\omega_h \in R_+^l$ を持ち, 第 f 企業の生産集合を Y_f とする。第 h 消費者による第 f 企業の株式保有比率を $\theta_{hf} (\geq 0)$, $\sum_{h=1}^H \theta_{hf} = 1$ とし, 第 f 企業の利潤は θ_{hf} の大きさに従って全て消費者へ配分されるとする。したがって, $p (\geq 0)$ を価格ベクトル, $\pi_f(p)$ を第 f 企業の最大利潤 ($= \max \{p \cdot y : y \in Y_f\}$), $I^h(p)$ を第 h 消費者の可処分所得とすると, $I^h(p) = p \cdot \omega_h + \sum_{f=1}^F \theta_{hf} \pi_f(p)$ となる。経済を $E = ((u_h, \omega_h)_{h=1}^H, (Y_f)_{f=1}^F, (\theta_{hf})_{h=1, f=1}^H)$ として定義する。この経済における所得移転を伴った競争均衡 $((\bar{x}_h)_{h=1}^H, (\bar{y}_f)_{f=1}^F, (\bar{\tau}_h)_{h=1}^H, \bar{p})$ ($\bar{p} \geq 0$) を次のように定義する。

$$(a) \quad \bar{p} \cdot \bar{x}_h \leq I^h(\bar{p}) - \bar{\tau}_h, \bar{p} \cdot x_h \leq I^h(\bar{p}) - \bar{\tau}_h \Rightarrow u_h(\bar{x}_h) \geq u_h(x_h) \forall h = 1, \dots, H.$$

$$(b) \quad \bar{y}_f \in Y_f, y_f \in Y_f \Rightarrow \pi_f(\bar{p}) = \bar{p} \cdot \bar{y}_f \geq \bar{p} \cdot y_f \forall f = 1, \dots, F.$$

$$(c) \quad \sum_{h=1}^H \bar{x}_h \leq \sum_{h=1}^H \omega_h + \sum_{f=1}^F \bar{y}_f, \sum_{h=1}^H \bar{x}_{hi} < \sum_{h=1}^H \omega_{hi} + \sum_{f=1}^F \bar{y}_{fi} \Rightarrow \bar{p}_i = 0.$$

ここで $\bar{\tau}_h$ が第 h 消費者の一括所得移転額を表していて, 条件 (a) は一括所得移転後の可処分所得の下で, $\bar{x}_h$ が効用最大化を実現している事を述べている。もちろん, 各 $h = 1, \dots, H$ に対して $\bar{\tau}_h = 0$ となっているのが通常の競争均衡である。条件 (b) は $\bar{y}_f$ が第 f 企業の利潤最大を実現している事を述べている。条件 (c) の最初の部分は, 配分 $((\bar{x}_h)_{h=1}^H, (\bar{y}_f)_{f=1}^F)$ が資源の制約を満たして実現可能な事を述べている。今 F を実現可能な配分の集合として, $F = \{((\bar{x}_h)_{h=1}^H, (\bar{y}_f)_{f=1}^F) \in R_+^H \times (\times_{f=1}^F Y_f) : \sum_{h=1}^H \bar{x}_h \leq \sum_{h=1}^H \omega_h + \sum_{f=1}^F \bar{y}_f\}$ と定義すると, 条件 (c) の最初の部分は $((\bar{x}_h)_{h=1}^H, (\bar{y}_f)_{f=1}^F) \in F$ という事である。条件 (c) の二番目の部分は, 均衡において超過供給にある財の価格はゼロという, 自由財の条件である。これより, $\sum_{h=1}^H \bar{p} \cdot \bar{x}_h = \bar{p} \cdot \sum_{h=1}^H \bar{x}_h = \bar{p} \cdot \sum_{h=1}^H \omega_h + \bar{p} \cdot \sum_{f=1}^F \bar{y}_f = \sum_{h=1}^H \bar{p} \cdot \omega_h + \sum_{f=1}^F \bar{p} \cdot \bar{y}_f$ となるが, $\sum_{h=1}^H \theta_{hf} = 1$ より $\sum_{h=1}^H I^h(\bar{p}) = \sum_{h=1}^H \bar{p} \cdot$

$\omega_h + \sum_{f=1}^F \bar{p} \cdot \bar{y}_f = \sum_{h=1}^H \bar{p} \cdot \bar{x}_h$ となるので $\sum_{h=1}^H \bar{c}_h \leq 0$ となる¹⁵⁾。

凹計画法の基本定理であるクーン・タッカー定理（定理 1）に基づいて、この経済における所得移転を伴った競争均衡と線形の社会厚生関数の最大化問題の関係を考える。最初に、所得移転を伴った競争均衡が線形の社会厚生関数を最大化する事を示す。その目的のために以下の仮定をおく。

仮定 1. 各 $h = 1, \dots, H$ に対して、 $u_h: R_+^l \rightarrow R$ は凹かつ強単調的である¹⁶⁾。

これらの条件の下では以下の厚生経済学の第一基本定理が成立して、所得移転を伴った競争均衡は線形の社会厚生関数を最大化する。

命題 5 仮定 1. の下で、 $((\bar{x}_h)_{h=1}^H, (\bar{y}_f)_{f=1}^F, (\bar{c}_h)_{h=1}^H, \bar{p})$ を所得移転を伴った競争均衡として、各 $h = 1, \dots, H$ に対して $\bar{p} \cdot \bar{x}_h > 0$ となっているとする。すると、配分 $((\bar{x}_h)_{h=1}^H, (\bar{y}_f)_{f=1}^F)$ に対しては、

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^H a_h u_h(\bar{x}_h) &= \max_{(\mathbf{x}_h)_{h=1}^H, (\mathbf{y}_f)_{f=1}^F \in F} \sum_{h=1}^H a_h u_h(\mathbf{x}_h) \\ &= \max_{\mathbf{x}_h \in R_+^l, h=1, \dots, H, \mathbf{y}_f \in Y_f, f=1, \dots, F} \left\{ \sum_{h=1}^H a_h u_h(\mathbf{x}_h) : \sum_{h=1}^H \mathbf{x}_h - \sum_{f=1}^F \mathbf{y}_f \leq \sum_{h=1}^H \omega_h \right\} \quad (CMP') \end{aligned}$$

が成立する。ここで、各 $h = 1, \dots, H$ に対して $a_h^{-1} (> 0)$ はこの競争均衡における第 h 消費者の所得/貨幣の限界効用である。

証明. まず、仮定 1. の効用関数の強単調性から $\bar{p} > 0$ となる事に注意する。所得移転を伴った競争均衡の定義の (a) より $\bar{p} \cdot \bar{x}_h \leq I^h(\bar{p}) - \bar{c}_h$, $\bar{p} \cdot \mathbf{z}_h \leq I^h(\bar{p}) - \bar{c}_h \Rightarrow u_h(\bar{x}_h) \geq u_h(\mathbf{z}_h)$ であるが、仮定から $\bar{p} \cdot \mathbf{0} = 0 < \bar{p} \cdot \bar{x}_h = I^h(\bar{p}) - \bar{c}_h$ となって予算制約下の効用最大化問題においてスレーター条件が成立する。すると、命題 4 で示したように、仮定 1. の下では、正の所得がある時の予算制約下の効用最大化問題は支出費用を考慮した（効用単位表示の）純効用 $u_h(\mathbf{x}_h) - \bar{\lambda}_h \bar{p} \cdot \mathbf{x}_h$ の最大化問題へ変換でき、更に効用関数の強単調性から $\bar{\lambda}_h > 0$ なので、支出費用を考慮した（貨幣/所得表示の）純効用 $(\bar{\lambda}_h)^{-1} u_h(\mathbf{x}_h) - \bar{p} \cdot \mathbf{x}_h$ の最大化問題へ変換できる。したがって、 $(\bar{\lambda}_h)^{-1} = a_h$ とすれば、 $a_h u_h(\bar{x}_h) - \bar{p} \cdot \bar{x}_h = \max_{\mathbf{x}_h \in R_+^l} [a_h u_h(\mathbf{x}_h) - \bar{p} \cdot \mathbf{x}_h]$ が各 $h = 1, \dots, H$ に対して成立する。また、所得移転を伴った競争均衡の定義の (b) より、各 $f = 1, \dots, F$ に対して $\pi_f(\bar{p}) = \bar{p} \cdot \bar{y}_f \geq \bar{p} \cdot \mathbf{y}_f \forall \mathbf{y}_f \in Y_f$ より $\bar{p} \cdot \bar{y}_f = \max_{\mathbf{y}_f \in Y_f} \bar{p} \cdot \mathbf{y}_f$ となるが、各 $\bar{x}_h$ や $\bar{y}_f$ は他の $\mathbf{x}_{h'}$ や $\mathbf{y}_{f'}$ の選択からは独立なので、それぞれの最大化された項の総和がそれぞれの項の総和を最大化する事になり、

$$\sum_{h=1}^H a_h u_h(\bar{x}_h) - \bar{p} \cdot \left(\sum_{h=1}^H \bar{x}_h - \sum_{f=1}^F \bar{y}_f \right) = \sum_{h=1}^H [a_h u_h(\bar{x}_h) - \bar{p} \cdot \bar{x}_h] + \sum_{f=1}^F \bar{p} \cdot \bar{y}_f$$

15) 実際には、選好の強単調性より需要点では所得を全て支出して $\bar{p} \cdot \bar{x}_h = I^h(\bar{p}) - \bar{c}_h$ となるので、 $\sum_{h=1}^H \bar{c}_h = 0$ である。

16) 需要点の存在等で u_h の連続性が要請されるが、本稿ではその存在を前提にして議論を進めるので、ここでは u_h の連続性は仮定しない。もちろん、選好関係が効用関数表現される条件として、ドブリューの表現定理より連続性が必要となる。なお、 $u_h: R_+^l \rightarrow R$ を凹関数とすれば、自動的にそれは R_{++}^l で連続になる。

$$\begin{aligned}
&= \max_{\mathbf{x}_h \in R^I, h=1, \dots, H, \mathbf{y}_f \in Y_f, f=1, \dots, F} \left[\sum_{h=1}^H (a_h u_h(\mathbf{x}_h) - \bar{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{x}_h) + \sum_{f=1}^F \bar{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{y}_f \right] \\
&= \max_{\mathbf{x}_h \in R^I, h=1, \dots, H, \mathbf{y}_f \in Y_f, f=1, \dots, F} \left[\sum_{h=1}^H a_h u_h(\mathbf{x}_h) - \bar{\mathbf{p}} \cdot \left(\sum_{h=1}^H \mathbf{x}_h - \sum_{f=1}^F \mathbf{y}_f \right) \right] \quad (LMP')
\end{aligned}$$

となる。最右辺の最大問題 (LMP') では、配分 $((\mathbf{x}_h)_{h=1}^H, (\mathbf{y}_f)_{f=1}^F)$ が実現可能で $((\mathbf{x}_h)_{h=1}^H, (\mathbf{y}_f)_{f=1}^F) \in \mathbf{F}$ であるという条件は課されていない事に注意する。もちろん、所得移転を伴った競争均衡の定義の (c) より、配分 $((\bar{\mathbf{x}}_h)_{h=1}^H, (\bar{\mathbf{y}}_f)_{f=1}^F)$ が実現可能で相補条件が成立していて、 $\sum_{h=1}^H \bar{\mathbf{x}}_h \leq \sum_{h=1}^H \boldsymbol{\omega}_h + \sum_{f=1}^F \bar{\mathbf{y}}_f$, $\sum_{h=1}^H \bar{\mathbf{x}}_{hi} < \sum_{h=1}^H \omega_{hi} + \sum_{f=1}^F \bar{\mathbf{y}}_{fi} \Rightarrow \bar{p}_i = 0$ となっている。ここで命題 1 を適用すれば、 $((\bar{\mathbf{x}}_h)_{h=1}^H, (\bar{\mathbf{y}}_f)_{f=1}^F)$ は (CMP') の解となり、

$$\sum_{h=1}^H a_h u_h(\bar{\mathbf{x}}_h) = \max_{\mathbf{x}_h \in R^I, h=1, \dots, H, \mathbf{y}_f \in Y_f, f=1, \dots, F} \left\{ \sum_{h=1}^H a_h u_h(\mathbf{x}_h) : \sum_{h=1}^H \mathbf{x}_h - \sum_{f=1}^F \mathbf{y}_f \leq \sum_{h=1}^H \boldsymbol{\omega}_h \right\}$$

となる。□

$(\bar{\lambda}_h)^{-1} = a_h (> 0)$ が第 h 消費者の効用 1 単位の所得/貨幣相当分を表すので、 $a_h u_h(\bar{\mathbf{x}})$ は所得/貨幣表示の第 h 消費者の効用となる。すると、この効用は全ての消費者に共通の所得/貨幣表示になっているので、全ての消費者に関して総和が可能となる。ゆえに、異なる消費者の間での総和が可能となって、 $\sum_{h=1}^H a_h u_h(\mathbf{x}_h)$ を使う事ができる。ただし、 $\bar{\lambda}_h$ 、ゆえに、 a_h は当初の所得移転を伴った競争均衡 $((\bar{\mathbf{x}}_h)_{h=1}^H, (\bar{\mathbf{y}}_f)_{f=1}^F, (\bar{\boldsymbol{\tau}}_h)_{h=1}^H, \bar{\mathbf{p}})$ に依存しているので、対象となる所得移転を伴った競争均衡が異なれば $\bar{\lambda}_h$ 、ゆえに、 a_h も変わってくる。したがって、全ての消費者に関して効用を総和する際に用いるべき a_h も、それに応じて変わってくる事に注意が必要である¹⁷⁾。

今 $\boldsymbol{\omega} = \sum_{h=1}^H \boldsymbol{\omega}_h$ として、

$$W(\boldsymbol{\omega}) = \max_{\mathbf{x}_h \in R^I, h=1, \dots, H, \mathbf{y}_f \in Y_f, f=1, \dots, F} \left\{ \sum_{h=1}^H a_h u_h(\mathbf{x}_h) : \sum_{h=1}^H \mathbf{x}_h - \sum_{f=1}^F \mathbf{y}_f \leq \sum_{h=1}^H \boldsymbol{\omega}_h (= \boldsymbol{\omega}) \right\}$$

を間接社会厚生関数とすると、 $((\bar{\mathbf{x}}_h)_{h=1}^H, (\bar{\mathbf{y}}_f)_{f=1}^F)$ が (CMP') の解で、また $\bar{\mathbf{p}}$ に対応する相補条件を満たす (LMP') の解でもあるので、命題 2 より $\bar{\mathbf{p}}$ は W の $\boldsymbol{\omega}$ における劣微分で $\bar{\mathbf{p}} \in W(\boldsymbol{\omega})$ である。すると、劣微分の解釈より、第 k 財の市場価格 $\bar{p}_k$ は経済全体の第 k 財の初期存在量 ω_k が 1 単位だけ増加 (減少) した時の社会厚生の変化 (減少) 分を表す事になる。したがって、第 k 財の市場価格 $\bar{p}_k$ は第 k 財 1 単位の社会全体における望ましさ、つまり、限界社会厚生を表していると解釈できる。

ところで、 $((\bar{\mathbf{x}}_h)_{h=1}^H, (\bar{\mathbf{y}}_f)_{f=1}^F)$ が (CMP') の解で、 $\bar{\mathbf{p}} \cdot \bar{\mathbf{x}}_h > 0$ より全ての h に対して $a_h > 0$ となっているので、配分 $((\bar{\mathbf{x}}_h)_{h=1}^H, (\bar{\mathbf{y}}_f)_{f=1}^F)$ はパレート最適である。実際、配分 $((\bar{\mathbf{x}}_h)_{h=1}^H, (\bar{\mathbf{y}}_f)_{f=1}^F)$ をパレート改善する実現可能な配分 $((\mathbf{x}'_h)_{h=1}^H, (\mathbf{y}'_f)_{f=1}^F) \in \mathbf{F}$ が存在したとすると、パレート改善の定

17) 根岸 (1960, 1965, 第 2 章) やアロー・ハーン (1971, 第 4, 5 章) では、本稿でも後に用いる効用可能性フロンティアと線形な社会厚生関数の係数ベクトル $\mathbf{a}$ を表す H 次元基本単体に同相写像を構成し、更に、 τ_h の符号と a_h の (相対的な) 増加の方向を対応させて新しい $\mathbf{a}$ と $\boldsymbol{\tau}$ を与える写像を構成し、これらの写像から生成される合成写像の不動点が $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ の所得移転のない通常の競争均衡である事を示している。この議論はビューレー (2007, 第 5 章) でも行われている。

義から $u_h(\mathbf{x}'_h) \geq u_h(\bar{\mathbf{x}}_h) \forall h = 1, \dots, H, u_{h'}(\mathbf{x}'_{h'}) > u_{h'}(\bar{\mathbf{x}}_{h'}) \exists h'$ となるが, $a_h > 0 \forall h = 1, \dots, H$ より $\sum_{h=1}^H a_h u_h(\mathbf{x}'_h) > \sum_{h=1}^H a_h u_h(\bar{\mathbf{x}}_h)$ となって $((\bar{\mathbf{x}}_h)_{h=1}^H, (\bar{\mathbf{y}}_f)_{f=1}^F)$ が (CMP') の解である事に矛盾するからである。ゆえに, 以下の厚生経済学の第一基本定理が得られる。

定理 2 仮定 1. と仮定 2. の下で, $((\bar{\mathbf{x}}_h)_{h=1}^H, (\bar{\mathbf{y}}_f)_{f=1}^F, (\bar{\tau}_h)_{h=1}^H, \bar{\mathbf{p}})$ を所得移転を伴った競争均衡として, 各 $h = 1, \dots, H$ に対して $\bar{\mathbf{p}} \cdot \bar{\mathbf{x}}_h > 0$ となっているとする。すると, 配分 $((\bar{\mathbf{x}}_h)_{h=1}^H, (\bar{\mathbf{y}}_f)_{f=1}^F)$ はパレート最適である。

ここでは選好関係として凹で強単調的な効用関数を利用したが, 一般的な厚生経済学の第一基本定理では, 選好関係が効用関数で表される必要もなく, また, 選好の凸性も必要ない。必要なのは選好の局所非飽和条件だけで, u_h の強単調性の下では自動的に成立している。なお, パレート最適な配分 $((\mathbf{x}_h)_{h=1}^H, (\mathbf{y}_f)_{f=1}^F)$ に対して, どのような条件があれば $a_h > 0 \forall h = 1, \dots, H$ となる $\mathbf{a} = (a_h)_{h=1}^H$ が存在して,

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^H a_h u_h(\mathbf{x}_h) &= W(\boldsymbol{\omega}) \\ &= \max_{\mathbf{x}'_h \in R^I_+, h=1, \dots, H, \mathbf{y}'_f \in Y_f, f=1, \dots, F} \left\{ \sum_{h=1}^H a_h u_h(\mathbf{x}'_h) : \sum_{h=1}^H \mathbf{x}'_h - \sum_{f=1}^F \mathbf{y}'_f \leq \sum_{h=1}^H \boldsymbol{\omega}_h (= \boldsymbol{\omega}) \right\} \end{aligned}$$

となるかという問題は, 後に議論する。

次に, 命題 5 の逆を考える。そのためには, 以下の追加的な条件が必要になる。

仮定 2. 各 $f = 1, \dots, F$ に対して, Y_f は凸で原点 $\mathbf{0}$ を含む。

仮定 3. ある実現可能な配分 $((\widehat{\mathbf{x}}_h)_{h=1}^H, (\widehat{\mathbf{y}}_f)_{f=1}^F) \in \mathbf{F}$ が存在して $\sum_{h=1}^H \widehat{\mathbf{x}}_h > \mathbf{0}$ となる。

最初の条件は定理 1 を適用するために必要となる。二番目の条件は経済 $\mathbf{E}$ が十分に生産的で, 消費者全体で全ての財を正の大きさを消費できるという仮定である。消費集合が非負象限で生産集合が原点 $\mathbf{0}$ を含んでいるので, $\boldsymbol{\omega} = \sum_{h=1}^H \boldsymbol{\omega}_h > \mathbf{0}$ であればこの条件は成立する。この条件より (CMP') に対してスレーター条件が成立する。

命題 6 仮定 1., 2., 3. の下で, 配分 $((\bar{\mathbf{x}}_h)_{h=1}^H, (\bar{\mathbf{y}}_f)_{f=1}^F)$ がある $\mathbf{a} = (a_h)_{h=1}^H > \mathbf{0}$ に対する (CMP') の解であれば, ある $\bar{\mathbf{p}} (> \mathbf{0})$ と $\bar{\tau} = (\bar{\tau}_h)_{h=1}^H$ が存在して, $((\bar{\mathbf{x}}_h)_{h=1}^H, (\bar{\mathbf{y}}_f)_{f=1}^F, (\bar{\tau}_h)_{h=1}^H, \bar{\mathbf{p}})$ が所得移転を伴った競争均衡となる。この時, 各 $h = 1, \dots, H$ に対して, a_h^{-1} は所得/貨幣の限界効用となる。

証明. まず, 仮定 3. より $\sum_{h=1}^H \widehat{\mathbf{x}}_h > \mathbf{0}$ なので, $\sum_{h=1}^H \widehat{\mathbf{x}}_h / 2 - \sum_{f=1}^F \widehat{\mathbf{y}}_f < \sum_{h=1}^H \widehat{\mathbf{x}}_h - \sum_{f=1}^F \widehat{\mathbf{y}}_f \leq \sum_{h=1}^H \boldsymbol{\omega}_h (= \boldsymbol{\omega})$ となって (CMP') に対してスレーター条件が成立する。ゆえに, $R^H_+ \times (\times_{f=1}^F Y_f)$ が凸集合という事を考慮すれば, 定理 1 よりある $\bar{\mathbf{p}} (\geq \mathbf{0})$ が存在して, $((\bar{\mathbf{x}}_h)_{h=1}^H, (\bar{\mathbf{y}}_f)_{f=1}^F)$ に対して,

$$\begin{aligned}
& \sum_{h=1}^H a_h u_h(\bar{\mathbf{x}}_h) - \bar{\mathbf{p}} \cdot \left(\sum_{h=1}^H \bar{\mathbf{x}}_h - \sum_{f=1}^F \bar{\mathbf{y}}_f \right) \\
&= \max_{\mathbf{x}_h \in R^l, h=1, \dots, H, \mathbf{y}_f \in Y_f, f=1, \dots, F} \left[\sum_{h=1}^H a_h u_h(\mathbf{x}_h) - \bar{\mathbf{p}} \cdot \left(\sum_{h=1}^H \mathbf{x}_h - \sum_{f=1}^F \mathbf{y}_f \right) \right] \quad (LMP')
\end{aligned}$$

が成立し、更に相補条件も成立して $\sum_{h=1}^H \bar{\mathbf{x}}_h - \sum_{f=1}^F \bar{\mathbf{y}}_f < \sum_{h=1}^H \omega_h \Rightarrow \bar{p}_i = 0$ となる。この時、右辺のラグランジュ関数の最大化問題において、 $\mathbf{x}_h$ のみ独立に動かして他の $\mathbf{x}_{h'}$ や $\mathbf{y}_f$ をそれぞれ $\bar{\mathbf{x}}_{h'}$ や $\bar{\mathbf{y}}_f$ に固定すれば、 $a_h u_h(\bar{\mathbf{x}}_h) - \bar{\mathbf{p}} \cdot \bar{\mathbf{x}}_h = \max_{\mathbf{x}_h \in R^l_+} [a_h u_h(\mathbf{x}_h) - \bar{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{x}_h]$ が成立する。そして、 $a_h > 0$ なので $u_h(\bar{\mathbf{x}}_h) - a_h^{-1} \bar{\mathbf{p}} \cdot \bar{\mathbf{x}}_h = \max_{\mathbf{x}_h \in R^l_+} [u_h(\mathbf{x}_h) - a_h^{-1} \bar{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{x}_h]$ が成立する。今、 $\bar{\mathbf{p}}$ を価格ベクトルとみなして $\bar{\tau}_h = \bar{\mathbf{p}} \cdot \omega_h + \sum_{f=1}^F \theta_{hf} \bar{\mathbf{p}} \cdot \bar{\mathbf{y}}_f - \bar{\mathbf{p}} \cdot \bar{\mathbf{x}}_h$ とすると、 $\bar{\mathbf{p}} \cdot \bar{\mathbf{x}}_h \leq (=) \bar{\mathbf{p}} \cdot \omega_h + \sum_{f=1}^F \theta_{hf} \bar{\mathbf{p}} \cdot \bar{\mathbf{y}}_f - \bar{\tau}_h$ となって予算制約が成立する。そして、命題4と仮定1より、第 h 消費者の支出費用を考慮した（効用単位表示の）純効用 $u_h(\mathbf{x}_h) - a_h^{-1} \bar{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{x}_h$ の最大化問題の解は予算制約下の効用最大化問題の解であるので、 $\bar{\mathbf{x}}_h$ は予算制約下の効用最大化問題の解で $u_h(\bar{\mathbf{x}}_h) = \max_{\mathbf{x}_h \in R^l_+} \{u_h(\mathbf{x}_h) : \bar{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{x}_h \leq \bar{\mathbf{p}} \cdot \omega_h + \sum_{f=1}^F \theta_{hf} \bar{\mathbf{p}} \cdot \bar{\mathbf{y}}_f - \bar{\tau}_h\}$ となる。もちろんこの時、 $V^h(I) = \max \{u(\mathbf{x}_h) : \bar{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{x}_h \leq I, \mathbf{x}_h \geq 0\}$ を第 h 消費者の間接効用関数とすると、 a_h^{-1} は V^h の $I = \bar{\mathbf{p}} \cdot \omega_h + \sum_{f=1}^F \theta_{hf} \bar{\mathbf{p}} \cdot \bar{\mathbf{y}}_f - \bar{\tau}_h$ における劣微分で $a_h^{-1} \in V^h(\bar{\mathbf{p}} \cdot \omega_h + \sum_{f=1}^F \theta_{hf} \bar{\mathbf{p}} \cdot \bar{\mathbf{y}}_f - \bar{\tau}_h)$ であり、故に、命題4の議論で示したように、 a_h^{-1} は第 h 消費者の所得/貨幣の限界効用である。

次に、上記の (LMP') の右辺のラグランジュ関数の最大化問題において、 $\mathbf{y}_f$ のみ独立に動かして他の $\mathbf{x}_h$ や $\mathbf{y}_{f'}$ をそれぞれ $\bar{\mathbf{x}}_h$ や $\bar{\mathbf{y}}_{f'}$ に固定すれば $\bar{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{y}_f = \max_{\mathbf{y}_f \in Y_f} \bar{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{y}_f$ となるので、 $\bar{\mathbf{y}}_f$ が Y_f 上での利潤最大化を実現している。配分 $((\bar{\mathbf{x}}_h)_{h=1}^H, (\bar{\mathbf{y}}_f)_{f=1}^F)$ はその性質から実現可能で $\sum_{h=1}^H \bar{\mathbf{x}}_h - \sum_{f=1}^F \bar{\mathbf{y}}_f < \sum_{h=1}^H \omega_h \Rightarrow \bar{p}_i = 0$ という相補条件が自由財の条件となっているので、したがって、 $((\bar{\mathbf{x}}_h)_{h=1}^H, (\bar{\mathbf{y}}_f)_{f=1}^F, (\bar{\tau}_h)_{h=1}^H, \bar{\mathbf{p}})$ は所得移転を伴った競争均衡である。□

(LMP') の右辺のラグランジュ乗数（クーン・タッカー係数） $\bar{\mathbf{p}}$ を価格ベクトルとみなしているが、ラグランジュ乗数（クーン・タッカー係数） $\bar{\mathbf{p}}$ は間接社会厚生関数

$$W(\omega) = \max_{\mathbf{x}_h \in R^l, h=1, \dots, H, \mathbf{y}_f \in Y_f, f=1, \dots, F} \left\{ \sum_{h=1}^H a_h u_h(\mathbf{x}_h) : \sum_{h=1}^H \mathbf{x}_h - \sum_{f=1}^F \mathbf{y}_f \leq \sum_{h=1}^H \omega_h (= \omega) \right\}$$

の ω における劣微分で $\bar{\mathbf{p}} \in W(\omega)$ である。すると、以前と同様に劣微分の解釈から、第 k 財の市場価格 $\bar{p}_k$ は経済全体の第 k 財の初期存在量 ω_k が1単位増加（減少）した時の社会厚生増加（減少）分を表している事になる。したがって、第 k 財の市場価格 $\bar{p}_k$ は第 k 財1単位の社会全体での望ましさを、つまり、限界社会厚生を表している。一般的な厚生経済学の第二基本定理はパレート最適な配分が所得移転を伴った競争均衡となるという事で、そこでは効用関数で表現される必要のない選好関係を伴った凸な経済環境において、凸集合の分離定理を適用して必要となる価格ベクトルを探し出している¹⁸⁾。ここでは、見つける必要のある価格ベクトルが (LMP') の右辺のラグランジュ乗数（クーン・タッカー係数） $\bar{\mathbf{p}}$ となっていて、それが間接社会厚生関数の劣微分となる事より、それが財の限界社会厚生を表している事も示している。この点で、命題6は通常の厚生経済学の第二基本定理よりも多くの情報を与えている¹⁹⁾。

18) 通常の厚生経済学の第2基本定理については、ドブリュー（1959、第6章）や福岡（1979、第8章）等を参照。

19) もちろん、命題3の証明にあるように、凹計画法の基本定理であるクーン・タッカー定理でも、凸集合の分離定理を利用している。

しかし、既に命題5の系である定理2の直前で述べたように、 $\mathbf{a} = (a_h)_{h=1}^H > \mathbf{0}$ に対して配分 $((\bar{\mathbf{x}}_h)_{h=1}^H, (\bar{\mathbf{y}}_f)_{f=1}^F)$ が (CMP') の解であればパレート最適であるが、この命題6は全てのパレート最適な配分を網羅している訳ではなく、ある $\mathbf{a} = (a_h)_{h=1}^H > \mathbf{0}$ に対して (CMP') の解となるようなパレート最適な配分 $((\bar{\mathbf{x}}_h)_{h=1}^H, (\bar{\mathbf{y}}_f)_{f=1}^F)$ に対してだけ、このような特徴付けが可能である。そこで以下で、どのような条件の下でパレート最適な配分 $((\bar{\mathbf{x}}_h)_{h=1}^H, (\bar{\mathbf{y}}_f)_{f=1}^F)$ がある $\mathbf{a} = (a_h)_{h=1}^H > \mathbf{0}$ に対して (CMP') の解となるかを考える。

まずは、各パレート最適な配分 $((\bar{\mathbf{x}}_h)_{h=1}^H, (\bar{\mathbf{y}}_f)_{f=1}^F)$ がある $\mathbf{a} = (a_h)_{h=1}^H \geq \mathbf{0}$ に対して (CMP') の解となる事を示す。その目的のために仮定1における u_h の強単調性の代わりに $u_h(\mathbf{0}) = 0$ とする次の仮定をおく。

仮定1'. 各 $h = 1, \dots, H$ に対して、 u_h は凹で $u_h(\mathbf{0}) = 0$ である。

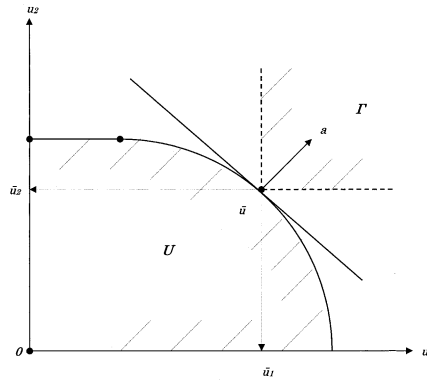
するとこの時、次の結果が成立する。

命題7 仮定1' と仮定2. の下では、パレート最適な配分 $((\bar{\mathbf{x}}_h)_{h=1}^H, (\bar{\mathbf{y}}_f)_{f=1}^F)$ に対してある $\mathbf{a} = (a_h)_{h=1}^H \geq \mathbf{0}$ が存在して、

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^H a_h u_h(\bar{\mathbf{x}}_h) &= \max_{((\mathbf{x}_h)_{h=1}^H, (\mathbf{y}_f)_{f=1}^F) \in \mathbf{F}} \sum_{h=1}^H a_h u_h(\mathbf{x}_h) \\ &= \max_{\mathbf{x}_h \in R_+^I, h=1, \dots, H, \mathbf{y}_f \in Y_f, f=1, \dots, F} \left\{ \sum_{h=1}^H a_h u_h(\mathbf{x}_h) : \sum_{h=1}^H \mathbf{x}_h - \sum_{f=1}^F \mathbf{y}_f \leq \sum_{h=1}^H \boldsymbol{\omega}_h (= \boldsymbol{\omega}) \right\} \end{aligned}$$

となる。

証明. まず、効用可能性集合 $\mathbf{U} = \{\mathbf{u} = (u_h)_{h=1}^H \in R_+^H : 0 \leq u_h \leq u_h(\mathbf{x}_h), h = 1, \dots, H, \exists ((\mathbf{x}_h)_{h=1}^H, (\mathbf{y}_f)_{f=1}^F) \in \mathbf{F}\}$ と定義する。 $\mathbf{x}'_h = \mathbf{0}, h = 1, \dots, H, \mathbf{y}'_f = \mathbf{0}, f = 1, \dots, F$ とすると、 $\boldsymbol{\omega}_h \geq \mathbf{0}, h = 1, \dots, H$ より $((\mathbf{x}'_h)_{h=1}^H, (\mathbf{y}'_f)_{f=1}^F) \in \mathbf{F}$ となり、仮定1' より $u_h(\mathbf{0}) = 0, h = 1, \dots, H$ なので $(u_h(\mathbf{x}'_h))_{h=1}^H \in \mathbf{U}$ となって、 $\mathbf{U} \neq \emptyset$ である。 R_+^H や $Y_f, f = 1, \dots, F$ の凸性から $\mathbf{F}$ も凸である。また、 $u_h, h = 1, \dots, H$ が凹関数なので $\mathbf{U}$ も凸となる。実際、 $\mathbf{u}' = (u'_h)_{h=1}^H, \mathbf{u} = (u_h)_{h=1}^H \in \mathbf{U}, \alpha \in (0, 1)$ とすると $\exists ((\mathbf{x}_h)_{h=1}^H, (\mathbf{y}_f)_{f=1}^F), ((\mathbf{x}'_h)_{h=1}^H, (\mathbf{y}'_f)_{f=1}^F) \in \mathbf{F}, 0 \leq u_h \leq u_h(\mathbf{x}_h), 0 \leq u'_h \leq u_h(\mathbf{x}'_h), h = 1, \dots, H$ となるが、 $\alpha(u_h)_{h=1}^H + (1-\alpha)(u'_h)_{h=1}^H = (\alpha u_h + (1-\alpha)u'_h)_{h=1}^H$ に対して u_h の凹性から $0 \leq \alpha u_h + (1-\alpha)u'_h \leq \alpha u_h(\mathbf{x}_h) + (1-\alpha)u_h(\mathbf{x}'_h) \leq u_h(\alpha \mathbf{x}_h + (1-\alpha)\mathbf{x}'_h), h = 1, \dots, H$ となり、また、 $\mathbf{F}$ の凸性から $((\alpha \mathbf{x}_h + (1-\alpha)\mathbf{x}'_h)_{h=1}^H, (\alpha \mathbf{y}_f + (1-\alpha)\mathbf{y}'_f)_{f=1}^F) \in \mathbf{F}$ となるので $(\alpha u_h + (1-\alpha)u'_h)_{h=1}^H \in \mathbf{U}$ となる。次に $\boldsymbol{\Gamma} = \{\mathbf{v} = (v_h)_{h=1}^H \in R_+^H : \mathbf{v} = (v_h)_{h=1}^H > (u_h(\bar{\mathbf{x}}_h))_{h=1}^H = \bar{\mathbf{u}}, i.e., v_h > u_h(\bar{\mathbf{x}}_h), h = 1, \dots, H\}$ と定義すると、 $\boldsymbol{\Gamma}$ は非空で凸である。今、 $\mathbf{U} \cap \boldsymbol{\Gamma} \neq \emptyset$ として $\mathbf{v} \in \mathbf{U} \cap \boldsymbol{\Gamma}$ とすると、 $\mathbf{v} = (v_h)_{h=1}^H > (u_h(\bar{\mathbf{x}}_h))_{h=1}^H$ であつ $\exists ((\mathbf{x}_h)_{h=1}^H, (\mathbf{y}_f)_{f=1}^F) \in \mathbf{F}, 0 < v_h \leq u_h(\mathbf{x}_h), h = 1, \dots, H$ となるので、 $(u_h(\bar{\mathbf{x}}_h))_{h=1}^H < \mathbf{v} = (v_h)_{h=1}^H \leq (u_h(\mathbf{x}_h))_{h=1}^H$ となって $(\bar{\mathbf{x}}_h)_{h=1}^H$ が $(\bar{\mathbf{x}}_h)_{h=1}^H$ を強パレート改善する事になるが、 $((\mathbf{x}_h)_{h=1}^H, (\mathbf{y}_f)_{f=1}^F)$ は実現可能なので、 $((\bar{\mathbf{x}}_h)_{h=1}^H, (\bar{\mathbf{y}}_f)_{f=1}^F)$ のパレート最適性に矛盾する。ゆえに、 $\mathbf{U} \cap \boldsymbol{\Gamma} = \emptyset$ となる。

第5図： Γ と U の分離

すると凸集合に関する分離定理より $\exists \mathbf{a} = (a_h)_{h=1}^H \neq \mathbf{0}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} \geq \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \forall \mathbf{v} \in \Gamma, \mathbf{u} \in U$ となる。ここで、 $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{e}^i + \mathbf{e}/n \in \Gamma, \forall n = 1, 2, \dots$ とすると、 $\bar{\mathbf{u}} \in U$ と分離の条件より $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{a} \cdot (\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{e}^i + \mathbf{e}/n) = \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{u}} + a_i + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e})/n \geq \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{u}}, \forall n = 1, 2, \dots$ となって $a_i + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e})/n \geq 0, \forall n = 1, 2, \dots$ となるが、 $n \rightarrow \infty$ とすれば $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{e})/n \rightarrow 0$ となるので $a_i \geq 0$ となり、結局 $\mathbf{a} \geq 0$ となる。すると、 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ だったので $\mathbf{a} \geq 0$ である。 $\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{e}/n \in \Gamma, \forall n = 1, 2, \dots$ なので、分離の条件より任意の $\mathbf{u} \in U$ に対して $\mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{u}} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e})/n \geq \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}, \forall n = 1, 2, \dots$ となり、そこで $n \rightarrow \infty$ とすれば $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{e})/n \rightarrow 0$ となる事から $\mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{u}} \geq \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \forall \mathbf{u} \in U$ が得られる。すると $\bar{\mathbf{u}} = (u_h(\bar{\mathbf{x}}_h))_{h=1}^H \in U$ なので、 $\sum_{h=1}^H a_h u_h(\bar{\mathbf{x}}_h) = \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{u}} = \max_{\mathbf{u} \in U} \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \max_{\mathbf{u} \in U} \sum_{h=1}^H a_h u_h$ となるが、 U の作り方から $\forall ((\mathbf{x}_h)_{h=1}^H, (\mathbf{y}_f)_{f=1}^F) \in F \Rightarrow (u_h(\mathbf{x}_h))_{h=1}^H \in U$ なので、結局ある $\mathbf{a} \geq 0$ に対して、 $\sum_{h=1}^H a_h u_h(\bar{\mathbf{x}}_h) = \max_{((\mathbf{x}_h)_{h=1}^H, (\mathbf{y}_f)_{f=1}^F) \in F} \sum_{h=1}^H a_h u_h(\mathbf{x}_h) = \max_{\mathbf{x}_h \in R_+^I, h=1, \dots, H, \mathbf{y}_f \in Y_f, f=1, \dots, F} \{ \sum_{h=1}^H a_h u_h(\mathbf{x}_h) : \sum_{h=1}^H \mathbf{x}_h - \sum_{f=1}^F \mathbf{y}_f \leq \sum_{h=1}^H \boldsymbol{\omega}_h (= \boldsymbol{\omega}) \}$ となる。□

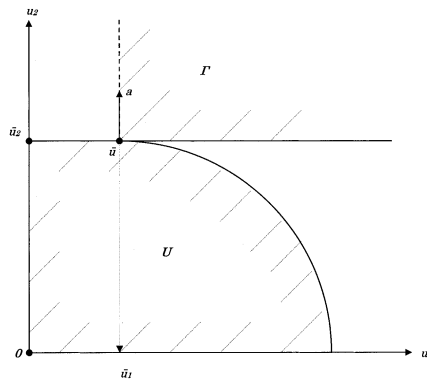
第6図： $\mathbf{a} > 0$ とならないケース

図6ではパレートフロンティアが水平になっている線分の右端点はパレート最適であるが、そこでの分離の結果の係数ベクトルは、 $a_1 = 0$ となっているために $\mathbf{a} \geq 0$ となっていない、 $\mathbf{a} > 0$ となっていない。ゆえに、この命題では $\mathbf{a} \geq 0$ となる事しか示せず $\mathbf{a} > 0$ となるとは限らないので、更に条件を付け加えて、必ず $\mathbf{a} > 0$ となる事を示す。そのための条件が次である。これは仮定1. と仮定1'. を1つにまとめたものである。

仮定1''. 各 $h = 1, \dots, H$ に対して、 u_h は凹かつ強単調的で $u_h(\mathbf{0}) = 0$ である²⁰⁾。

するとこの時、次の結果が成立する。

命題8 仮定1''. と仮定2. の下では、 $\mathbf{x}_h \geq 0$, $h = 1, \dots, H$ となるパレート最適な配分 $((\overline{\mathbf{x}}_h)_{h=1}^H, (\overline{\mathbf{y}}_f)_{f=1}^F)$ に対してある $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_h)_{h=1}^H > 0$ が存在して、

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^H a_h u_h(\overline{\mathbf{x}}_h) &= \max_{((\mathbf{x}_h)_{h=1}^H, (\mathbf{y}_f)_{f=1}^F) \in \mathbf{F}} \sum_{h=1}^H a_h u_h(\mathbf{x}_h) \\ &= \max_{\mathbf{x}_h \in R_+^I, h=1, \dots, H, \mathbf{y}_f \in Y_f, f=1, \dots, F} \left\{ \sum_{h=1}^H a_h u_h(\mathbf{x}_h) : \sum_{h=1}^H \mathbf{x}_h - \sum_{f=1}^F \mathbf{y}_f \leq \sum_{h=1}^H \boldsymbol{\omega}_h (= \boldsymbol{\omega}) \right\} \end{aligned}$$

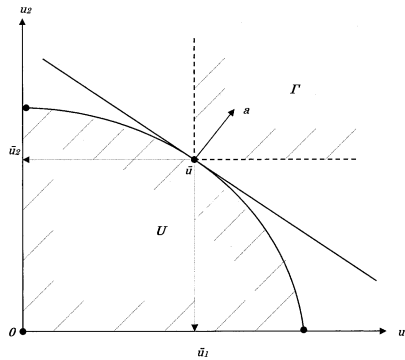
となる。

証明. 命題7より、パレート最適な配分 $((\overline{\mathbf{x}}_h)_{h=1}^H, (\overline{\mathbf{y}}_f)_{f=1}^F)$ に対してある $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_h)_{h=1}^H \geq 0$ が存在して、

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^H a_h u_h(\overline{\mathbf{x}}_h) &= \max_{((\mathbf{x}_h)_{h=1}^H, (\mathbf{y}_f)_{f=1}^F) \in \mathbf{F}} \sum_{h=1}^H a_h u_h(\mathbf{x}_h) \\ &= \max_{\mathbf{x}_h \in R_+^I, h=1, \dots, H, \mathbf{y}_f \in Y_f, f=1, \dots, F} \left\{ \sum_{h=1}^H a_h u_h(\mathbf{x}_h) : \sum_{h=1}^H \mathbf{x}_h - \sum_{f=1}^F \mathbf{y}_f \leq \sum_{h=1}^H \boldsymbol{\omega}_h (= \boldsymbol{\omega}) \right\} \end{aligned}$$

となるので、この $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_h)_{h=1}^H$ が $a_h > 0$, $h = 1, \dots, H$ となる事を示せばいい。そこで、ある h' に対して $a_{h'} = 0$ とする。 $\overline{\mathbf{x}}_{h'} \geq 0$ を考慮して $\overline{\mathbf{x}}_{h'}' = 0$, $\overline{\mathbf{x}}_h' = \overline{\mathbf{x}}_h + \overline{\mathbf{x}}_{h'}' / (H-1) \geq \overline{\mathbf{x}}_h$, $\forall h \neq h'$ とすると、 u_h の強単調性より $u_h(\overline{\mathbf{x}}_h') > u_h(\overline{\mathbf{x}}_h)$, $\forall h \neq h'$ となる。この時、 $\sum_{h=1}^H \overline{\mathbf{x}}_h' = \sum_{h=1}^H \overline{\mathbf{x}}_h$ なので配分 $((\overline{\mathbf{x}}_h')_{h=1}^H, (\overline{\mathbf{y}}_f)_{f=1}^F)$ は実現可能である。しかし、 $\sum_{h=1}^H a_h u_h(\overline{\mathbf{x}}_h') = \sum_{h \neq h'} a_h u_h(\overline{\mathbf{x}}_h') > \sum_{h \neq h'} a_h u_h(\overline{\mathbf{x}}_h) = \sum_{h=1}^H a_h u_h(\overline{\mathbf{x}}_h)$ となるが、 $(\overline{\mathbf{x}}_h)_{h=1}^H$ の性質と $((\overline{\mathbf{x}}_h')_{h=1}^H, (\overline{\mathbf{y}}_f)_{f=1}^F) \in \mathbf{F}$ から $\sum_{h=1}^H a_h u_h(\overline{\mathbf{x}}_h) \geq \sum_{h=1}^H a_h u_h(\overline{\mathbf{x}}_h')$ なので矛盾が起こる。したがって、 $a_{h'} > 0$ となって $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_h)_{h=1}^H > 0$ である。□

20) すると、 $\overline{\mathbf{x}}_h \geq 0 \Leftrightarrow u_h(\overline{\mathbf{x}}_h) > 0, u_h(\mathbf{0}) = 0$ である。

第7図: $a > 0$ となるケース—端点以外

仮定1''より $\mathbf{x}_h \geq \mathbf{0} \Leftrightarrow u_h(\mathbf{x}_h) > 0$ となるので、図7のパレートフロンティアの各座標軸上以外の点に対して、命題8が成立する事になる。ここで命題6と命題8を結合すれば次の厚生経済学の第二基本定理が得られる。

定理3 仮定1'', 2., 3. の下で, $\bar{\mathbf{x}}_h \geq \mathbf{0}, h = 1, \dots, H$ となるパレート最適な配分 $((\bar{\mathbf{x}}_h)_{h=1}^H, (\bar{\mathbf{y}}_f)_{f=1}^F)$ に対して, ある $\mathbf{a} = (a_h)_{h=1}^H > \mathbf{0}$ が存在して

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^H a_h u_h(\bar{\mathbf{x}}_h) &= \max_{((\mathbf{x}_h)_{h=1}^H, (\mathbf{y}_f)_{f=1}^F) \in \mathbf{F}} \sum_{h=1}^H a_h u_h(\mathbf{x}_h) \\ &= \max_{\mathbf{x}_h \in R^I, h=1, \dots, H, \mathbf{y}_f \in Y_f, f=1, \dots, F} \left\{ \sum_{h=1}^H a_h u_h(\mathbf{x}_h) : \sum_{h=1}^H \mathbf{x}_h - \sum_{f=1}^F \mathbf{y}_f \leq \sum_{h=1}^H \boldsymbol{\omega}_h (= \boldsymbol{\omega}) \right\} \end{aligned}$$

となる。更に、ある $\bar{\mathbf{p}}(> \mathbf{0})$ と $\bar{\boldsymbol{\tau}} = (\bar{\boldsymbol{\tau}}_h)_{h=1}^H$ が存在して、 $((\bar{\mathbf{x}}_h)_{h=1}^H, (\bar{\mathbf{y}}_f)_{f=1}^F, (\bar{\boldsymbol{\tau}}_h)_{h=1}^H, \bar{\mathbf{p}})$ が所得移転を伴った競争均衡となる。この時、各 $h = 1, \dots, H$ に対して、 a_h^{-1} はこの所得移転を伴った競争均衡における第 h 消費者の所得/貨幣の限界効用であり、また、 $\bar{p}_i$ は第 i 財の限界社会厚生である。

消費者の選好が凹な効用関数として表現されるという状況での定理2や3で示されている厚生経済学の基本定理では、凹計画法の基本定理であるクーン・タッカー定理を適用してラグランジュ乗数を所得/貨幣の限界効用や財の限界社会厚生として解釈する事により、凸集合の分離定理を適用して通常示される結果に加えて、線形の社会厚生関数の係数や均衡価格に関する追加的な情報が得られている。

4. 終わりに

本稿では、ビューレー (2007, 第6章) にしたがって、消費者の選好が凹な効用関数として表現される生産経済での厚生経済学の基本定理に対して、凹計画法の基本定理であるクーン・タッカー定理を適用してラグランジュ乗数を所得/貨幣の限界効用や財の限界社会厚生として解釈する事によ

り、線形の社会厚生関数の係数や均衡価格に関する追加的な情報を与えた²¹⁾。ビューレー (2007) では、純粋交換経済における世代重複モデルであるサムエルソンモデル、生産経済における世代重複モデルであるダイヤモンドモデル、そして、生産経済における最適成長モデルであるラムゼーモデルのそれぞれの離散無限期間モデルにおいても、 l 次元ユークリッド空間におけるこのクーン・タッカー定理を通時的に繰り返し利用して、それぞれのモデルにおいて対応する厚生経済学の基本定理を示している²²⁾。これらの離散的無限期間経済モデルでは、通常多くの場合に各期のラグランジュ関数を無限期間にわたって総和する無限期間のラグランジュ関数が用いられるが、その議論の根拠も含めて、凹計画法の基本定理であるクーン・タッカー定理を一般的な離散無限期間の最適問題において確立して、その結果を適用してこれらの無限期間経済モデルにおける厚生経済学の基本定理を示すという事も、興味深い問題である。一般的な離散無限期間の最適問題はもちろん無限次元の最適問題なので、総和可能な価格ベクトルを得るために l 次元ユークリッド空間では考える必要のない原空間上の位相や双対空間の選択などの数学的に高度な問題を扱う必要がある。ストーキー・ルーカス (1989, 第15, 16章) では、この点を丁寧に解説しながら、無限次元ノルム空間を財空間とする経済における厚生経済学の基本定理を議論している。また、ル・ヴァン・サグラム (2004) では、本稿で扱った凹計画法の基本定理であるクーン・タッカーを無限次元ノルム空間の一つである l_∞ 空間に拡張して無限期間のラグランジュ乗数法を確立し、離散無限期間のラムゼー型最適成長モデルに応用している。更に、アリプラントイス・ブラウン・バーキンショウ (1997) では、無限次元財空間モデルにおける競争均衡の存在定理を離散無限期間のラムゼー型最適成長モデルに適用して、その経済における競争均衡の存在を示している。これらの結果を参考にしながら、本稿の結果を離散無限期間のケースを拡張するという問題については、後日稿を改めて行う予定である。

謝辞

小島先生には、著者の北海道大学大学院経済学研究科赴任以来様々な機会でお世話になった。この場を借りてお礼申し上げる。

参考文献

- [1] Aliprantis, C.D., D. Brown, and O. Burkinshaw (1997): "New proof of the existence of equilibrium in a single sector growth model" *Macroeconomic Dynamics* 1, pp.669-79
- [2] Arrow, K.J. (1951): "An extension of the basic theorems of classical welfare economics" *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, ed. by J. Neyman, pp.507-32, The University of California Press (Berkeley, CA)
- [3] —————: and F. Hahn (1971): *General Competitive Analysis*, Holden-Day (San Francisco, CA) (邦訳『一般競争分析』川又邦雄・福岡正夫訳 岩波書店 (1976))
- [4] Bewley, T (1972): "Existence of equilibria in economies with infinitely many commodities" *Journal*

21) パレート最適な配分を線形の社会厚生関数で特徴付ける際には、多くの場合に消費者の選好が微分可能な効用関数となっているケースで議論されるが、本稿では、多くのケースで扱われない効用関数の微分可能性を前提にしないケースを、ビューレー (2007, 第6章) に沿って取り上げて議論することに主眼があるので、微分可能な効用関数のケースは扱っていない。なお、ビューレー (2007, 第6章) でも、消費者の選好が微分可能で凹な効用関数となっているケースも扱っている。

22) 詳しくは、ビューレー (2007, 第9, 10章) を参照。

- of Economic Theory* 4, pp.514-40
- [5] ——— (2007) : *General Equilibrium, Overlapping Generations Models, and Optimal Growth Theory*, Harvard University Press (Cambridge, MA)
- [6] Dechert, W.D. (1982) : “Lagrange multiplier in infinite horizon discrete time optimal control models” *Journal of Mathematical Economics* 9, pp.285-302
- [7] Debreu, G. (1954) : “Valuation equilibrium and Pareto optimum” in *Proceedings of the National Academy of Science of the U.S.A.*, 40, pp.588-92
- [8] Debreu, G. (1959) : *Theory of Value*, John Wiley and Sons (New York, NY) (邦訳『価値の理論』丸山徹訳 東洋経済新報社 (1977))
- [9] Dixit, A.K. (1990) : *Optimization in Economic Theory*, 2nd ed. Oxford University Press (New York, NY) (邦訳『経済理論における最適化』大石泰彦・磯前修二訳 勁草書房 (1997))
- [10] 福岡正夫 (1979) : 『一般均衡理論』創文社
- [11] Hurwicz, L. (1958) : “Programming in linear spaces” in *Studies in Linear and Non-linear Programming* ed. by K.J.Arrow, L.Hurwicz, and H.Uzawa, Stanford University Press (Stanford, CA)
- [12] 神谷和也・浦井憲 (1996) : 『経済学のための数学入門』東京大学出版会
- [13] 小山昭雄 (1995) : 『経済数学教室6 微分積分の基礎 (下)』岩波書店
- [14] Kuhn, A.W. and A.W.Tucker (1951) : “NonLinear programming” in *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, ed. by J. Neyman, pp.375-82, The University of California Press (Berkeley, CA)
- [15] Le Van, C. and H.Saglam (2004) : “Optimal growth models and the Lagrange multiplier” *Journal of Mathematical Economics* 49, pp.393-410
- [16] Mangasarian, O.L. (1969) : *Nonlinear Programming*, McGraw-Hill (New York, NY) (邦訳『非線形計画法』関根智明訳 培風館 (1972))
- [17] Negishi, T. (1960) : “Welfare economics and existence of an equilibrium for a competitive economy” *Metroeconomica*, 12, pp.92-7
- [18] 根岸隆 (1965) : 『価格と配分の理論』東洋経済新報社
- [19] Takayama, A. (1985) : *Mathematical Economics 2nd ed*, Cambridge University Press (Cambridge, MA)
- [20] Rockafellar, R.T. (1970) : *Convex Analysis*, Princeton University Press (Princeton, NJ)
- [21] Stokey, N. and R.Lucas (1989) : *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Harvard University Press, (Cambridge MA)
- [22] 上河泰男・木村吉男 (1984) : 『理論経済学』東洋経済新報社
- [23] Uzawa, H. (1958) : “The Kuhn-Tucker theorem in concave programming” in *Studies in Linear and Non-linear Programming*, ed. by K.J.Arrow, L.Hurwicz, and H.Uzawa, pp.32-7, Stanford University Press (Stanford, CA)