HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	木桁の曲げ彈性係數の變化法則に就て
Author(s)	金, 俊三
Citation	北海道大學工學部彙報, 1, 157-166
Issue Date	1948-12-20
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40435
Type	departmental bulletin paper
File Information	1_157-166.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

木桁の曲げ彈性係數の變化法則に就て

金　　俊　三*

On the law of variation of the modulus of elasticity for bending in wooden beams.

Tosizô KON.

Synopsis.

In the applied mechanics, ordinarily, the Young's modulus E is used in the place of the modulus of elasticity for bending E' of beam. But, as the beam deflection is composed of those due to the normal and shearing stresses, the shear modulus G also effects the modulus of elasticity for bending. In the material as wood, where the ratio E/G is great, this latter effect is so considerable that E' becomes to show a remarkable variation according to that of the span-depth ratio of beam. In this paper the author studies about the law of E' theoretically, and in the next place, he makes some elastic tests about it, taking "Ezo"-spruce as the material. Finally, under the comparison of these both theoretical and experimental curves of E', he has concluded that the formula he studied should represent the law of variation of E' for all the practical region of the span-depth ratio of wooden beam.

目　　次

I. 緒　　言 …… 158
II. 曲げ彈性係數の理論 …… 158
III. 實　　驗 …… 159
A. 豫 備 實 驗 …… 160
B. 本　實　驗 …… 161
1. ヤング係數 E を決定する實驗 …… 161
2. 剪斷彈性係數 G を決定する實驗 …… 162
3. 曲げ彈性係數 E' の實驗 …… 163
IV. 結　　論 …… 165
參 考 文 献 …… 166

* 北大教授，北海道大學工學部構造工學研究室.

I. 緒 言

木材構造の彈性變形の計算をやる場合[1]に重要な曲げの彈性係數は力學的に定數ではなく或る變化する量であることは，最近實驗的に確められて例へば Kollmann の著書などにも見られる通りである．工學の方でも從來これを定數の如くに見てゐて，これによつて變形を計算したが，木材構造の變形が理論計算の結果と一致しない點に不審を大きくしてゐた譯である．本研究は矩形斷面單純梁に就て曲げ彈性係數の一般理論を誘導し，次で**エゾマツ**に就てその彈性實驗を行つて理論と實驗との合一性を檢討し，曲げ彈性係數の變化法則を明かにしたものである．

II. 曲げ彈性係數の理論

單純梁に曲げを與えたときの撓みは垂直應力による部分と，剪斷應力による部分とから成立してゐると一般的に考えられる．即ち

$$\delta = \delta_n + \delta_s \qquad \cdots\cdots (2.\ 1)$$

但し δ ： 荷重による曲げ撓み

δ_n ： 垂直應力に因る撓み

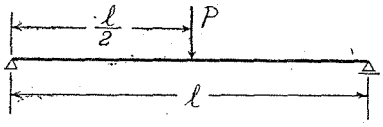
δ_s ： 剪斷應力に因る撓み

初等力學では單純梁に，中央に集中荷重１個を荷ふときの撓みを次の様にして求める(圖—1).

$$\delta = \frac{Pl^3}{48\,E'I} \qquad \cdots\cdots (2.\ 2)$$

但し E' ： 曲げの彈性係數

I ： 梁斷面の慣性**モーメント**



圖—1

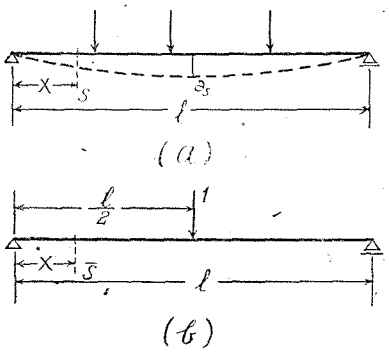
從つて垂直應力に因る撓みは次の様になる．

$$\delta_n = \frac{Pl^3}{48\,EI} \qquad \cdots\cdots (2.\ 3)$$

E ： 垂直應力に對する彈性係數，即ち**ヤング**係數（引張側，壓縮側とも同一と假定する）．

剪斷應力に因る撓みは Mohr の假想仕事の原理によつて(圖—2),

$$\delta_s = \mu \int_{(l)} \frac{SS}{GA}\,dx \qquad \cdots\cdots (2.\ 4)$$



圖—2

1) 從つて又不靜定應力の計算に對しても同樣である．

但し　S：實際の荷重による剪斷力 (圖—2, a),

S：中央單位荷重による剪斷力 (圖—2, b),

A：梁の斷面積,

G：剪斷彈性係數,

μ：横斷面の形によつて變化する或る係數.

實際の荷重として實驗に應用する中央集中荷重1個の場合をとると，上式は

$$\delta_s = \frac{\mu}{4} \cdot \frac{Pl}{GA}. \qquad \cdots\cdots (2.\ 5)$$

(2), (3), (5) 式を (1) 式に入れて整頓すると，曲げ彈性係數の法則は次の如くに表はしうる.

$$E' = \frac{E}{1 + 12 \frac{\mu}{\lambda^2} \frac{E}{G}} \qquad \cdots\cdots (2.\ 6)$$

但し　$\lambda = \frac{l}{r}$：曲げの平面に於ける梁の細長比 (slenderness ratio),

$r = \sqrt{\frac{I}{A}}$：斷面の曲げの平面に於ける回轉半徑 (radius of gyration),

ポアソン比 を ν とすると，等方性の材料では $E/G = 2(1 + \nu)$ の關係があるから，(6) 式は次の様に變形される.

$$E' = \frac{E}{1 + 24\,(1 + \nu) \frac{\mu}{\lambda^2}} \qquad \cdots\cdots (2.\ 7)$$

(7) 式は任意の定斷面をもつ桁の曲げ彈性係數の變化法則に關する一般式である．吾々の問題である矩形斷面の定場合には (6) 式に $r = h/\sqrt{12}$ (h：桁の高さ), $\mu = 6/5$ と置くと

$$E' = \frac{E}{1 + 1,2 \frac{E}{G} \left(\frac{h}{l}\right)^2} \qquad \cdots\cdots (2.\ 8)$$

木桁では木口の年輪のとり方にもよるが E/G は Birke では 14～18, Fichte では 20～26 位の大きな値となるので[1], $\frac{h}{l}$ の E' に及ぼす影響は鐵鋼材料などの場合とは比較にならぬほど大きくなる筈なのである.

III. 實　　驗

この實驗材料として **エゾマツ** (Picea yezoensis) をえらむだ.

1) 獨逸 Stamer などの値より求めた．ただしこの場合の E は軸應力のみによるものである.

A. 豫 備 實 驗

此の研究では試驗片に彈性限度以內の應力をかけなければならないから，$\frac{h}{l}$ の各値に對する材料の曲げ破壞係數(modulus of rupture)を先づ實驗的に決めなければならぬ．これから彈性限度荷重を判定する．しかしてこの彈性限度荷重は $\frac{h}{l}$ の値に從つて變化することとなる．この彈性限度荷重と $\frac{h}{l}$ との間の關係は或る函數であらはし得る．それは材料の曲げ破壞係數と $\frac{h}{l}$ との間に或る函數的關係があり，他方曲げ破壞係數と彈性限度應力との比は一定と見なし得るからである．この比をここでは $\frac{1}{4}$ ～ $\frac{1}{5}$ とした．

而して中央集中荷重1個のときの $\frac{h}{l}$ と曲げ破壞係數との關係を次の樣に假定する[1]．

範　圍	曲げ破壞係數
$\frac{h}{l} \leqq \frac{4\tau_{max}}{3\sigma_t - \sigma_c}$	$\frac{M}{W} = \frac{\sigma_c(3\sigma_t - \sigma_c)}{\sigma_t + \sigma_c}$
$\frac{4\tau_{max}}{3\sigma_t - \sigma_c} \leqq \frac{h}{l} \leqq \frac{2\tau_{max}}{\sigma_c}$	$\frac{M}{W} = \frac{3\tau_{max}}{\frac{\tau_{max}}{\sigma_c} + \frac{h}{l}}$
$\frac{h}{l} \geqq \frac{2\tau_{max}}{\sigma_c}$	$\frac{M}{W} = \frac{2\tau_{max}}{\frac{h}{l}}$

…… (3. 1)

但し　σ_c ： 材料の壓縮强さ
σ_t ： 材料の引張强さ
τ_{max} ： 材料の剪斷强さ
M ： 最大曲げモーメント
W ： 斷面係數
M/W ： 曲げ破壞係數

從つて材料の σ_c, σ_t, τ_{max} が與えられると $\frac{h}{l}$ の變化に對する曲げ破壞係數曲線を描きうるので，任意の $\frac{h}{l}$ に對する M/W が曲線から求められ，從つてまたその彈性限度荷重を求むることが出來る．この豫備實驗では **エゾマツ** に對して

$$\sigma_c = 333\ \mathrm{kg/cm^2}\ ,\quad \sigma_t = 1056\ \mathrm{kg/cm^2}\ ,\quad \tau_{max} = 79\ \mathrm{kg/cm^2}$$

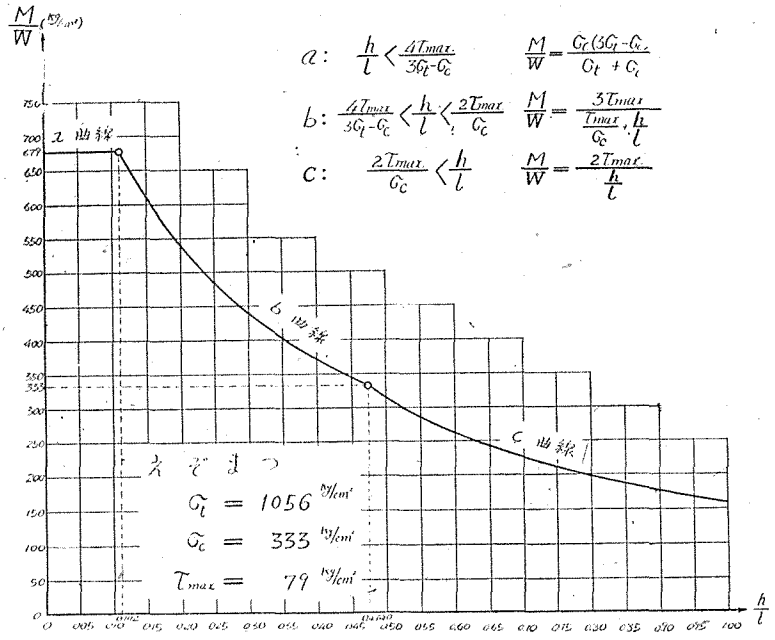
となつたから $\frac{M}{W}$ -曲線は 表—1 及び 圖—3 の樣になる．

1) この問題に就ては別の機會に發表したいと思ふ．

表——1　$\frac{M}{W}$ - 曲線値

(單位 kg/cm², 含水率 15%)

h/l	0.05	0.10	**0.1112**	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	**0.4740**	0.50
M/W	679	679	**679**	611	541	486	441	403	371	344	**333**	315
h/l	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00		
M/W	287	263	243	225	210	197	186	175	166	158		



圖——3

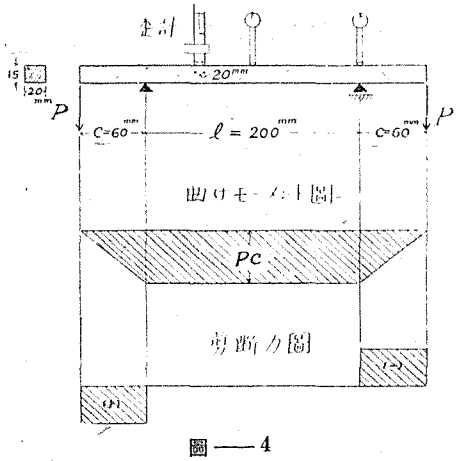
B. 本　實　驗

本實驗は次の3部分から成る.

1. ヤング係數 E を決定する實驗

圖—4 の如き cantilever をもつ單純梁試驗片の單純梁徑間に剪斷を伴はない純粹曲げ (pure bending) を與えて圖—5 の裝置により δ' を測定し，次式で E を求めた.

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{3}{2}\cdot\frac{P.c}{bh\delta}\left(\frac{l}{h}\right)^2 \\ \delta &= \delta' + \delta_p \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.\ 2)$$



圖——4

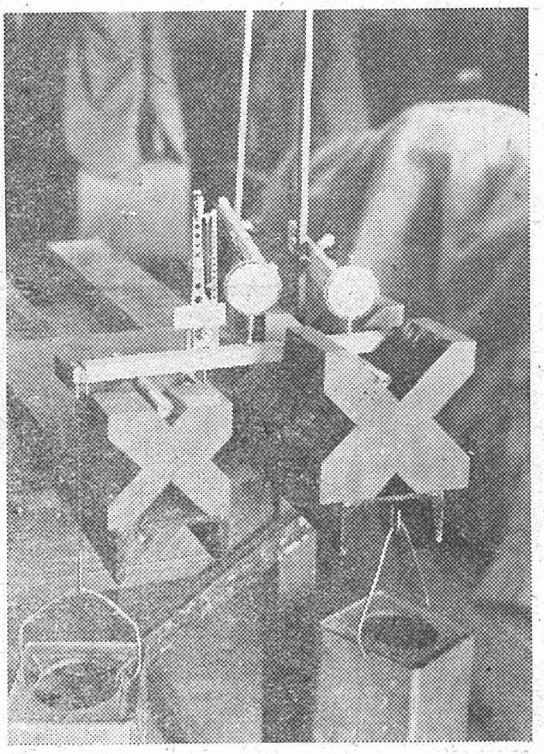
但し δ'： 徑間中央の見掛けの撓み

δ_p： 支點上の材料の減り込み量

尙ほ參考のためにオクイツエン歪計によつて引張側外皮の歪み ε_t を測り，これから又彈性係數 E_t を求めた．このときの算式は

$$E_t = \frac{6}{\varepsilon_t} \cdot \frac{P_C}{bh^2} \quad \cdots\cdots\cdots (3.3)$$

である．而してこのときの曲げ應力度の彈性限度は表—1 より $679/4 \fallingdotseq 170\ \mathrm{kg/cm^2}$，從つて彈性限度荷重は 21.2 kg となるが，實驗の都合上荷重 P の上限を 16 kg までとした．試驗片は $B_{1\sim3}$ の 3 本，木口年輪は荷重方向に垂直，上下 2 面板目，兩側 2 面柾目に木取つた．荷重は 2 kg に始めて 16 kg に至る 2 kg 毎の 8 段階である．しかして其の結果は 表—2 の如くになつた．



圖——5

表——2

(單位 $\mathrm{kg/cm^2}$，含水率 15%)

試驗片	E	E_t
B_1	125416	120016
B_2	134236	150509
B_3	112612	127661
平均	124088	132729

2. 剪斷彈性係數 G を決定する實驗

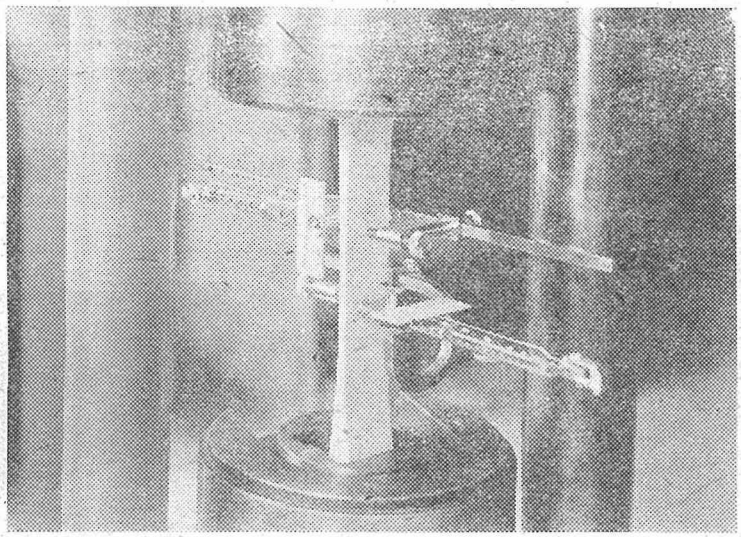
曲げ試驗片の纖維方向を y，年輪に直角な半徑方向を z とすると，(2.8) 式の G は G_x 即ち (y, z) 平面に垂直な軸の周りの剪斷彈性係數である．木材を直交異方性體と見てその G_x を決めるのに等方性體に普通な捻り試驗方法によると，x, y, z 3 方向の試驗片について各別に捻り試驗をやつて，その 3 個の結果から一定の公式に從つて G_x を求めねばならぬので G_x のみを求める目的には非常に手數がかかる．それで此處では簡便な **垂直應力に依る 45° 試驗片** の方法を採用した．直交異方性體の彈性理論から，y, z 2 軸が試驗片の引張或は壓縮應力の方向(即ち試驗片の軸方向)と 45° の傾きをもつた場合にのみ，$G_x, E_{45°}$ の間に等方性體のときと同形の次の關係が導かれる．

$$G_x \equiv G = \frac{E_{45°}}{2(1+\nu_{45°})} \quad \cdots\cdots\cdots (3.4)$$

但し $E_{45°}$： 45° 試驗片の軸(引張或は壓縮)應力方向の彈性係數

$\nu_{45°}$： 45° 試驗片の軸應力に對して直角の方向の **ポアソン** 比

νは特殊な場合を除いて普通には負符號をもつが，(3.4)式はこの符號を既に考えた式であるから，横歪みが縦歪みと逆符號のときはνは上式に正符號で入れる必要がある．この式からG_xは1種の實驗だけで求め得られる．



圖——6

此の實驗では引張應力を用ひることとし，先づ45°試驗片2本について引張強さ荷重 240 kg, 265 kg を得たので，安全のため彈性限度比を 1/6 として彈性限界荷重を 40 kg と假定した．而して實驗荷重は 5 kg より 40 kg まで 5 kg 毎の8段階とした．試驗片の寸法は日本標準規格により，唯摑み部分の長さを 5 cm とし，また荷重が小さいのでこの部分の硬木副木をやめた．試驗片は$C_{1\sim3}$の3本，試驗裝置は圖—6である．其の結果は表—3の如くである．

表——3　G の 値

(單位：kg/cm²)

	$E_{45°}$	$\nu_{45°}$	G	G (含水率 15%)
C_1	13452	0.0303	6526	6516
C_2	14698	0.1009	6675	6679
C_3	21499	0.0593	10148	10148
平　均				7781

3. 曲げ彈性係數 E' の實驗

(2.8)式によつて實驗 1, 2 からE'の理論曲線が求められるから，次に理論曲線と實驗曲線との比較の目的のために剪斷曲げ彈性實驗を行つてδを測り，(2.2)式からE'を求めねばならぬ．(2.2)は矩形斷面について

$$\left.\begin{aligned} E' &= \frac{P}{4b\delta}\left(\frac{l}{h}\right)^3 \\ \delta &= \delta' - \frac{\delta_p + \delta_p'}{2} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (3.5)$$

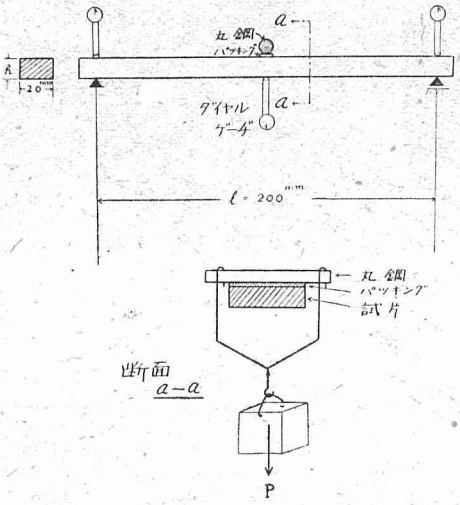
但し　δ_p, δ_p'：支點上の材料の減り込み量

δ'：徑間中央の見掛けの撓み

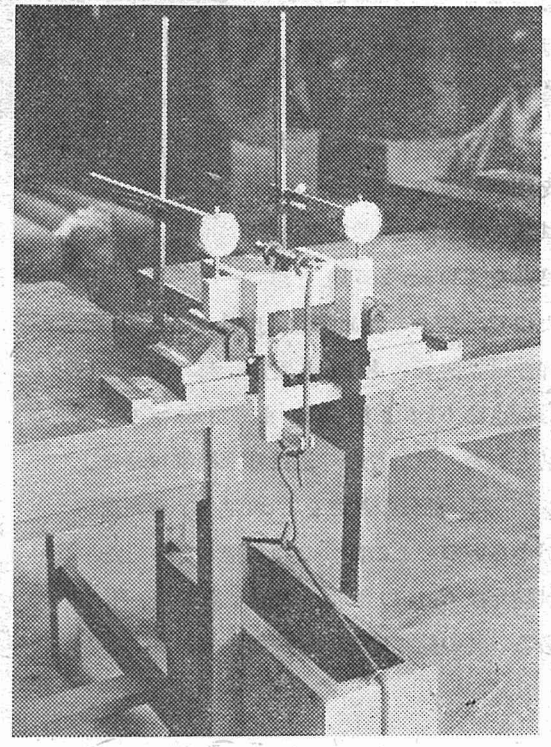
となる．試驗片の寸法及び本數は圖—7及び表—4の如くした．

表——4

試驗片	A_a	A_b	A_c	A_d	A_e	A_f	A_g
h (cm)	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
h/l	0.025	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
本數	3	3	3	3	3	3	3



圖——7



圖——8

彈性限度比を 1/4 として表—1 の $\frac{M}{W}$-曲線から各試驗片の彈性限度曲げモーメント $M_{E.L.}$ が得られるから，從つてこのときの彈性限度荷重 $P_{E.L.}$ が求まる．荷重裝置の都合により實驗最大荷重は之より遙かに小さくしなければならなかつた．即ち表—5 の如くなした．圖—7, 8 はその實驗裝置である．

表——5 實驗荷重

試驗片	A_a	A_b	A_c	A_d	A_e	A_f	A_g
M/W (kg/cm²)	679	679	679	612	542	487	441
$M/4W$ (kg/cm²)	165	165	165	153	136	122	110
$M_{E.L.}$ (kgcm)	13.2	49.5	214.5	459	720.8	1012.6	1320
$P_{E.L.}$ (kg)	2.64	9.9	42.9	91.8	144.16	202.52	264
實驗最大荷重	2.4	9.6	40	40	40	100	100
荷重段階	8 @ 0.3	8 @ 1.2	8 @ 5.0			8 @ 12.5	

而してその實驗の結果，E' は 表—6 の如くになつた．

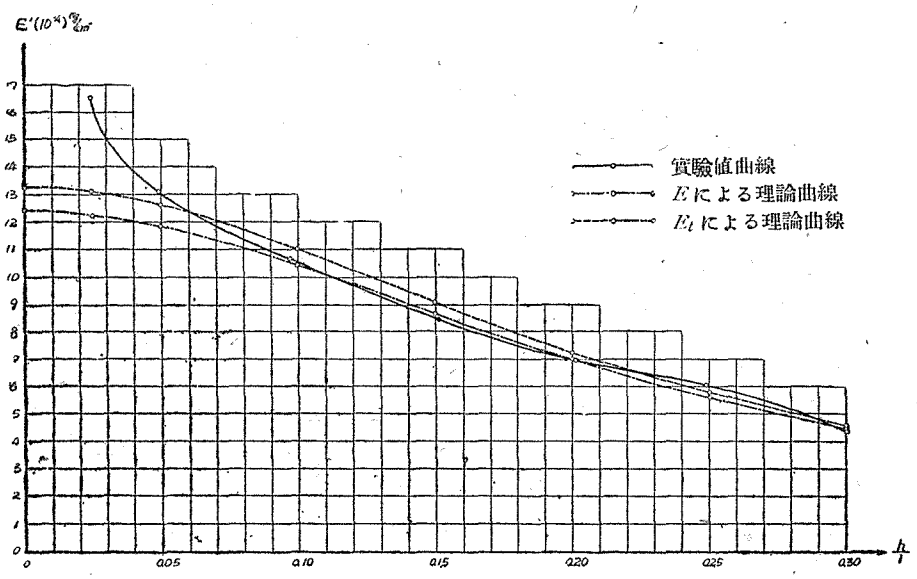
表——6　E' の 値

(單位：kg/cm², 含水率 15%)

試驗片	$A_{a1}-A_{a3}$	$A_{b1}-A_{b3}$	$A_{c1}-A_{c3}$	$A_{d1}-A_{d3}$	$A_{e1}-A_{e3}$	$A_{f1}-A_{f3}$	$A_{g1}-A_{g3}$
1	168122	139803	99715	86879	61245	64708	41484
2	168204	120907	111541	78922	74520	64812	48232
3	160248	132859	108613	89232	73740	52357	41498
平　均	165524	131190	106623	85011	69835	60626	43738

IV. 結　　論

以上の實驗から E' の理論曲線と E による E' 實驗曲線とを比較すると 圖—9 の様になる．參考のために E の代りに E_t を用ひた場合の曲線をも記入した．是によつて次の各項が結論される．



圖——7

(1) 矩形斷面梁で $h/l = 0.07 \sim 0.3 = \frac{1}{14.3} \sim \frac{1}{3.3}$ の實用的範圍では，理論曲線と E による實驗曲線は非常によく一致する(最大誤差 7%)．從つてこの範圍では理論式(2.8)は十分正確に曲げ彈性係數 E' の變化法則を表すものと考え得る．

(2) 實用上 **エゾマツ** に對して $E/G = 15.9476 \fallingdotseq 16$ とみて差支ない ($E = 124088$ kg/cm², $G = 7781$ kg/cm², 含水率 15% として)．

(3) $h/l = 0.025$ 及び 0.05 で理論，實驗兩値は相當の喰違ひを生じたが (この 2 點では試驗片を

改めて2回やつてみた), 實驗値 E' が E_t による曲線より著しく大きくなるのは不合理であつて, これは h/l の小さい材料に對する荷重誤差の影響に起因したものと思はれる. しかし $h/l=\frac{1}{40}\sim\frac{1}{20}$ といふ梁は實用の範圍外と見られるので, 斯かる實驗誤差は (2.8) 式の實用的價値を減ずるものではない.

(4) E_t による E'-曲線は E による E'-曲線より大きくなる. これは引張彈性係數は壓縮のそれよりはエゾマツでは大きいためである[1]. E による E'-曲線の方が勿論妥當である.

終りに本研究に關する實驗は昭和22年7月より8月に亙つて行はれ, 實驗, 測定及び計算に盡力された研究室員前田幸雄, 加々美定雄, 宮內一彥, 當時學生小橋浩, 諏藤猛 (この實驗の部分は兩君の昭和22年度卒論.) の諸氏に深い感謝を呈するものである.

參考文献

1) Kollmann: Techologie des Holzes, 1936.
2) Roark: Formulas for Stress and Strain, 1938.
3) 日本航空學會誌, 第8卷, 第79號.
4) Seitz: Grundlagen des Ingenieurholzbaues, 1925.
5) Jackson: Ingenieur-Holzbau, 1921.
6) 造船協會雜纂, 第259號 (昭18).

1) 私の從來の實驗ではこの樣になつてゐるが, 外國の實驗報告では必ずしもそうではない.