



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	深溝形誘導電動機の回轉子導體の温度上昇
Author(s)	藤原, 一
Citation	工学部研究報告, 8, 141-149
Issue Date	1953-09-10
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40414
Type	departmental bulletin paper
File Information	8_141-149.pdf



深溝形誘導電動機の回轉 子導體の溫度上昇

藤 原 一

(February 28, 1953)

Temperature rise in the deep slot type induction
motor rotor conductor during starting.

Hajime FUJIHARA

Abstract

At the point of mechanical strength of the induction motor rotor construction, we must know the temperature rise in several forms of the deep slot type ones rotor conductors. In this paper, the temperature rise is evaluated by the function of time (t) and slot depth (x), and then that of exponential type conductor is compared with that of standard rectangular type. If the exponential type and the rectangular type are both equal condition, equal external characteristics and equal current density in the rotor conductor, the former's temperature rise is very larger and earlier than later's, and if we intend to maintain equal temp. rise on both type, the former's current density is required to reduce in proportion to $\sqrt{Q_r/Q_e}$. (refer to conclusion)

1. 緒 言

深溝形誘導電動機の回轉子導體は起動中は定常狀態の數倍の電流が流れ、その爲溫度上昇も短時間ながら定常狀態の値の數倍になつていゝと考えられるのは周知の事實である。なお又この溫度上昇は起動開始後短時間中は溝の深さ方向で著しくことなり、溝の上端附近では一番高く、それより低部に向つて急激に低下し、底部では殆んど上昇せず、時間が経過するにしたがい上部は溫度が下降し、下部は上昇しその溫度差は小となり定常狀態の平均溫度に近づいて行くのである。この溫度上昇の大いさ及び時間的経過を知ることは設計上回轉子導體構造の機械的強度を問題とするときは特に必要と考えられる¹⁾。

この溫度上昇に影響するのはその電動機の發生回轉力、負荷反抗回轉力、起動條件は勿論のことであるがその外回轉子導體の溝の形狀（短形、梯形、三角形、L形、對數曲線形等）によつてかなり左右されるので、本文では後者の場合についてある發熱函數 $q(x, t)$ watt/cm³ による溫度上昇の微分方程式をとき、これより計算が割合簡單で結論の明瞭な標準になる短形

導體¹⁾と側面對数曲線形導體とを比較している。なお熱の移動は導體の深さ方向(x)と鉄心への放熱とのみを考える。

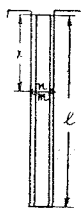
2. 温度上昇の微分方程式及び解假定

假定:

1. 冷却渠 (Air-duct), 及び短絡環 (End-ring) の影響は無いものとする。又空隙面に向う導體面からの熱の放散は鉄心へのそれに比し, 小さいと考えこれを無視する。(空気へは風速 15 (m/sec) で $0.01 \sim 0.02$ (watt/cm²°C), 鉄心へは最近の工作技術では $0.05 \sim 0.1$ (watt/cm²°C) である。)²⁾

2. 起動中鉄心温度は一定と考える。

3. 起動中導體の比抵抗, 比熱, 放熱係数は一定と考える。



考察する場所は導體上端より x のところとする。(第 1 圖参照)

$\theta(x, t)$: x における導體の温度上昇 (°C)

k : 導體の熱傳導率 (watt/cm°C)

c : 導體の熱容量 (watt/cm³°C)

u : 導體周邊長さ (cm)

第 1 圖 A : 導體斷面積 (cm²)

$q(x, t)$: 單位體積内の發生熱 (watt/cm³)

h : 鉄心への放熱係數 (watt/cm²°C)

m, n : 鉄心溝及び導體の巾 (cm)

導體内に $q(x, t)$ の熱源があり, x 方向の熱の移動と鉄心への熱の放出を考慮した微分方程式は

$$a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial t} - b^2 \theta = -\frac{q(x, t)}{c} \quad (1)$$

となる。但し $a^2 = \frac{k}{c}$; $b^2 = \frac{hu}{c}$ (2)

これらの方程式を解く境界条件は假定より

$$\left. \begin{array}{l} 1. \quad t \leq 0 \quad x \text{ の全域にわたり } \theta = 0 \\ 2. \quad t > 0 \quad x = 0, x = l \text{ で } \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \end{array} \right\} \quad (3)$$

解は (1) 式の第 1 項及び境界条件を考慮して境界値問題の Stokes の方法で $\theta(x, t)$ は余弦級数に展開出来ると考え

$$\theta(x, t) = A_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \cos \frac{n\pi}{l} x \quad (4)$$

とおく。但し

$$A_0(t) = \frac{1}{l} \int_0^l \theta(\xi, t) d\xi \quad ; \quad A_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \theta(\xi, t) \cos \frac{n\pi}{l} \xi d\xi \quad (5)$$

同様に方程式中の諸項をすべて cosine 級數に展開し, (1) 式に代入して係數を比較すると

$$A_0'(t) + b^2 A_0(t) = \frac{Q_0(t)}{c} \quad (6)$$

$$A_n'(t) + \left\{ b^2 + a^2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right\} A_n(t) = \frac{Q_n(t)}{c} \quad (7)$$

$$\text{但し, } q(x, t) = Q_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) \cos \frac{n\pi}{l} x \quad (8)$$

$$Q_0(t) = \frac{1}{l} \int_0^l q(\xi, t) d\xi$$

$$Q_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l q(\xi, t) \cos \frac{n\pi}{l} \xi d\xi$$

上式の解は容易に求まり, 積分常數は境界條件より 0 となるのでその解を (4) 式に代入して

$$\begin{aligned} \theta(x, t) = & \frac{1}{c \cdot l} \int_0^t e^{-b^2(t-\tau)} \int_0^l q(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ & + \frac{2}{c \cdot l} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{l} x \int_0^t e^{-\left\{ b^2 + a^2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right\} (t-\tau)} \int_0^l q(\xi, \tau) \cos \frac{n\pi}{l} \xi d\xi d\tau \quad (9) \end{aligned}$$

3. 短形及び對數曲線形溝の電流密度の算定

Maxwell の電流密度の算定 電磁方程式は

$$\text{rot } \dot{H} = 4\pi \dot{i}$$

$$\text{rot } \dot{E} = - \frac{\partial \dot{B}}{\partial t}$$

ベクトル $\dot{H}$, $\dot{E}$ は溝の溝の深さ方向に溝底より測つた長さ z のみの函數とし, $\dot{i} = i e^{j\omega t}$, $\dot{B} = B e^{j\omega t}$ を代入し, 兩式より B を消去して

$$\frac{d^2 i}{dz^2} + \left(\frac{1}{m} \frac{dm}{dz} \right) \frac{di}{dz} - j\omega \frac{\mu_0}{\rho} \frac{n}{m} i = 0 \quad (10)$$

境界條件は

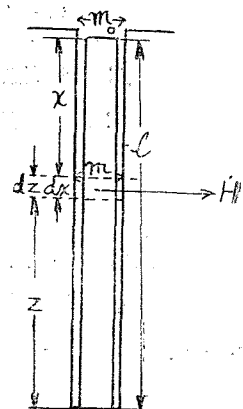
$$z = 0 \quad \text{で} \quad \frac{di}{dz} = 0$$

$$z = l \quad \text{で} \quad \frac{di}{dz} = k^2 \frac{I}{m_0}$$

但し

$$k = \sqrt{j\omega \frac{\mu_0}{\rho}}$$

μ_0 : 絶對誘導磁率 ($4\pi \times 10^{-9}$ H/cm)



第 2 圖

ρ : 導體の比抵抗 ($\Omega\text{-cm}$)

ω : 電流の角速度 ($=2\pi f \text{ rad/sec}$)

m_0 : 導體上端の溝巾 (cm)

I : 導體の全電流 (A)

短形の場合は $m = n = m_0$, $\frac{1}{m} \frac{dm}{dz} = 0$

今 $m = n = m_0 e^{2\alpha(l-2z)}$ とすると

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{dm}{dz} = -2\alpha$$

となり, (10) 式は境界条件を考慮してかんたんにとけ,

$\alpha^2 \ll \beta^2$ とし, 變數 z を $x (=l-x)$ に變換すると解は

$$i = e^{\alpha x} \frac{\beta \cosh \beta(l-x) - \alpha \sinh \beta(l-x)}{\sinh \beta l} \frac{I}{m_0} \quad (11)$$

短形の場合はかんたんに

$$\alpha = 0 \quad ; \quad \beta = k$$

より,

$$i = \frac{kI}{m_0} \cdot \frac{\cosh k(l-x)}{\sinh kl} \quad (12)$$

となる。³⁾ なお $\alpha^2 \ll k^2$ として考えると

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 + k^2} \approx k = \sqrt{j \frac{\omega \mu_0}{\rho}} = (1+j) r$$

$$r = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\rho}} = 2\pi \sqrt{\frac{sf}{\rho}} 10^{-9} = r_1 \sqrt{s}$$

$$r_1 = 2\pi \sqrt{\frac{f}{\rho}} \cdot 10^{-9}$$

f : 電源周波数 s : 誘導電動機の回轉子滑り

ρ : 導體の比抵抗 ($\Omega\text{-cm}$)

4. 誘導電動機の諸定數を用いた $\theta(x, t)$

(11) 式又は (12) 式より, $\bar{i}$ を i の共軛複素數とすると

$$q(x, t) = i \cdot \bar{i} \cdot \rho$$

となり, (8) 式より

$$Q_0(t) = \frac{1}{l} \int_0^l q(\xi, t) d\xi = \frac{I^2}{lm_0} R(s) \quad (13)$$

上式で I は時間 τ のときの回轉子導體電流であり, $R(s)$ は回轉子導體 1 cm 當りの實効抵抗であり,

$$R(s) \frac{\rho}{lm_0} r l \left\{ \frac{\sinh 2rl + \sin 2rl}{\cosh 2rl - \cos 2rl} - \frac{\alpha}{r} \left(\frac{3}{2} + \frac{\cos 2rl}{\cosh 2rl - \cos 2rl} \right) \right\}$$

短形のときは上式より

$$R(s) = \frac{\rho}{lm_0} rl \frac{\sinh 2rl + \sin 2rl}{\cosh 2rl - \cos 2rl}$$

(8)式の第2式より

$$Q_n(t) = \frac{2I^2}{lm_0} \left\{ R(s) \frac{1}{1 + \left(\frac{n\pi}{2rl}\right)^2} + \frac{\rho}{lm_0} rl \frac{2\sin 2rl - 3\frac{\alpha}{r} \left(\cos 2rl \mp e^{-2\alpha l}\right)}{\cosh 2rl - \cos 2rl} \times \frac{\left(\frac{n\pi}{2rl}\right)^2}{1 - \left(\frac{n\pi}{2rl}\right)^4} \right\}$$

括弧内の第2項は精密を要しないときは省略して

$$Q_n(t) = \frac{2I^2}{lm_0} R(s) \frac{1}{1 + \left(\frac{n\pi}{2rl}\right)^2} \quad (14)$$

(13)式, (14)式を(9)式に代入して

$$\theta(x, t) = \int_0^t \frac{I^2 R(s)}{clm_0} e^{-b^2(t-\tau)} d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} 2\cos \frac{n\tau}{l} x \int_0^t \frac{I^2 R(s)}{clm_0} e^{-\left\{b^2 + a^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)\right\}(t-\tau)} \frac{1}{1 + \left(\frac{n\pi}{2rl}\right)^2} d\tau \quad (15)$$

上式の積分を完了するためには $I^2 R(s)$ が τ の函数として表されねばならないがそれを以下の如く考える。今電動機の發生回轉力 T (kg-m), 負荷の反抗回轉力 T_l (kg-m) と損失 $I^2 R(s)$ (watt) の間に以下の關係が成立する。

加速回轉力の關係式

$$T - T_l = -\frac{GD^2}{4g} \left(\frac{2\pi}{60} n_s\right) \frac{ds}{d\tau} \quad (16)$$

出力の關係式

$$T \left(\frac{2\pi}{60} n_s\right) g = \frac{I^2 R(s)}{s} L \cdot Z \quad (17)$$

但し GD^2 : 回轉部分の慣性能率 (hg-m²)

n_s : 同期速度 (rpm)

Z : 回轉子導體數

L : 導體長 (cm)

更に電動機の回轉力は端絡環に流れる電流によつても發生するがこの長さは求められないが鐵心中の導體に發生した回轉力 T_E と鐵心外部の端絡環に發生した回轉力 T_L とに分けて考える。

今鐵心長を L_E (cm) とすると

$$\frac{I^2 R(s)}{clm_0} d\pi = -\frac{1}{2} g \frac{GD^2}{4g} \left(\frac{2\pi}{60} n_s\right) \frac{2sds}{1 + \frac{T_L - T_l}{T_E} \cdot Z \cdot L_E clm_0}$$

時間(t)と滑り(s)との関係は外部負荷の大きさによりきまり T , T_L 曲線が與えられると分子これを

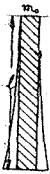
$$\tau = W(s), \quad t = W(s_0) \quad (18)$$

とし、又以下の如く定める。

$$\frac{1}{2} g \frac{GD^3}{4g} \left(\frac{2\tau}{60 n_s} \right)^2 = S \quad S: \text{全回転エネルギー (watt-sec)} \quad (19)$$

$$Z \cdot L_E \cdot c \cdot l \cdot m_0 = C \quad (20)$$

C は短形の場合は鉄心内導體の全熱度量 (watt-sec/°C) で對曲線形溝 (以下 exp 形と稱す) では溝の空隙巾を横とし、深さは縦とする短形導體の熱容量 (watt-sec/°C) である。



第 3 圖

(18), (19), (20) 式より $\theta(x, t)$ の最終結果が得られる。

$$\theta(x, t) = \frac{S}{C} \left\{ \int_{s=s_0}^{s=1} \frac{2se^{-b^2[w(s_0)-w(s)]}}{1 + \frac{T_L - T_i}{T_E}} ds + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{l} x \int_{s=s_0}^{s=1} \frac{4s^2 e^{-\left\{ b^2 + a^2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right\} [w(s_0) - w(s)]}}{\left(1 + \frac{T_L - T_i}{T_E} \right) \left\{ s + \left(\frac{n\pi}{2\gamma_1 l} \right)^2 \right\}} ds \right\} \quad (21)$$

上式において、 $s-t$ 及び $(T_E, T_L, T_i)-t$ の関係が與えられれば積分出来ないことはない。實際の場合は簡単な數式では與えられないし、又負荷反抗回転力 T_i は電動機の負荷状態で千差萬別なので實行可能な方法は $(T_E, T_L, T_i)-s$ 曲線が與えられたとき、それより $s-t$ 曲線を作圖し、これを用いて s を細分して Δs とし、數値積分をすると良い。 Δs としては通常この種のが問題となる場合は $s = 0.05$ をとれば十分であろう。起動時間の割と短かいものでは 0.1 でも十分でないかと考える。級數は十分正確を要するときは第 4 項目迄、通常は第 3 項で十分と思う。數値計算は式の複雑さに比して非常に簡單である。以下に一つの計算例を示す。

5. 計 算 例

8 極, 200kw, 750rpm, 50 $\sim$ の深溝籠形誘導電動機で短形形の場合その回転力特性曲線は第 4 圖の如くとし、導體寸法は第 5 圖で下記の如くとする。

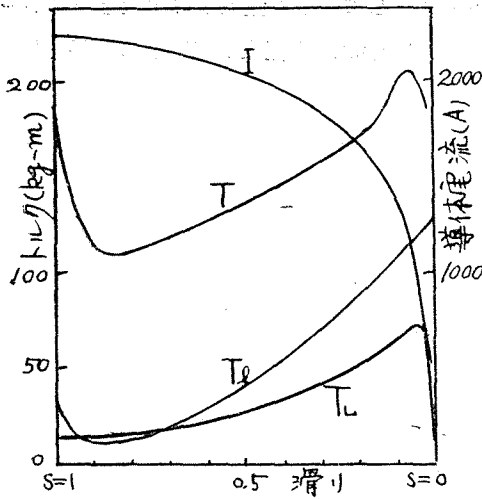
短形断面導體 $m_0 = 0.2\text{cm}$, $l = 5.45\text{cm}$

$S = 1875\text{kw-s}$, $C = 13.1\text{kw-s/°C}$ $S/C = 143^\circ\text{C}$

同定數, 定格状態で略同特性の exp 形導體で電流密度を短形形とひとしくすると導體寸法は

$m_0 = 0.2\text{cm}$, $l = 3\text{cm}$, $\alpha = 0.18$

$S = 1875\text{kw-s}$, $C = 7.15\text{km-s/°C}$, $S/C = 262^\circ\text{C}$



第 4 圖



第 5 圖

なお兩者共に

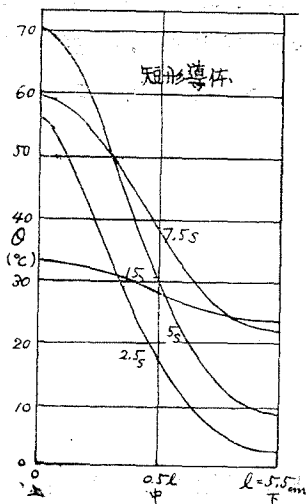
$$h = 0.08 \text{ w/cm}^2\text{C}, k = 3.6 \text{ w/cm}^2\text{C}, e = 3.52 \text{ w-s/cm}^3\text{C}$$

とする。

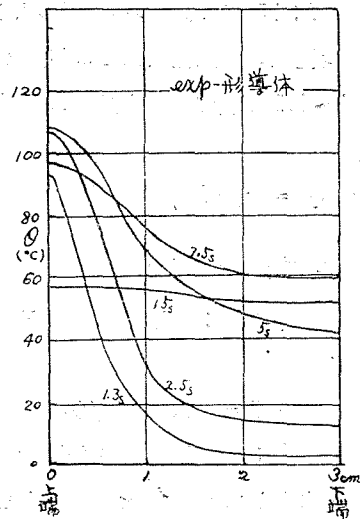
回轉力曲線より

$$(T - T_l) \Delta t = -\frac{GD^2}{4g} \left(\frac{2\pi}{60} n_s \right)^2 \Delta s$$

を用いての $s-t$ 曲線を得、それより $\Delta s = 0.1$ とし (21) 式を用い、級數を第 4 項迄採用するとして、短形導體は第 6 圖、exp 形は第 7 圖に、溝の上部、下部及び平均の溫度上昇の時間的經過は第 8 圖に示してある。なお級數の各項の大きさの比較を第 9 圖に示してある。第 8 圖によ

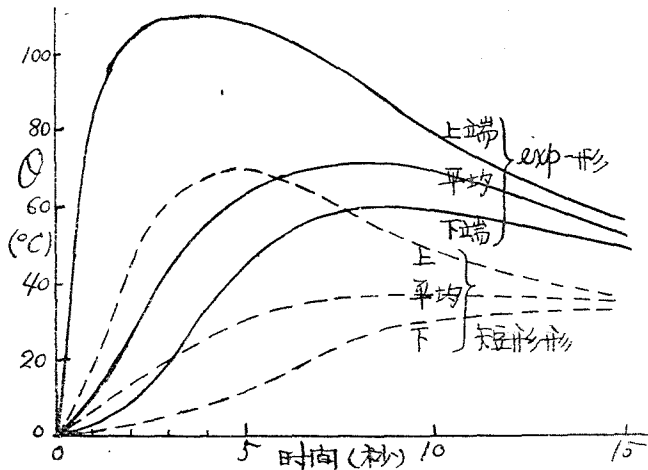


第 6 圖

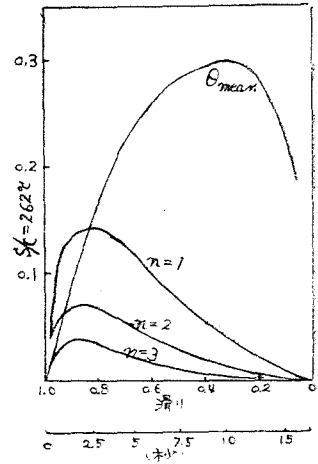


第 7 圖

ると同条件，同特性の場合で exp 形が短形形に比して著しく温度上昇が大きい事が分り，第 6 圖，第 7 圖を比較してみると導體上部では exp 形は最大温度が短形形より早く然も温度傾度が大に表れる傾向にあると推察される。



第 8 圖



第 9 圖

6. 結 言

以上深溝形導體の簡単な形について温度上昇を時間及び溝の深さ方向の函数としての近似解及び数値例をのべたが結論の以下の様である。

- i) 誤差を 5% 程度に押えるには級数の第 4 項位迄は計算する事を要する。
- ii) 温度上昇の目安に S/C を採用して良い。

S : 同期速度に於ける回転體の全回転エネルギー (kw-sec)

C : 回転導體の空隙面の巾と溝の深さとの短形導體と考えた全熱容量 (kw-sec/°C)

最大平均温度，最大温度はその何%に當るかは h の大いさで左右されるが，通常技術的に可能な 0.05~0.1 の値では極く是通の起動条件で後者で S/C の (20~40) %，後者で (40~60) % である。

- iii) $Q_r = m_0 \cdot l$ (第 3 圖参照)

$$Q_e = \frac{m_0}{2\alpha} (e^{2\alpha l} - 1)$$

Q_r, Q_e : 短形及び exp 形導體の断面積 (cm²)

とすると

$$S/C = (S/C') (Q_e/Q_r)$$

G' : 回転導體の全熱容量 (kw-s/°C)

上記関係よりして exp 形を用いるときは短形と略同一温度上昇に押えるには設計上の電流密度を短形のときの $\sqrt{Q_r/Q_e}$ に減少させねばならない。

iv) 深さ方向の溫度傾度が導體上部で exp 形の方が短形に比し大きいので端絡環の工作はより慎重を要する。

v) h の大きい事は短形より exp 形の方が更に望ましい。

vi) 溫度上昇が 100°C 以上にもなると假定 3 中の導體比抵抗一定と考えるのは無理であるがこれについては別に考える。

参 考 文 献

- 1) Y. Rossmäier: Archiv für Elek. 32Bd. 1938. S. 124.
- 2) 藤 田 : 東芝技報 和昭18年 22卷 p. 505
- 3) W. Schuiskey: Archiv für Elek 27Bd. 1933. I. S. 77.
- 4) 執 行 : 電氣機械設計論 第2卷 p. 337