HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	熱應力問題について
Author(s)	秦, 謹一
Citation	工學部研究報告, 8, 17-37
Issue Date	1953-09-10
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40429
Type	departmental bulletin paper
File Information	8_17-37.pdf



Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

熱應力問題について

秦　　謹一

(February 28, 1953)

On the Thermal Stress Problem

Kin-ichi HATA

Abstract

In this paper some remarks are stated concerning the usual mehtod to solve the thermal stress problem in the theory of elasticity of the first order, assuming the elastic material in question to be isotropic and homogeneous even in the stressed state.

The thermal stress problem is very different in many respects from the others in this theory and to the author's regret the theory regarding the thermal stress does not seem to be self-consistent. Especially the seemingly plausible requirement that thermal stress or eigen stress should be incompatible, *i. e.*, the strest of this kind should not satisfy the conditions of compatibility, perplexes the present author considerably, because, even if the eigen stress theory is legitimate, in the theory of elasticity the incompatible stress is utterly exceptional and is out of the question in other subjects than eigen or intial stress one and, furthermore, the incompatible stress in elastic stress state is not intelligible and may be said to be nothing but nebulous something, and, if we could furnish this with rational and realistic meaning, it would be done only in some approximation. The brief explanation of some assumptions upon which the usual theory concerned is based, and of certain inconsistencies contained in the results obtained by the theory, and of degree of accuracy pertaining to this method is given here modestly. A theory free from apparent defects is desirable but will not be obtained with ease, because of the complexity inherent in this problem.

目　　次

1. 緒　言
2. 熱應力問題の解法について
3. 溫度分布が定常的な平面變形の熱應力問題について
4. 溫度分布が階段分布的である場合について
5. 附　言
6. 結　語

§1. 緒 言

表面力や物體力即ち外荷重なしに，彈性體内に生じている應力である，固有應力或いは内部應力，時に初期應力或いは元應力ともいう，の一つである熱應力について考えるところを述べて見度いと思う。ここに考える理論は固有歪を受けない元の狀態における彈性常數は受歪後も變化を受けることなく，それは等方等質性に關しても同樣とし，微小變位理論とする。固有應力の場合には，無論有限變位理論の方が望ましいのであるが，熱應力はこれが現われる要因が現在的であり，又それが不均一な溫度分布であるという點において，他の固有應力とはかなり異つた性質のものであるが，彈性學の書によれば殆ど同一の解法により解き得るとされている。

次のことを强調したい，即ち普通の外荷重による彈性變形においては，變形は所謂彈性常數に攪亂を與えない，即ち一定範圍内では常數であるし，Hooke の法則は常に成立しているとする。しかして熱應力以外の固有應力は，溫度は一樣分布しているとはいえ，本質的に密度變化を生じている彈性體内に現われているのに拘らず，なお或る一定範圍内で等方等質，彈性常數に變化ないとする。しかしこれはかなり强い制約である。熱應力は溫度の不均一分布によつて生起されるものであり，溫度變化があれば必ず彈性諸常數は變化する。微小變位理論でこの變化を例の如く無視して，議論するのであるが，無論變化を考えることは困難なことであり，無視することは自然のように見えるが，この假定は理論上の無理や矛盾を引き起すものと考えられる。溫度の增加は當然それだけ彈性諸常數の減少を來たし，この減少を無視するよりは，それだけ適合方程式を容易に滿足せしめる，即ち不適合的な非彈性的な operation に對抗してそれだけ容易に全歪を適合的なものにし得る譯であり，或いは從來の理論を認めて，應力をして適合條件の强い制約をそれだけ容易に脫せしめて，不適合的なものにするといえるかも知れない。このようなことは普通の彈性問題でもあり，彈性體の境界，それは多重連結領域の場合をも含めて，及びその近傍における彈性諸常數は，内部におけるそれ等より減少しており，それだけ容易に苛酷な境界條件に應じ得られる筈である。この大きな假定によつてまず現熱應力理論は大きい溫度差が物體中にあるような場所への適用を拒げられている筈であり，爲に興味ある實用上への應用が困難となつている。因に熱應力理論は釣合方程式中の慣性項は一應無視してあり，溫度變化の小なる熱應力問題における慣性項の存在は無論意味少いとはいえ，それだけ利用價値を低くめている。彈性諸常數が溫度に依存しないという假定は，變形は，溫度が一樣に分布している場合，Hooke の法則に從うという假定に累加的であり，此等の假定と變形後も等方等質の假定と相い俟つて，後述するように，熱應力あるいは，固有應力は不適合的應力でなければならないという，筆者のいう處の不合理な結論を，引き出すのに一つの役割を果していると考えられる。つぎに Prof.[1] Love はその著書中熱應力，内部應力に關して述べる處は極めて少い，且つ初期應力と熱應力との關係にも言及していないようである。しかし固

有應力と變位間の關係の知識を要求することにつき述べておられる。一見固有應力問題において變位と應力即ち，變位と歪との關係式について，探究する要はないように見えるが，そうでもないわけである。

この關係式は Prof.[1] Love. もいわれる通り，一般的な理論か實驗によらなければ，得られないものであろうし，より一般的な理論とは如何なるものを指すか明示されていないが，巨視的な現象論的な理論のみならず，微視的な現論をも意味するものと思われる。つぎに固有應力を論ずる時，固有應力歪が最初より與えられる事はまずなく，如何にしてこれを求めるかが，普通の問題となる處であり，求められれば一應 Hooke の法則は假定してあるのだから應力は直ちに求められる。しかも微小變位理論によれば，Föppl の法則により，例外はあるが，外荷重による應力及び變位を，固有應力及びそれによる變位に，重疊することができる譯であるから，とにかく H.[2] Reissner のいう處の固有應力源が與えられて，固有應力，固有應力歪を求めることそれ自體が，まず問題になることになる。つぎに現在行われている熱應力問題の解法について批判しつつ述べて見る。

§2. 熱應力問題の解法について

熱應力問題については，最初は諸學者が種々論じたが，今日應用彈性學として，微小變位理論の範圍内で前述のような假定の下に，およそつぎのように解くことになつているようである。先づ直角座標で，下記の歪間の關係式が成立するものと考えられるとする。

$$\varepsilon_x' = \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x + \alpha T, \qquad \varepsilon_y' = \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y + \alpha T$$

$$\varepsilon_z' = \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z + \alpha T \qquad \cdots\cdots(1)$$

但し $\varepsilon_{x0} = \varepsilon_{y0} = \varepsilon_{z0} = \alpha T$, u, v, w は溫度變化が生じない時より起算した全變位成分，α は線膨脹係數，T は溫度變化，$T \equiv T(x.\ y.\ z)$, $\varepsilon_x' = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\varepsilon_y' = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\varepsilon_z' = \frac{\partial w}{\partial z}$ は 全直歪であり，この表式により，全直歪が全剪斷歪と共に適合條件を滿足すべきことを示している。而して熱應力源である膨脹歪は，αT のように線形であるとしている。且つ，膨脹による剪斷歪は

$$\gamma_{xy0} = \gamma_{yz0} = \gamma_{zx0} = 0 \qquad \cdots\cdots(2)$$

としている。αT は Prof.[3] Timoshenko もその著書に述べている通り，常數即ち一樣な溫度分布，あるいは座標 x, y, z の一次函數ならば，この膨脹歪は適合條件を滿足しているので，熱應力源となり得ない，適合條件を滿足しない時，即ち，不適合歪である時，熱應力を誘起し，その熱應力歪は不適合歪 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$, であり，この2つの不適合歪を重疊して，全歪即ち適合歪となるとする。依つてここに熱應力歪は不適合歪であり，熱應力は不適合應力でなければならないとしているのである。即ち，$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$, なる不適合歪に續いても矢張り，他の彈性問題と同樣下記の如き Hooke の法則を滿足するとする，

$$\sigma_x=\lambda e+2\mu\varepsilon_x,\quad \sigma_y=\lambda e+2\mu\varepsilon_y,\quad \sigma_z=\lambda e+2\mu\varepsilon_z \cdots\cdots (3)$$

$$\tau_{xy}=\mu\gamma_{xy},\quad \tau_{yz}=\mu\gamma_{yz},\quad \tau_{zx}=\mu\gamma_{zx} \cdots\cdots (4)$$

但しし e は $e=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$ なる dilatation.

λ, μ は Lamé の常數，γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx} は不適合熱應力剪斷歪。

今無應力無歪狀態より起算する全歪が，總て彈性的に生じていると假定する場合に，計算される應力や歪，dilatation に dash を附ければ，(2) により

$$\gamma'_{xy}=\gamma_{xy},\quad \gamma'_{yz}=\gamma_{yz},\quad \gamma_{zx}'=\gamma_{zx} \cdots\cdots (5)$$

が假定的に置け，且つ次式を得る。

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_x'=\lambda e'+2\mu\varepsilon_x',\quad \sigma_y'=\lambda e'+2\mu\varepsilon_y',\quad \sigma_y'=\lambda e'+2\mu\varepsilon_z'\\&\tau'_{xz}=\mu\gamma_{xy}',\quad \tau_{yz}'=\mu\gamma_{yz}',\quad \tau_{yx}'=\mu\gamma_{zx}',\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (6)$$

但し $e'=\varepsilon_x'+\varepsilon_y'+\varepsilon_z'$, $\lambda=\dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, ν は Poisson 比，E は Young 係數。

故に (1), (3), (6) 式より

$$\sigma_x=\sigma_x'-\frac{E\alpha}{1-2\nu}T,\quad \sigma_y=\sigma_y'-\frac{E\alpha}{1-2\nu}T,\quad \sigma_z=\sigma_z'-\frac{E\alpha}{1-2\nu}T, \cdots\cdots (7)$$

なる關係式を得る。

釣合式に關しては，この不適合熱應力に對しても，普通の式が成立すると考えることにする。

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0. \cdots\cdots (8)$$

(7) と (8) より $\dfrac{\partial\sigma_x'}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yx}'}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{zx}'}{\partial z}-\dfrac{E\alpha}{1-2\nu}\dfrac{\partial T}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial\tau_{xy}'}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_y'}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{yz}'}{\partial z}-\dfrac{E\alpha}{1-2\nu}\dfrac{\partial T}{\partial y}=0$,

$$\frac{\partial\tau_{zx}'}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}'}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z'}{\partial z}-\frac{E\alpha}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial z}=0 \cdots\cdots (9)$$

そして普通の境界條件式

$$\left.\begin{aligned}p_x&=\cos\alpha\cdot\sigma_x+\cos\beta\cdot\tau_{xy}+\cos\gamma\cdot\tau_{xy}\\p_y&=\cos\alpha\cdot\tau_{xy}+\cos\beta\cdot\sigma_y+\cos\gamma\cdot\tau_{yz}\\p_z&=\cos\alpha\cdot\tau_{xz}+\cos\beta\cdot\tau_{yz}+\cos\gamma\cdot\sigma_z\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (10)$$

は，一應表面力による外荷重はないものとして，$p_x=p_y=p_z=0$ と置いて，次のように變換される。

$$\left.\begin{aligned}&\cos\alpha\cdot\sigma_x'+\cos\beta\cdot\tau_{yx}+\cos\gamma\cdot\tau_{zx}=\frac{E\alpha}{1-2\nu}T\cdot\cos\alpha,\\&\cos\alpha\cdot\tau_{xy}'+\cos\beta\cdot\sigma_y'+\cos\gamma\cdot\tau_{zy}=\frac{E}{1-2\nu}T\cdot\cos\beta,\\&\cos\alpha\cdot\tau_{zx}'+\cos\beta\cdot\tau_{yz}'+\cos\gamma\cdot\sigma_z'=\frac{E\alpha}{1-2\nu}T\cdot\cos\gamma.\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (11)$$

故に，假想適合應力系 σ_x', σ_y', σ_z', τ_{xy}', τ_{yz}', τ_{zx}' を，單位體積に働く物體力或いは容積力

$$X=-\frac{E\alpha}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial x},\quad Y=-\frac{E\alpha}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial y},\quad Z=-\frac{E\alpha}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial z}\quad\cdots\cdots(12)$$

及び考えている彈性體の全表面に垂直な引張り表面力

$$P=\frac{E\alpha}{1-2\nu}T\quad\cdots\cdots(13)$$

なる假想外荷重を考えて普通の彈性問題に倣つて解けばよいと主張する。その場合應力より解けば，必ず適合條件が必要であるが，歪であらわしてある適合方程式ならば普通のものをそのまま使用し，熱應力が不適合，假想應力系が適合として，(12) 式の容積力ある場合の例えば Prof.[4] Timoshenko の著書所載の適合條件式

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\sigma_x'+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta'}{\partial x^2}=-\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)-2\frac{\partial X}{\partial x},\\&\nabla^2\Theta'=-\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right),\\&\nabla^2\tau_{xy}'+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta'}{\partial x\partial y}=-\left(\frac{\partial X}{(\partial y)}+\frac{\partial Y}{\partial x}\right),\quad\Theta'=\sigma_x'+\sigma_y'+\sigma_z',\\&\nabla^2=\frac{\partial}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial z^2}\text{は Laplacian,}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(14)$$

の如き式を使用する。普通の彈性問題において，釣合式と常に一體である筈の適合條件，例えば

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\sigma_x+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}=0,\quad\nabla^2\tau_{xy}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial y}=0,\\&\Theta=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z,\quad\nabla^2\Theta=0,\ \text{を(5)及び(7)の變換式}\end{aligned}\right.$$

により變換し，それを (12) 式で變形して，得られる次のような條件式

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\tau_{xy}'+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta'}{\partial x\partial y}=-\frac{3}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial x}\right),\\&\nabla^2\sigma_x'+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Theta'=-\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)-\frac{3}{(1+\nu)}\frac{1}{\partial x}X,\\&\nabla^2\Theta'=-3\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right),\quad\Theta'=\sigma_x'+\sigma_y'+\sigma_z',\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(15)$$

(これは，(14) 式と，$\nu=\frac{1}{2}$ の時一致する)，

をこの場合に使用しても，それは當然熱應力は不適合の條件に反し，その形は極めて似ているが，何等もつともらしい結果を得ることはできない。

しかして非彈性的な歪を含む問題が，完全に彈性學的な問題に變換されていると主張しているのである。次に變位より出發する解法も全く上記のものと同じであるが，變換という形式が唯明瞭でないだけである。

應力は(3)，(4)，式より求める。(1)式より $\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}-\alpha T$ のように現わして，σ_x 等の應力を全變位で書き，(5)式より $\tau_{xy}'=\tau_{xy}'\ \gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}$ 等を利用して，(8)式の釣合式より

$$\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e'}{\partial x} - 2\frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)}\alpha\frac{\partial T}{\partial x}=0, \quad \text{或いは } \mu=\frac{E}{2(1+\nu)} \text{ により}$$

$$\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e'}{\partial x} - \frac{E\alpha}{(1\text{-}2\mu)\mu}\frac{\partial T}{\partial x}=0. \quad \text{のようになり,} \tag{16}$$

(12)の容積力 X, Y, Z がある場合の普通の變位であらわした釣合式

$$\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial x} + \frac{X}{\mu}=0. \tag{17}$$

と比較して全く同一の解法なることが知れる。故に應力であらわした境界條件式は(11)式と同じである。無論變位より解けば，特に適合條件式を考慮することは不要であるが，單に機械的に計算を，進めることができても解法の意味は，應力より出發する解法の意味と全く同じであることを，念頭に置くべきものと思う。このようにして微小變位の熱應力問題は，解けていると主張しているのであり，前述のように他の固有應力の問題も全く類似に解けると述べられている書もある。

次に以上の解法について少しく附言したい。凡そ一般の彈性學的問題においては，彈性的に生じた歪は適合條件を滿足するという原則に從つているのに，熱應力，固有應力の彈性學的理論においてのみ，唯一の例外としてこれ等固有應力による歪は不適合，即ち固有應力も固有應力歪も適合條件は滿足しないとする。それならば兩者は如何なる條件を滿足すべきかは，不問に附してあるのである。Saint Venant の適合條件に代るべき條件は人によれば不明であるといい，又，人によれば無くても宜しいという。若し固有應力理論が正しく，代るべき條件が見出されたとしても，それは固有應力源によるものであろうし，いずれにしても困難な問題であろう。後者の言葉は不合理であろう。適合とは確定的であり，不適合とは不確定な條件で，兩者は同一の重味の言葉でない。一度び不適合であるとすれば，次のような關係式は使用できない。

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x},\ \varepsilon_y = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y},\ \varepsilon_z = \frac{\partial \bar{w}}{\partial z},\ \gamma_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}, \\ &\gamma_{yz} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z},\ \gamma_{xz} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x},\ (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \text{は熱應力} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

のみによる變位とする)。

不適合歪 ε_x……, γ_{xy}, ……, とこの $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, との關係式が，前述の一般的な理論或いは實驗によらなければ得られないものであり，この關係式より $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, を消去したものが，適合條件に代るものである。しかしそれも(1)のような表式が一應正しいと考えられた上でのものである。それについて(5)の假定，即ち全變位により，普通の表式により現わされる剪斷歪は不適合熱應力剪斷歪に等しい，式で書いて $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy}'$, のようになる假定は γ_{xy} の方が

$\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, に如何に關係しているかは前述の通り不明であり，それは熱膨脹が等方等質中の各點或いは各 element を，溫度變化に應じて等方的に膨脹せしめるものであるから，そ

れ自身による變位は，剪斷歪に關しないとすることは，一先ず理工學的に認め得るところであるが，彈性學的に證明できず，遺憾ながら合理的ではあろうが(2)式と共に假定に止ると考えられる。

(2)式及び(5)式は，そのように置かなくても，計算中にそれが現われ，唯計算の簡易化上最初よりそのように置く場合とは異る。更には先に述べたように近似的なものであり，兎角(1)の表式は不滿足であり，(5)の式すら彈性學上適當でもない以上緒言に述べたこと等も考え併せ first order の彈性論として首尾一貫して，熱應力等の問題においても，いやしくも彈性的に生じている熱應力や歪は適合的であるように理論が構成されることが望ましいと考えられるが，それは極めて困難な問題であろうし，又(1)式のような重疊的な式は採用し得ないようなことになるかも知れない。

次に(8)の釣合式も，一應成立を假定しているものであり，固有應力問題でこの不適合固有應力が，容積力のない場合の釣合式を滿足するとしてよいかは疑問である。場合によつては正しいこともあるであろう，しかしこの釣合式を改變することは容易でない。いずれにしても熱應力解法が，全面的に納得できるものではないことは明かなことと考えられる。特に不適合熱應力とそれに關連する不適合熱應力歪及びそれ等が普通の Hooke の法則により結ばれていることが難點のように思われる。固有應力が非彈性的な原因によつても生ずることは確かであるが，不適合的な歪により彈性的に誘起される歪も不適合でそれが固有應力と普通の Hooke の法則により關係づけられて，固有應力も不適合であり，不適合であるとはいいながら如何なる條件式を滿足するかを示すこともできないというのは，われわれに許される數學的手段の不足と解析の不備によるものであり，解法は便宜的なものと考えられるかも知れないが，問題それ自身が純彈性學的なものといえないことは事實であろう。彈性變形にとどまる以上，全歪が不適合的とすることは到底できないので，理論構成上の欠陥をば，性格不明の不適合熱應力及び不適合熱應力歪の方に，持つていつつていると考えられる。しかし固有應力問題を容積力を受ける彈性體の問題の解法に類似をとつて，解きたいと考えるのは自然のことであろう。

次に平圓板の熱應力解について少しく述べて見度い。鵜戸口博士[5]が多くの書に記されている解の誤謬を指摘され，正解を示された。上述の解法による，圓形薄板の軸對稱溫度分布 $T(r)$ に對する熱應力問題の解は，座標を普通のように取つて下記の如くになる。

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= -E\alpha\frac{1}{r^2}\int_0^r rT\,dr+A+\frac{B}{r^2},\\ \sigma_\theta &= E\alpha\left(\frac{1}{r^2}\int_0^r rT\,dr-T\right)+A-\frac{B}{r^2},\\ \sigma_z &= 0,\quad \tau_{r\theta}=0,\quad T(r)\equiv T\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (19)$$

よく普通の書に $\int_0^r$ の如く下限をいれてあるが，これは不要であることは，解の型及び解の導出を見れば明かである。この解を導くのに當つては，釣合式(8)をとり，變形加速度による慣性項を省いてあるが，別段溫度分布 $T(r)$ に特別な制限を課していない。中央に穴のない圓

板ならば，(19)の式中 B を有する項を省くことになるが，穴のある場合，$T(r)$ を $\theta_0 r^n$ 或いは $\theta_0 r^{-n}$ (但し n は正整數，θ_0 は常數) としても常識に反しないもつともらしい解が得られる。穴のない場合は $T=\theta_0 r^{-n}$ のように負巾の時，圓板の半徑 a 周邊は自由として，$n=3$ で

$$\sigma_r = E\alpha\theta_0\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{a^3}\right),\quad \sigma_\theta = E\alpha\theta_0\left(\frac{-2}{r^3}-\frac{1}{a^3}\right) \cdots\cdots (20)$$

となり，σ_r は全圓板中引張り應力，σ_θ は壓縮應力となる。この場合，常識に合致する解は，全圓板中 σ_r は壓縮應力，σ_θ は中央附近壓縮，周邊附近で引張應力となつていると考えられる。この根據は，後に例を示すようなものによる。兎角甚だ常識に反する解を得る。勿論この場合圓板の中心は，溫度分布の特異點であり，應力は中心で正或いは負の無限大となり，元來大なる溫度變化が存在する場合は，理論の假定に反するのであるから，中心近傍の部分はこの理論の適用範圍外であり，故に變位か應力が有限になるように，數學的操作を施すべきであるという人もあろうが，策の施しようはない。しかし成程中心附近は，常識に反する解になろうとも中心より充分離れたところではもつともらしい解になつていることが，理論が正しければ，期待されてよい筈であるが，全くこれに反する譯である。故に熱應力計算中溫度分布に負巾の項を含む時は，解法の妥當性に關することは別として，又負巾の分布に近い項を含む場合も，餘程注意を要することと思われる。

しかし中心で無限大になる溫度分布といつても，例えば $T\equiv T(r)=\theta_0(\log a-\log r)$ なる溫度分布を取れば，これは平面調和であつて，定常溫度分布を現わしている。後述するように平面熱應力問題において，$T(x.y)$ が調和函數であるとき，$\alpha T(x.y)$ なる歪は ($\varepsilon_{x0}=\varepsilon_{y0}=\alpha T$, $\gamma_{xy}=0$) であり，熱應力源である膨脹歪は適合歪であり，全歪の適合條件より，熱應力歪も適合歪となり，當然熱應力は存在しないことになるが，(19)の解は溫度合布 T に何等の制限を課していないので，

$T=\theta_0(\log a-\log r)$ を(19)式に代入すれば，

$$\sigma_r = \frac{E\theta_0\alpha}{2}(\log r-\log a),\quad \sigma_\theta = \frac{E\theta_0\alpha}{2}[\log r-\log a+1] \cdots\cdots (21)$$

となり，圓板の中心で應力は $-\infty$ になり意味を失ふが，σ_r は全板を通じて壓縮應力，σ_θ は中心附近で壓縮，周邊附近で引張り應力となり，彈性學的常識に合致する解が中心で溫度無限大なるに拘らず得られるが，上述のとおり熱應力は零である筈なのに，このような解が存在するということになる。

次にこの(19)の解に依れば，上の例の溫度分布で，中心で溫度無限大の欠點を除いた半徑 b の穴のある場合でも，熱應力は存在し，その結果は下記のようになる。

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E\alpha\theta_0}{2}\left\{\log\frac{r}{a}+\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}\log\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{a^2}\right)\right\}\\ \sigma_\theta &= \frac{E\alpha\theta_0}{2}\left\{1+\log\frac{r}{a}-\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}\log\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{r^2}\right)\right\}.\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (22)$$

このように適合的な熱應力源で熱應力は存在していることが示されている。而して(19)の解は一般に正確として認められて居るものである。

平面歪熱應力問題については，多くを語るを要しないと思う。Prof.[6] Timoshenko の著書にある平面歪熱應力解は，訂正を要しないと見られている。例題も多く書かれている。平面應力問題とは，熱應力 σ_z と z 方向一様歪 ε_z' に關するところが異るだけで，ε_z' は軸對稱問題で應力 σ_r，σ_θ 中に這入らず，ε_z' は斷面上の σ_z の合力零の條件で一應決定するだけで，前例の定常溫度分布による適合熱應力源で，矢張と熱應力が存在することを，中空圓壔の場合に付いて例示されている。

解法の何如んにより，異る解が得られるということは不合理と云えよう。そのことにつきもう少し述べて見度い。

§3. 溫度分布が定常的な平面變形の熱應力問題について

普通の平面變形問題の解法に含まれる近似度に於いて，問題を論ずることは當然である。直角座標 (x, y, z) により，次のように進むことが出來る[7]。(1)と(5)より

$$\varepsilon_x' = \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x + \alpha T, \quad \varepsilon_y' = \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y + \alpha T, \quad \gamma_{xy}' = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy} \cdots\cdots (23)$$

これ等より變位 u, v を消去するか，或いは適合條件式

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y'}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}'}{\partial x \partial y} = 0 \cdots\cdots (24)$$

を使用すれば，

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = -\alpha \nabla_1^2 T = 0 \cdots\cdots (24')$$

但し $\nabla_1^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$，定常溫度分布である故，$T \equiv T(x.y)$ は平面調和函數で，$\nabla_1^2 T = 0$。

平面歪熱應力問題ならば，

$$C(\text{const.}) = \varepsilon_z' = \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z + \alpha T = \frac{1}{E}\left\{ \sigma_z' - \nu(\sigma_x + \sigma_y') \right\} \cdots\cdots (23')$$

と(7)の變換式が必要なだけである。故に解法は，全く同じである。他の適合條件は後述するが，普通は上の式だけで行う。即ち，それが平面變形の近似である。

それで平面熱應力に關して云えば，ε_x, ε_y, γ_{xy} は適合歪と云える。又，熱應力源である熱膨脹歪 $\varepsilon_{x0} = \varepsilon_y^0 = \alpha T$, $\gamma_{xy}^0 = 0$ は瞭かに適合條件を滿足している。而して(11)式に就いて述べた時，熱應力歪は不適合でなければならないとしていることは，再三說いておいた。

次に釣合方程式を滿足するように，應力函數 F が存在し得るとして次のように置く，

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = \frac{-\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdots\cdots (25)$$

Hooke の法則により，

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_y),\quad \varepsilon_y=\frac{1}{E}(\sigma_y-\nu\sigma_x),\quad \gamma_{xy}=\frac{1}{\mu}\tau_{xy},\quad \frac{1}{\mu}=\frac{2(1+\nu)}{E}\cdots\cdots(26)$$

(24′), (25), (26)式より

$$\nabla_1^2\cdot\nabla_1^2F=\frac{\partial^4F}{\partial x^2}+\frac{\partial^4F}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}=0\cdots\cdots(27)$$

故に普通の容積力のない平面變形問題のようにFは平面重調和函數である。因つて境界條件と(25)と(27)だけで解けばよいことになるが，既に式中 a, E, と $T(x.y)$ が消失しており，これで意味のある解る得る望みが，無くなつていることになる。

例として穴のある薄圓板の軸對稱問題を考える。調和函數である $T(r)$ は，$A+B\log r$ の形であるが，その形は現在不要である。

外半徑 a，內半徑 b，$\nabla_1^2\nabla_1^2F=0$ の一般解は，$F=E_0+E_0'r^2+F_0\log r+F_0'r^2\log r$，とおき得る。

(25)式は次のようになる。

$$\sigma_r=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)F,\ \sigma_\theta=\frac{\partial^2F}{\partial r^2},\ \tau_{r\theta}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)F.$$

次にFの一般表式中 $F_0'r^2\log r$ の項をば，完全圓環における變位は θ に關する一價性を要求されて，そのために取り去る($F_0'=0$)。故に應力として

$$\sigma_r=2E_0'+F_0\frac{1}{r^2},\quad \sigma_\theta=2E_0'-F_0\frac{1}{r^2},\quad \tau_{r\theta}=0$$

($\sigma_r=0$ $r=a$, $r=b$) の條件より $E^{0\prime}=F_0=0$

故に $\sigma_r=\sigma_\theta=0$ で熱應力は生じていないことになる。又一歩讓つて，熱應力問題に關する限り，變位の一價性の要求は必要でなく，Volterra[8)9)] の意味での dislocation を考えるべきであるとして，$F_0'\neq0$ としても意味のある解は出て來ず，應力は生じていないとする以外道はない。

而も多重連結領域に關する，Volterra の dislocation による應力は，熱應力に關しては意味のないものであることは明かなことと思う。dislocation に就いてはここに述べる積りはない。これに關聯する固有應力論は，その方面の文獻を讀まれたし，但しそれは兎角(1)の表式を認める意味においてであると思う。

充實圓板の場合は，軸對稱問題で，板中到るところ有限な溫度分布中定常的なものは常數しかなく，中心における難點を無視して $\log r$ 項を入れてもよいが，圓環の場合と同樣應力は零になる。

依つて適合的な熱應力源であるから，熱應力は存在しないとなつて，そのことに關する限り，理論の最初より矛盾はないのであるが，前節の終に述べた通り，中心に圓孔を有する平面板即ち圓環で，定常溫度分布がある時，從來正解であると云われている(22)のような熱應力が生じているのである。これは些か看過し得ない點である。因に次のことを指摘して置きたい。

(19)の解を導出する際に使用した適合條件はよく使われる次式である。

$$\varepsilon_\theta' - \varepsilon_r' + r\frac{d\varepsilon_\theta'}{dr} = 0$$

dash は前述のとおり全歪を表わすために附した。又，(24)の適合條件式は，軸對稱問題の條件で，極座標に變換すれば，

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\varepsilon_\theta' - \varepsilon_r' + r\frac{d\varepsilon_\theta'}{dr}\right) = 0 \qquad \text{となる。}$$

成程兩條件は數學的には異るが，彈性學的には等價であり，熱應力理論が first order の彈性論として正しければ，且つ兩解法による解析の仕方が正しければ，當然同一結果が期待されなければならない。これは正に解の一義性に關連する問題といつてよいであろう。

次に平面變形問題に於いて，單連結的や重連結的であるとを問わず，定常溫度分布の場合熱應力は存在しないのであろうか。

普通の彈性問題においては，二次元彈性問題で平面歪解は，彈性常數の置換により平面應力解から容易に得られることになつて居り，熱應力の平面歪解は上例において σ_r と σ_θ は零になるが，σ_z は普通の彈性問題で常數即ち零と取り得るが，この場合(23′)と(7)に類似な式より，

$\sigma_z = EC - E\alpha T$，$C$ の常數を $2\pi\int_b^a \sigma_z r\,dr = 0$，の條件で決定する。即ち $\sigma_r = \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$，で σ_z だけ存在するということになる。

併しこのような次第であるから，一應この解法による熱應力は存在しないということにしておく。兎角普通の彈性問題でないことは，これによつても明かであるが。斯くして(19)の解のように，最初より極座標で解く場合と，一度直角座標で進み，そこで $\nabla_1^2 T(x.y) = 0$ の條件をいれて，それから極座標に移る解法とで異る結果を得ることになつたわけであるが，(19)の解より，進む方は兎角 $\nabla_1^2 T = 0$ の條件は何處にも使用していない譯で唯 T の形が $\nabla_1^2 T = 0$ になつているのみであり，而も(19)の解は確に $T(x.y)$ に何等の制限を課することなしに得られているから別に不合理なことはないように見えるのである。

兩解法とも應力函數，或いはこれに類似なものを使用しており，應力函數の存在の何如を問うことも出來ないのである。而して既に述べて來たことにより，兩解とも全面的には認め難いものであるが，二次元熱應力問題に於いて，定常溫度分布の場合，(19)に依る解と，これに相當する平面歪解のように，一先づ熱應力が生ずるとすることが妥當と考えられ，生じないと主張される方も居るが，それは極めて理工學的常識にも反し，又平面歪の場合の事實にも反することと思われる。

又，平面調和函數は，それで或る一般の函數を展開することは出來ないとは云え，それにより充分複雜な函數を作製出來，これによつて表わされる溫度分布によつて，二次元問題において熱應力が生じないとすることは，その溫度分布の實現の實際的な方法は暫く措き，常識に

反することを容易に理解することが出來ると思う。

二次元應力問題の近似で，上記兩解法による異る結果が出るのであるが，兩解法は普通のもので，特に責めらるべき點もないと思われるが，次のことを指摘したい。二次元問題は三次元問題より，非實際的な處が多いのは已むを得ない。

$\nabla_1^2 T(x.y)=0$ で實は，$\varepsilon_{x0}=\varepsilon_{y0}=\varepsilon_{z0}=\alpha T(x,y)$, $\gamma_{xy0}=\gamma_{yz0}=\gamma_{zz0}=0$ であり，6つの適合條件中次の3つの型を滿足していない。

$$\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z},\quad \frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xz}}{\partial x\partial z},$$

$$2\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right).$$

二次元問題の近似として，この位の事は無視して差閊えないことは無論であるが，板が例えば厚くなれば，熱應力は當然生ずることを示していると云つてよかろう。併しこれは上述の不合理を減ずるものでもないと思う。次に意義の多い階段的溫度分布に就いて述べる。

§4. 溫度分布が階段的である場合について

矢張り二次元問題で議論する。溫度分布函數 $T(x,y)$ が二次元的 step function, 即ち，階段函數である場合は，何も上記解法（§2に述べた）に倚らなくとも普通の彈性問題として解ける。人によれば階段分布等存在しないと云うが，理想化して考えることは，別に支障ないことであり，又彈性體が無歪，無應力狀態より一樣な溫度變化を受ける時，物體それ自身が階段函數的に變化する線膨脹係數を有して居れば，Eは常數として，既述の議論において，α と Tの役割が交換されるだけであり，この後者の場合は，充分考えられることであるから，非難される余地もないことと思う。この場合について例えば Prof.[10]Mindlin の論文がある。それで溫度分布が，跳躍的變化を行う點は別として，他の部分では熱應力源たる膨脹歪は，一樣で常數的であるから，それは又當然適合條件を滿足して，適合的であり，それの不連續點は無論溫度分布の階段的變化の點であるが，近似的にはその溫度分布は，角を少しく丸めてあると考えれば，難點は逃れ得るであろうから，適合的な熱應力源が，熱應力を生ぜしめると云えるだろう。因に階段的溫度分布は $\nabla_1^3 f=0$ を一應滿足して定常的であると云い得るかも知れない。勿論後述するように初等的に解いて，熱應力が存在しているのである。無論通常の彈性論に依つて解ける以上，應力は適合應力であり，先に述べた不適合熱應力の難點は存在しない。又階段溫度分布の場合は§2に述べた從來の一般解法でも，筆者の云うところの適合，不適合という難點が消失していて，又軸對稱の問題のように最初から剪斷歪がないことが分明である時は，正しい解が出るであろうことは，容易に豫想出來るところである。先づ§2で圓板の問題で，常識に合致する傾向と云つたものを，ここで簡單に示すことにする，極めて初等的ではあるが。

半徑 a の薄圓板，外側に高溫部のある場合，溫度分布は

$$T(r)=0,\quad 0\leqq r<\frac{a}{2},\quad T(r)=\theta_0,\quad \frac{a}{2}<r\leqq a,\quad \theta_0\text{は常數}$$

Hooke の法則より

$$\sigma_\theta=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta+\nu\varepsilon_r),\quad \sigma_r=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r+\nu\varepsilon_\theta),$$

釣合式 $\frac{\partial\sigma_2}{\partial r}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0,\quad \varepsilon_r=\frac{du}{dr},\quad \varepsilon_\theta=\frac{u}{r},$

これ等より $\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru)\right)=0,\quad$ 故に $u=Ar+\frac{B}{r},$

$$\sigma_r=\frac{E}{(1-\nu^2)}\left\{(1+\nu)A+(\nu-1)\frac{B}{r^2}\right\},\quad \sigma_\theta=\frac{E}{(1-\nu^2)}\left\{(1+\nu)A+(1-\nu)\frac{B}{r^2}\right\},$$

$\tau_{r\theta}=0$, それで $r=\frac{a}{2}$ における引張應力を P とすれば $0\leqq r<\frac{a}{2}$ の部分で

$\sigma_r=\sigma_\theta=P,\quad \varepsilon_r=\frac{1}{E}(\sigma_r-\nu\sigma_\theta)=\frac{1}{E}P(1-\nu)$, よつて $r=\frac{a}{2}$ における變位の連續を考慮して,

$$\int_0^{a/2}\varepsilon_r\,dr=\frac{a}{2}\frac{P}{E}(1-\nu)=\int_0^{a/2}a\theta_0\,dr+\left(Ar+\frac{B}{r}\right)\Big|_{r=\frac{a}{2}}.$$

半徑方向變位 v は元來零である。

次に $(\sigma_r=0, r=a)$ と $(\sigma_r=P, r=a/2)$ の條件より, 上の $r=a/2$ における變位の連續の條件も共に使用して, A, B, P を求める。

內方部で $\sigma_r=\sigma_\theta=P=3/8\cdot E\alpha\theta_0,$

外方部で $\sigma_r=\frac{E\alpha\theta_0}{8}\left(\frac{a^2}{r^2}-1\right),\quad \sigma_\theta=\frac{-E\alpha\theta_0}{8}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right).$

これで傾向は明かに分る。

同樣にして內部の方に高溫部のある次のような溫度分布の場合は,

$$T(r)=\theta_0,\quad 0\leqq r<a/2,\quad T(r)=0,\quad a/2<r\leqq a_0,$$

內方部で $\sigma_r=\sigma_\theta=-3/8\,E\alpha\theta.$ で壓縮

外方部で $\sigma_r=\frac{E\alpha\theta_0}{8}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right),\quad \sigma_\theta=\frac{E\alpha\theta_0}{8}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right),$

σ_r は壓縮, σ_θ は引張り應力となる。

上記の例のように, 適合熱應力が得られるが, 溫度分布が第1種不連續を有するため, 階段的變化のところで應力, 歪が階段的變化するものもあるのは已むを得ないことである。併し σ_θ の方は不連續で一應容認出來る。σ_r や $\tau_{r\theta}$ の方の不連續は迷惑であるが。前記の Prof.[10] Mindlin の論文中でも境界條件として σ_n の連續は棄てある。

次に (19) の解が, 軸對稱の階段的溫度分布の場合に, 初等的上記の解法により得られる解と全く一致し, その解も遙かに迅速に得られるものであることを例示する。初等的解法は階數が增すと, 方程式を解くことが厄介になる。

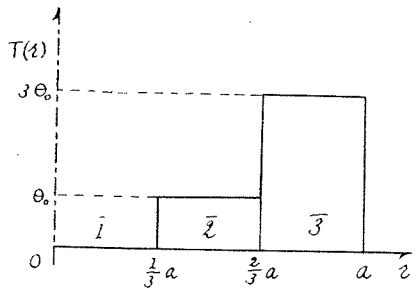


Fig. 1 軸対称温度分布

$r=a$ の圓板で，溫度分布は Fig. 1 に示すようなもの。

$r=a/3$ と $r=2/3\ a$ 點で働いている引張應力を p_1, p_2, とする。これ等を $-E/(1-\nu^2)$ で除したものを p_1', p_2', として，前述の解法に準じて，次の方程式を得る。

$$\frac{-h}{(1+\nu)}p_1'=A_2h+B_2\frac{1}{h}+a\theta_0h,$$

$$a(3\theta_0-\theta_0)2h=2hA_2+B_2\frac{1}{2h}-2hA_3-B_3\frac{1}{2h},$$

$$\left.\begin{aligned}0&=p_1'+(1+\nu)A_2+\frac{(\nu-1)}{h^2}B^2\\0&=p_1'+(1+\nu)A_2+\frac{(\nu-1)}{4h^2}B_2\end{aligned}\right\}$$

$$0=(1+\nu)A_3+\frac{(\nu-1)}{9h^2}B_3,\qquad 0=p_2'+(1+\nu)A_3+\frac{(\nu-1)}{4h^2}B_3.$$

但し A_2, B_2, は區間 2 に，A_3, B_3 は區間 3 に關する係數である。これを解いて，

$$A_2=\frac{a\theta_0}{2}(1-\nu),\quad B_2=-\frac{a\theta^0}{2}(1+\nu)h^2,$$

$$A_3=\frac{-(1-\nu)}{2}a\theta_0,\quad B_3=-\frac{9}{2}(1+\nu)a\theta_0h^3.$$

これ等の係數を應力の表式中にいれて，

2 區間で，

$$\sigma_r=Ea\theta_0\left(\frac{1}{2}+\frac{a^2}{18}\cdot\frac{1}{r^2}\right),\quad \sigma_\theta=Ea\theta_0\left(\frac{1}{2}-\frac{a^2}{18}\cdot\frac{1}{r^2}\right)$$

故に $r=\frac{a}{3}$ で，$\sigma_r=Ea\theta_0$，それ故 $\sigma_r=\sigma_\theta=Ea\theta_0$ は 1 區間での σ_r と σ_θ である。

3 區間で，

$$\sigma_r=\frac{Ea\theta_0}{2}\left(\frac{a^2}{r^2}-1\right),\quad \sigma_\theta=-\frac{Ea\theta_0}{2}\left(\frac{a^2}{r^2}+1\right)$$

次に (19) の解によれば，矢張り周邊自由の條件で，積分記號中の下限を 1 區間中に置いて，Aの決定式を定める。

$T(r)\equiv T$ として，

$$-Ea\frac{1}{a^2}\left(\int_{\frac{2}{3}a}^{a}T\cdot r\,dr+\int_{\frac{1}{3}a}^{\frac{2}{3}a}T\cdot r\,dr+\int_{0}^{\frac{1}{3}a}T\cdot r\,dr\right)_{r=a}+A=0.$$

$\therefore A=Ea\theta_0$ そして應力は直に (19) の結果により積分の下限は矢張り零として得られ上記の初等解と一致することが分る。兎角これを見ても，(19) の解は，溫度分布が階段的である場

合は，正確な解であることは確實であり，又この場合には，(1)式の $\varepsilon_r' = \varepsilon_r + \alpha T$ の表式も一應妥當と考えてよいであろう。

次に與えられた一般の溫度分布を，それに近い階段分布に變形して，これを熱應力の理論に依らないで解き，序でこれを極限移行して，溫度は元の分布にするようにした際の，解の形を見ることにする。

矢張り薄圓板で，軸對稱一般溫度分布とする。半徑を等分して，Fig. 2 のように階段分布に變形する。

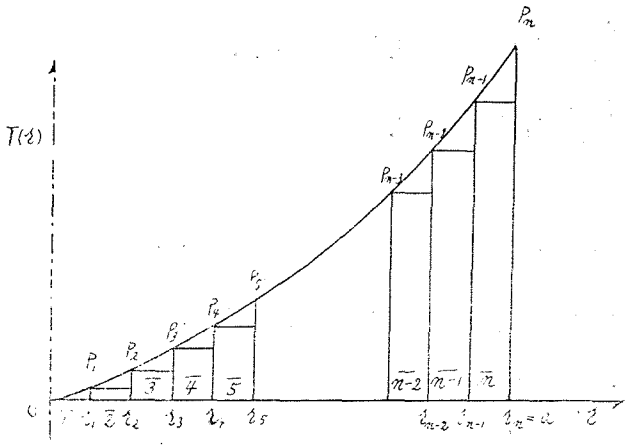


Fig. 2 軸対称溫度分布

$r_n = a$, $h = \dfrac{a}{n}$, $r_s = \dfrac{a}{n} \cdot s = h \cdot s$ は中心の圓より數えて第s番目の環の外側半徑。

p_s は $\overline{s}$ 環と $\overline{s+1}$ 環の境界に働く引張應力。軸對稱問題として，剪斷應力は無い故 P_s のみとした。各環即ち各區間內の應力は，初等的に前述のようにして求め得る。各區間內の應力の表式中の常數 A と B に，その區間の番號を suffix として附け，周邊自由の條件で，各區間の間の境界において，變位は連續しているとして，次のような方程式系を得る。與えられた溫度分布を $T(r)$ とする。

$\overline{2}$ 區間に對して

$$\frac{h}{E}(1-\nu)p_1 = A_2 h + \frac{B_2}{h} + \alpha h T(h),$$

$$p_1 = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left\{ A_2 (1+\nu) + B_2 (\nu-1)\frac{1}{h^2}\right\},$$

$$p_2 = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left\{ A_2 (1+\nu) + B_2 (\nu-1)\frac{1}{(2h)^2}\right\}.$$

$\overline{3}$ 區間に對して，

$$2h\,\alpha T(h)+2h\,A_2+\frac{1}{2h}B_2=2h\,A_3+\frac{1}{2h}B_3+2h\,\alpha T(2h),$$

$$p_2=\frac{E}{(1-\nu^2)}\left\{A_3(1+\nu)+B_3(\nu-1)\frac{1}{(2h)^2}\right\},$$

$$p_3=\frac{E}{(1-\nu^2)}\left\{A_3(1+\nu)+B_3(\nu-1)\frac{1}{(3h)^2}\right\}.$$

$\overline{4}$ 區間に對して,

$$3h\alpha\,T(2h)+3h\,A_3+\frac{1}{3h}B_3=3hA_4+\frac{1}{3h}B_4+3h\alpha\,T(3h),$$

$$p_3=\frac{E}{(1-\nu^2)}\left\{A_4(1+\nu)+B_4(\nu-1)\frac{1}{(3h)^2}\right\},$$

$$p_4=\frac{E}{(1-\nu^2)}\left\{A_4(1+\nu)+B_4(\nu-1)\frac{1}{(4h)^2}\right\}.$$

一般に $\overline{s}$ 區間の處で,

$$(s-1)h\alpha\,T((s-2)h)+(s-1)h\,A_{s-1}+\frac{1}{(s-1)h}B_{s-1}$$

$$=(s-1)h\alpha T((s-1)h+(s-1)h\,A_s+\frac{1}{(s-1)h}B_s$$

$\overline{n}$ 區間は周邊自由で p の處だけ異り

$$p_{n-1}=\frac{E}{(1-\nu^2)}\left\{A_n(1+\nu)+B_n(\nu-1)\frac{1}{(n-1)^2h^2}\right\},$$

$$0=\frac{E}{(1-\nu^2)}\left\{A_n(1+\nu)+B_n(\nu-1)\frac{1}{n^2h^2}\right\}.$$

この方程式系を解いて，係數列 (A_n) (B_n) (p_n) を求め，$lim\ r_s=r$, 但し $r_s=h\cdot s=\frac{a}{n}$,sで $\frac{r}{a}=lim\frac{s}{n}$ であるように，s と n とを無限大にする。この極限移行により，點 r における，溫度分布が $T(r)$ なる場合の應力を求めようとする。即ちこの彈性學の普通の解法によつて得られる，階段溫度分布の場合の解は正しいと見られるから，これを極限移行することは或る意味があろうと云う譯である°

$h\to 0$ であるから,

$\frac{\partial T(r)}{\partial r}\equiv T'(r)$ と $-\frac{p_s(1-\nu^2)}{E}\equiv p_s'$ の記號を使い，前記の方程式系を，次のように變形し得る。

$$h\alpha T(h)=-\frac{h}{(1+\nu)}p_1' \qquad -h\,A_2 \qquad -\frac{1}{h}B_2$$

$$0= \qquad +p_1' \qquad +(1+\nu)A_2 \qquad +\frac{(\nu-1)}{1^2h^2}B_2$$

$$0= \qquad +p_2' \qquad +(1+\nu)A_2 \qquad +\frac{(\nu-1)}{2^2h^2}B_2$$

$$2h^2\alpha T'(h)= \qquad +2h\,A_2-2h\,A_3 \qquad +\frac{1}{2h}B_2-\frac{1}{2h}B_3$$

$$0 = \quad + p_2' \quad + (1+\nu)A_3 \quad + \frac{(\nu-1)}{2^2h^2}B_3$$

$$0 = \quad + p_3' \quad + (1+\nu)A_3 \quad + \frac{(\nu-1)}{3^2h^2}B_3$$

$$(n-2)h^2\alpha T'((n-3)h) = \quad + (n-2)hA_{n-2} - (n-2)hA_{n-1} \quad + \frac{1}{(n-2)h}B_{n-2} - \frac{1}{(n-2)h}B_{n-1}$$

$$0 = p'_{n-2} \quad + (1+\nu)A_{n-1} \quad + \frac{(\nu-1)}{(n-2)^2h^2}B_{n-1}$$

$$0 = \quad + p'_{n-1} \quad + (1+\nu)A_{n-1} \quad + \frac{(\nu-1)}{(n-1)^2h^2}B_{n-1}$$

$$(n-1)h^2\alpha T'((n-2)h) = \quad + (n-1)hA_{n-1} - (n-1)hA_n \quad + \frac{1}{(n-1)h}B_{n-1} \quad - \frac{1}{(n-1)h}B_n$$

$$0 = \quad + p'_{n-1} \quad + '1+\nu)A_n \quad + \frac{(\nu-1)}{(n-1)^2h^2}B_n$$

$$0 = \quad 0 \quad + (1+\nu)A_n \quad + \frac{(\nu-1)}{n^2h^2}B_n.$$

これを解いて

$$B_s = \frac{-(1+\nu)}{(1-\nu)}h^2\alpha T(h) - \frac{(1+\nu)}{2}\alpha h^3\left\{2^2T'(h)+3^2T'(2h)+4^2T'(3h) + \cdots\cdots + (s-1)^2T'((s-2)h)\right\},$$

$$A_s = A_n + \frac{(1-\nu)}{2}\alpha h\left\{T'((n-2)h) + T'((n-3)h) + T'(s-1)h)\right\},$$

但し $$A_n = \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)}\frac{1}{n^2h^2}\left[\frac{(1+\nu)}{(1+\nu)}h^2\alpha T(h) - \frac{(1+\nu)}{2}\alpha h^3\left\{2^2T'(h)+3^2T'(2h)+4^2T'(3h + \cdots\cdots + (n-1)^2T'((n-2)h)\right\}\right].$$

この表現に前述したような極限移行を行えば，

$$lim\, B_s \to B_r = \frac{-(1+\nu)\alpha}{2}\int_0^r r^2\frac{\partial}{\partial r}T(r)\,dr = \frac{-(1+\nu)\alpha}{2}(r^2\,T(r) - 2\int_0^r rT(r)\,dr),$$

$$lim\, A_s \to A_r = \frac{-(1-\nu)}{2}\alpha\frac{1}{a^2}\int_0^a r^2\frac{\partial}{\partial r}T(r)\,dr + \frac{(1-\nu)}{2}\alpha\int_r^a\frac{\partial T}{\partial r}\,dr,$$

$$lim\, p_s \to p_r = \sigma_r = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left\{A_r(1+\nu) + \frac{1}{r^2}(\nu-1)B_r\right\},$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left\{A_r(1+\nu) + \frac{1}{r^2}(1-\nu)B_r\right\}.$$

以上により，$$\sigma_\theta = E\alpha\left(\frac{1}{a^2}\int_0^a rT(r)\,dr - T(r) + \frac{1}{r^2}\int_0^r rT'(r)\,dr\right),$$

$$\sigma_r = E\alpha\left(\frac{1}{a^2}\int_0^a rT(r)\,dr - \frac{1}{r^2}\int_0^r rT(r)\,dr\right).$$

ここに得られた解は，半徑 $r=a$ の中實圓板に中心對稱溫度分布 $T(r)$ がある場合，(19) 式の從來の理論に依る正解と云われている表式より，周邊自由の境界條件をいれて，定數決定を行つて得られる解と全く一致している。故に (19) の式に依る解は，即ちその解法も含めて，正しいと結論したいところであるが，それは一應許されないのではないかと思う。

溫度分布の不連續點を除く總てのところで，應力は熱應力の解法に依らないものであるが故に，適合條件を滿足している。溫度分布の不連續點では，變位は連續であるが，應力は不連續なものがある。そして極限移行と共に不連續的なものは消失するが，その應力は不適合なものとなるのである。適合的な解を極限移行して，尙も適合的であれば，一應その結果は $T(r)$ 分布に對する眞の解であると認めることは出來るであろうが，事實はこれに反するのである。上述の通り不適合應力なるものは，極めて性質の曖昧なものであり，不合理なものである。又彈性學の書で不適合應力を說明するものは寡聞にして知らない。彈性學の基礎は適合歪，適合應力をもつて構成されており，何等の不適合歪，不適合應力に對する考慮は拂われていないのである。彈性學の扱う範圍で，現實に存する歪は適合歪であり，現實に存する應力は又適合的であるべきものと思う。前者は廣く認められているが，後者に付いては別に述べられていない。凡そ彈性學の計算で，適合條件を無視することは屢々であり，無視したからとて，他の諸式諸條件がよく滿足されているならば，さして不合理な結果に到達することはないものである。併しそれは正に近似的な已むを得ない處置として，計算上一應無視したものであり，得られた應力をここで云うところの不適合應力の名で，呼ばれるべきものではない。即ち (19) の解の導出の最初より，既に應力は不適合的なものでなければならないと，理論上きめてかかる例えば H.Reissner [2] の不適合應力ではない。若し不適合であるべきであるとすれば，適合條件に代る條件が必要なことは前述した通りである。現在のところ良法もないので，便宜上不適合としてあると云うならば話は全く別である。併し上述の通り，普通の彈性計算では，適合條件を考慮しないことはよくあることであり，一應役に立つ解が得られるので，この場合にもその意味において (19) 式を熱應力解と見ることが出來る。然し筆者の云うところの正しい解法や解が現在あるわけではないので，實驗に依る以外は，信賴度をきめる方法はない。

云い換えれば，(19) 式を得るような從來の熱應力問題に對する解法が，初等解を，或いは普通の彈性問題の解を極限移行して，解を求める程度の確かさを有しており，數學的には確かに極限は存在しているが，また極限移行によつて，一部の彈性學的意味を喪失するが，初等解が有していた理工等的常識に合致する或る種の性質を保存していて，その解析の方法，及び得られる解の解釋に愼重であれば，一應熱應力解として參考にすることが出來ると思われる。而してそれでも (19) の解とか，平面歪の圓筒の軸對稱問題の解が，特に故障なく解けている方であると考えられる。次に上記の初等解の極限移行による方法において，矢張り $T(r)$ に何等特別

な制限を課していないことを指摘したい。制限とは，例えば定常的であるとか，近似的な意味において，不定常的即ち平面調和函數でないとかを意味する。これに關しては，坪内教授[11]の論文を見られたい。教授は熱應力解は，溫度分布函數が調和か非調和かで，異ることあるべきを述べて居られる。因に從來の解法で，溫度分布が平面調和の時，熱應力が生じないような結果になることもあるに，(19)の解及びそれに相應する平面歪解では應力が生じていることは既述の通りである。

ここに熱應力の平面歪の場合について，溫度分布が階段的である時の初等解より，極限移行する例を示さないが，當然從來の結果が得られるわけで割愛した。併し既述の通り從來の解が眞の彈性學的な解でない以上 $m = 1/\nu$ に關する從來の置換により平面應力と平面歪解が相互より得られることがなくとも不思議ではない。平面歪の熱應力問題は，全歪 $\varepsilon_z' = \varepsilon_z + \alpha T$ が常數になることは注意すれば容易に解き得られる。

§5. 附　　言

微少變位理論で，純彈性問題に限られる場合に，外荷重なした彈性體内に生じて居る應力即ち固有應力中には，明かに適合條件を滿足しているところ，Volterra[9] の意味及び稍々廣義の distocation 或いは distorsion に依る應力があり，これに關しては應力並に歪に就いて普通の彈性論の表式を，使用出來ることは明瞭であるが，それ以外の固有應力即ち所謂不適合應力並に歪に就いては，例えば

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x},\quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},\quad \text{のような表式や}$$

$$du = e_x\,dx + \frac{1}{2}\,\gamma_{xy}\,dy\,\frac{1}{2}\,\gamma_{zx}\,dz - \omega_z\,dy + \omega_y\,dz$$

$$dv = \frac{1}{2}\,\gamma_{xy}\,dx + e_y\,dy + \frac{1}{2}\,\gamma_{yz}\,dz - \omega_x\,dz + \omega_z\,dx$$

$$dw = \frac{1}{2}\gamma_{zx}\,dx + \frac{1}{2}\,\gamma_{yz}\,d_y + e_z\,dz - \omega_y\,dx + \omega_x\,dy$$

の表式を使用して，ある結論を導くことは許されないことと考えられる。特に後者は例えば $du = \dfrac{\partial u}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}\,dy + \dfrac{\partial u}{\partial z}\,dz$. より前者の表式を使つて變形して得られたもので，不適合の場合は既に，この前者の ε_x,……γ_{xy},……の變位に依る表式は，使用出來ないのであるから，成立しているとすれば，假定である故，得られた結論に對する解釋は，愼重にしなければならないことと思う。(1)のような表式を認めて，不適合固有應力，不適合固有歪に意味ありとすれば，Saint Venant の適合條件，或いはより廣義の適合條件よりのずれを不適合度として，[12] イタリヤ系[9] 學者等もいうように，固有應力又熱應力は，この不適合度の空間的分布によるものであるという表現が用い得るであろう。併し兎角不適合的な應力と歪を考えれば種々の難點を生ずることは前述の通りであり，階段溫度分布のところで述べたように，跳躍的

變化の角を丸めるか，應力の localization effect を考えれば，不適合的な熱應力源のみにより，熱應力が誘起されるとするのは眞ではないと思われるし，熱應力，熱應力歪が不適合的でなければならないという要請は便宜的過度的なものであるとも考えられる。

H. Reissrur 教授[2] は 1931 年の論文の終の方で，固有應力を非コークリソド空間内の變形狀態に依るものとして，Riemann 幾何學に依る解決に就き一言しており，又これに關連して近藤教授[12] の Riemann 幾何學に依る御研究があり，極めて參考になるものではあるが，ここでそのことに言及する積りはない。併しこれ等は不適合應力，不適合應力歪を認め廣義の Hooke の法則を假定したものであり，固有應力の意味の明確でない點もあるようであり，實際意味の附與の困難なる量を容易には導入し兼ねるようである。特に ε_{xy} や γ_{xy} に關して述べたこともあつて，$\varepsilon_{rs}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial y_s}+\frac{\partial v_s}{\partial y_r}\right)$ のような表式は，變位並に座標の次元數が異るとは云え簡單には理解し難いところである。

次に解の一義性に就いて一言したい。彈性學において，解の唯一性に關する證明に就いては，固有應力度が存在する場合は，問題にならないとして，除外してあり，固有力問題の解の一義性については述べていないのではないかと思う。この固有應力の解法に對する解の一義性は困難な問題であるかも知れない。

熱應力問題が，容積力及び表面引張り力を受ける，普通の彈性問題に變換されているとしてその變換された問題に對する Kirchhoff の解の一義性の定理で充分としているためであろうか。勿論熱應力理論に對する基礎假定と，その變換が合理的であれば，正にそれで充分であろう。兎角不適合應力としての固有應力に對する現在の解法に關する解の一義性の記述は，筆者寡聞にして知らない。この一義性が確立していなければ解法や，課する條件の何如に依つて異る結果が出ようとも，何等不思議とすべきところはない。即ちそれだけ解法並に解に對する信賴性が乏しい譯である。

§ 6. 結　　語

應用彈性學の書は，熱應力や固有應力問題に關して，適合條件につき述べるところが少く因つてこれを中心に，從來の解法の基いている假定や，解の矛盾につき一言し，現在の理論の信賴性が，他の彈性問題に比して劣るものであることを主張した。熱應力や固有應力の理論は應用彈性學中でも扱い難いものであり，且つ非彈性的な現象や履歷を有する彈性體の問題を彈性學的に解くことそれ自體が無理なことであり，現在のところ彈性學的に解けたと稱しているに過ぎないと思う，即ち巨視的な，現象論的な理論のみでは事欠き，微視的な他の理論の援助をも必要とするように考えられる。

文中措辭不適當なものは寬恕されたく，又可能なる誤謬に關する一切の責は筆者にある旨附記したい。

終りに本研究に種々御厄介になつた北大機械科の諸先生，並に本研究の端緒は鵜戸口先生

の論文であり，依つて先生に又東大工村外志夫氏に感謝の意を表する。

引 用 文 献

1) A. E. H. Love: "The Mathematical Theory of Elasticity" pp. 108—111.
2) H. Reissner: "Eigenspannungen und Eigenspannungsquellen". Z. A. M. M. Bd. 11. (1931), pp. 1—8.
3) S. Timoshenko: "Theory of Elasticity." the 1st Edition, 1934, pp. 203—212.
4) 同 上 pp. 196—198.
5) 鵜戸口英善: "圓板の熱應力に對する一考察." 應用力學 第4卷，第23號，1951年8月，p. 10.
6) S. Timoshmko: 同上, pp. 366—373.
7) 倉西正嗣: "彈性學," pp. 632—644.
8) A. E. H. Love: 同上, pp 221—225.
9) Nemény i: "Handbuch der Physikalische und Technische Mechanik", Vol. 4 No. 1 p. 200.
10) R. D. Mindlin and H. L. Cooper: "Thermoelastic Stress Around a Cylindrical Inclusion of Elliptic Cross Section", J. A. M. vol. 17, No. 3. 1950 pp. 265—268.
11) 坪內爲雄: "圓筒體の熱應力に就いて"，日本機械學會 第29期定期總會講演會發表，論文集印刷中.
12) 森口繁一: "彈性體のクイチガイの基本理論"，應用數學・力學，第1卷，第1號，p. 29，"無限彈性體の固有應力"，同上，第1卷，第2號，p. 87.
13) 近藤一夫: "リーマン幾何學による材料降伏理論の試み"，應用力學，第2卷，第8號，1949年3月. 以下1951年迄の一連の同誌上の論文.